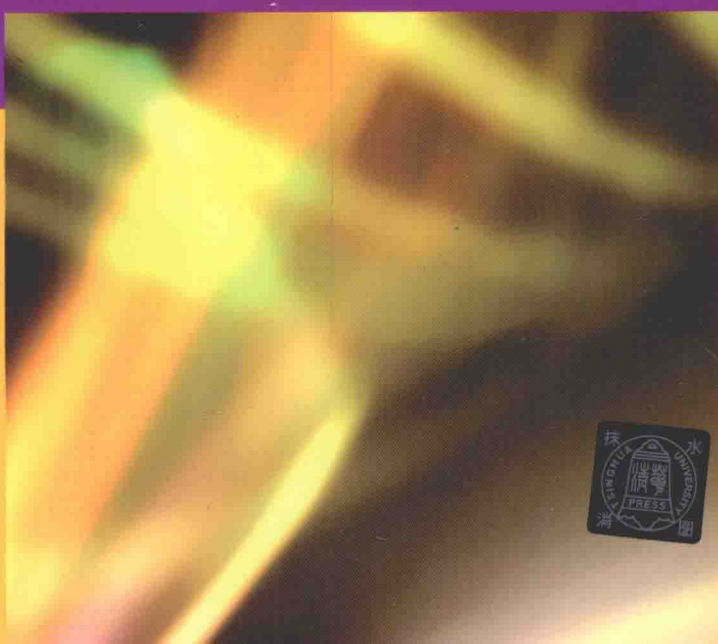
清华大学名优教材立项资助

清华大学公共基础平台课教材

■ 章纪民 闫浩 刘智新 编著

高等微积分教程(下)

多元函数微积分与级数



清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

高等微积分教程(下)

多元函数微积分与级数

■ 章纪民　闫浩　刘智新　编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本教材是编者在多年的教学经验与教学研究的基础上编写而成的.教材中适当加强了微积分的基本理论,同时兼顾微积分的应用,使之有助于培养学生分析问题和解决问题的能力.书中还给出了习题答案或提示,以方便教师教学使用及学生自学.

教材分为上、下两册,此书是下册,内容包括多元函数及其微分学、含参积分及广义含参积分、重积分、曲线积分与曲面积分、常数项级数、函数项级数、Fourier 级数.

本书可作为大学理工科非数学专业微积分课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等微积分教程.下,多元函数微积分与级数/章纪民,闫浩,刘智新编著.--北京:清华大学出版社,2015

清华大学公共基础平台课教材

ISBN 978-7-302-39418-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①章…②闫…③刘…　Ⅲ.①微积分一高等学校一教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 031483 号

责任编辑: 石　磊　汪　操
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 王淑云
责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　**邮　　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 三河市金元印装有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 170mm×230mm　**印　　张:** 21.75　**字　　数:** 413 千字
版　　次: 2015 年 3 月第 1 版　**印　　次:** 2015 年 3 月第1次印刷
印　　数: 1～2500
定　　价: 39.00 元

产品编号:052086-01

前言

微积分是现代大学生(包括理工科学生以及部分文科学生)大学入学后的第一门课程,也是大学数学教育的一门重要的基础课程,其重要性已为大家所认可.但学生对这门课仍有恐惧感.对学生来说如何学好这门课,对教师来说如何教好这门课,都是广大师生关注的事情.众多微积分教材的出版,都是为了帮助学生更好地理解、学习这门课程,也为了教师更容易地教授这门课.本书的编写就是这么一次尝试.

一、微积分的发展史

以英国科学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼茨(Leibniz)在17世纪下半叶独立研究和完成的,现在被称为微积分基本定理的牛顿-莱布尼茨公式为标志,微积分的创立和发展已经历了三百多年的时间.但是微积分的思想可以追溯到公元前3世纪古希腊的阿基米德(Archimedes).他在研究一些关于面积、体积的几何问题时,所用的方法就隐含着近代积分学的思想.而微分学的基础——极限理论也早在公元前3世纪左右我国的庄周所著《庄子》一书的"天下篇"中就有记载,"一尺之棰,日取其半,万世不竭";在魏晋时期我国伟大的数学家刘徽在他的割圆术中提到的"割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣",都是朴素的、也是很典型的极限概念.利用割圆术,刘徽求出了圆周率$\pi=3.1416\cdots\cdots$的结果.

牛顿和莱布尼茨的伟大工作是把微分学的中心问题——切线问题和积分学的中心问题——求积问题联系起来.用这种划时代的联系所创立的微积分方法和手段,使得一些原本被认为是很难的天文学问题、物理学问题得到解决,展现了微积分的威力,推动了当时科学的发展.

尽管牛顿和莱布尼茨的理论在现在看来是正确的,但他们当时的工作是不完善的,尤其缺失数学分析的严密性.在一些基本概念上,例如"无穷"和"无穷小量"这些概念,他们的叙述十分含糊."无穷小量"有时是以零的形式,有时又以非零而是有限的小量出现在牛顿的著作中.同样,在莱布尼茨的著作中也有类似的混淆.这些缺陷,导致了越来越多的悖论和谬论的出现,引发了微积分的危机.

在随后的几百年中，许多数学家为微积分理论做出了奠基性的工作，其中有：

捷克的数学家和哲学家波尔查诺(Bolzano)(1781—1848 年)，著有《无穷的悖论》，提出了级数收敛的概念，并对极限、连续和变量有了较深入的了解.

法国数学家柯西(Cauchy)(1789—1857 年)，著有《分析教程》、《无穷小分析教程概论》和《微积分在几何上的应用》，"柯西极限存在准则"给微积分奠定了严密的基础，创立了极限理论.

德国数学家维尔斯特拉斯(Weierstrass)(1815—1897 年)，引进"ε-δ"、"ε-N"语言，在数学上"严格"定义了"极限"和"连续"，逻辑地构造了实数理论，系统建立了数学分析的基础.

在微积分理论的发展之路上，还有一些数学家必须提到，他们是黎曼(Riemann)、欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、阿贝尔(Abel)、戴德金(Dedekind)、康托尔(Cantor)，等等，他们的名字将在我们的教材中一次又一次地被提到.

我们在教材中呈现的是经过许多数学家不断完善、发展的微积分体系.

二、我们的教材

教材的编写与教学目的是紧密相关的. 微积分的教学目的主要为：

工具与方法　微积分是近代自然科学与工程技术的基础，其工具与方法属性是毋庸置疑的. 物理、化学、生物、力学等，很少有学科不用到微积分的概念、思想方法与手段. 即便是在许多人文社会科学中，也会用到微积分知识.

语言功能　"数学教学也就是数学语言的教学." 这是俄罗斯学者斯托利亚尔说过的. 其实这里说的数学语言，不仅仅指的是数学上用到的语言，还指科学上用到的语言. 科学知识的获取、发展及表述都需要一套语言，而数学语言是应用最广的一种科学语言. 微积分中所用到的语言，包括"ε-δ"、"ε-N"语言，是最重要的数学语言之一. 因此数学语言的学习也是微积分课程的教学内容.

培养理性思维　理性思维方法是处理科学问题所必需的一种思维方法. 微积分理论中处处闪耀着历史上一代又一代数学大师们理性思维的光芒，我们力图在教材中向学生展现这些理性思维的光芒，以激发学生理性思维的潜能. 同时注重理性思维训练，使学生在微积分的学习过程中有机会逐步理解、掌握解决数学以及相关科学问题的逻辑思维方法.

实践过程　从微积分的发展历史可以发现，从阿基米德、刘徽的朴素微积分思想，到牛顿和莱布尼茨的微积分基本定理，再到"实数系—极限论—微积分"体系的建立，正好是一门学科从萌芽到初步建立再到完善的过程. 任何一门科学的产生都沿袭这个过程. 微积分是学生第一次完整地经历这一过程，而这种经历对

每个学生来说也是难得的.微积分的学习就是一次实践过程,让学生体会、学习如何建立一门科学,在创建的过程中会遇到什么问题,如何去解决那些乍一看似乎解决不了的问题(例如"柯西极限存在准则"成功解决了数列或函数极限不存在的问题,而这个问题用极限的定义是无法解决的;实数理论解决了实数在实数轴上的完备性问题).尽管微积分是一门已经成熟的课程,我们几乎不可能有创新的机会,但是通过建立微积分理论体系的实践,可以培养学生创新的能力.一旦有机会,他们会在各自的工作中提出自己的理论,并会完善自己的理论.就像儿时的搭积木对培养建筑师的重要性一样.

随着计算机和软件技术的日益发展,微积分中的一些计算工作,例如求导数、求积分等的重要性日渐减弱,而微积分的语言功能和实践过程却越来越重要.对于非数学专业的理工科学生来说,原来的微积分教材太注重微积分的工具功能,而数学专业的数学分析教材又太注重细节,学时太长,因此我们编写了现在的教材.

在本教材中,我们在不影响总学时的情况下,适当加强了极限理论的内容和训练,为学生进一步学好微积分理论打下坚实的基础.同时,将确界原理作为平台(基本假设),给出了关于实数完备性的几个基本定理,使之满足微积分体系的需要.而对于初学学生不容易理解和掌握的内容,如有限覆盖定理等,则不作过多的论述与要求,从而避免冗长的论证和过于学究化的深究.我们比较详细地介绍了积分理论,证明了一元函数可积的等价定理以及二重积分的可积性定理,得到了只要函数"比较好"(函数的间断点为零长度集(一元函数定积分)或零面积集(二元函数的二重积分)),积分区域边界也"比较好"(积分区域边界为零面积集(二元函数的二重积分)),一元函数定积分(二元函数的二重积分)一定存在.至于三重积分和曲线、曲面积分,我们采取了简化的方法,没有探究细节.

我们将常微分方程的内容放到上册,以便于其他学科(比如物理学)的学习.而级数则放到本书的最后.作为函数项级数的应用,我们在本书的最后证明了常微分方程初值问题解的存在唯一性定理.

微积分教材的理性与直观的关系一直是比较难处理的问题.过多地强调理性,可能会失去微积分本来的意图;而过多地强调直观,又会使这么优秀的大学生失去了一次难得的理性思维训练,这种训练是高层次人才所必须经历的,而且我们的学生也非常愿意接受这种训练.与国外的微积分教材比较强调直观相比,我们兼顾了数学的理性思维训练.与国内的微积分教材相比,我们结合了学生的实际情况(学习能力强,学习热情高),适当地加强了教材与习题的难度,并考虑到理工科学生的背景,加强了应用.

本教材作为讲义已经在清华大学的很多院系使用过数次.上册与下册的基本内容分别使用 75 学时讲授,各辅以 20～25 学时的习题课.

本书是根据编者在清华大学微积分课程的讲义整理而成的. 上册主要由刘智新编写,下册主要由章纪民编写,教材中的习题主要由北京邮电大学闫浩编写. 在编写的过程中,得到了"清华大学'985 工程'三期人才培养项目"的资助和清华大学数学科学系领导的关心与帮助. 编者的同事苏宁、姚家燕、郭玉霞、扈志明、杨利军、崔建莲、梁恒等老师在本书的编写过程中也给予了很多帮助和关心,借此机会,向他们一一致谢.

三、关于微积分的学习

我们的学生经过小学、中学的数学学习,已经有一定的数学基础和技能,但是面对微积分这门严谨和理性的课程,多少都会有一些不适应. 对学生而言,毅力和坚持是唯一的途径. 对教师而言,耐心和细致也是必要的前提. 任何教材都只是知识的载体,缺少了学生的毅力和教师的耐心,学好微积分是不可能的.

祝同学们学习进步!

编　者

2014 年 7 月于清华园

目录

第1章　多元函数及其微分学

上册我们主要讨论一元函数的微分与积分，从这一章起，我们将研究多元函数的微分与积分.

本章是对多元函数讨论的第1章，涉及的内容有：

n 维 Euclid 空间；

多元函数（多元向量值函数）的定义、极限、连续性和可微性；

全微分、偏导数和方向导数的概念及计算；

隐函数（隐向量值函数）、参数函数（参数向量值函数）和反函数（反向量值函数）的存在性、光滑性及其微分；

微分的应用，其中包括微分的几何应用：曲面的切平面与法线、曲线的切线与法平面、Taylor 公式、极值与条件极值问题.

对多元函数的研究，可以看成是对一元函数研究的推广，而这些推广的基础是对实轴上的距离（实轴上两点 x,y 间的距离在上册用绝对值 $|x-y|$ 表示）的推广（推广到 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 间的 **Euclid 距离** $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$）. 在推广过程中，我们可以看到有些一元函数微分学的概念可以在多元函数中推广，比如：极限、连续、可微；而另外一些概念在多元函数微分学中没有相应的推广，比如：一元函数导数的概念.

$\mathbb{R}^n$ 是 n 元函数定义域所在的空间，所以我们首先讨论 n 维空间 $\mathbb{R}^n$.

1.1　n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

这里要讨论的 ***n* 维（实）空间** $\mathbb{R}^n$ 为集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

先定义 $\mathbb{R}^n$ 中两种运算：

（1）**加法运算**：$\mathbb{R}^n$ 中的两个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的加法运算为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n).$$

(2) **数乘运算**：$\mathbb{R}^n$ 中的一个元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与实数λ的数乘运算为

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

容易验证，集合$\mathbb{R}^n$关于上述的加法运算与数乘运算在实数域上构成一个线性空间，其维数为n.

因此$\mathbb{R}^n$中的一个元素既可称为$\mathbb{R}^n$中的一个**点**，也可称为$\mathbb{R}^n$中的一个**向量**. $\mathbb{R}^n$中的点(向量)通常也用$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$等表示.

1.1.1 *n* 维 Euclid 空间

在上册书中，当自变量x趋于实数a时，一元函数$f(x)$以实数A为极限(即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$)的定义为

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall x:0<|x-a|<\delta,\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

也就是函数值$f(x)$与实数A要多“接近”就可以多“接近”，只要自变量x与实数a足够“接近”. $|x-a|$与$|f(x)-A|$是刻画x与a以及$f(x)$与A的“接近”程度的两个量，也就是直线上x点与a点以及$f(x)$与A的距离.

同样，在$\mathbb{R}^n$中我们也需要一个量来刻画两点$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的“接近”程度，这就是$\mathbb{R}^n$中的距离. $\mathbb{R}^n$中最常见的距离是 Euclid 距离$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$.

定义 1.1.1 ……………………………………………………………………

设$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，它们之间的 **Euclid 距离**$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$定义为

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

在不会引起混淆的情况下，我们省略$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的距离$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|_n$中的下标“$n$”.

容易证明，$\mathbb{R}^n$中的上述距离满足以下性质：

(1) **正定性**：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|\geqslant 0$，当且仅当$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$时，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|=0$；

(2) **对称性**：$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|=\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\|$；

(3) **三角不等式**：$\forall\boldsymbol{Z}\in\mathbb{R}^n$，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|\leqslant\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}\|+\|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}\|$.

显然，绝对值$|x-y|$就是当$n=1$时实数轴$\mathbb{R}^1$上两点x,y之间的 Euclid 距离.

带有 Euclid 距离的n维线性空间$\mathbb{R}^n$称为 **n 维 Euclid 空间**.

1.1.2 *n* 维 Euclid 空间中的开集与闭集

n维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$中的距离可以导出$\mathbb{R}^n$中一点的邻域的概念.

定义 1.1.2 ……………………………………………………

设 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，集合

$$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$

称为 $\boldsymbol{X}_0$ 点的**$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**. 集合

$$B^\circ(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid 0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$$

称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 的**去心$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

$n=1$ 时，$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$就是以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心，两边各取长度 δ 的开区间$(\boldsymbol{X}_0-\delta,\boldsymbol{X}_0+\delta)$；

$n=2,3$ 时，$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$分别为以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心，半径为 δ 的圆域和球域(不包含边界).

在邻域的基础上，我们有下列基本概念：

定义 1.1.3 ……………………………………………………

(1) **内点**：集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，点 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$. 如果存在 $\delta>0$，使得 $\boldsymbol{X}_0$ 的某个邻域 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)\subset\Omega$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 是集合 Ω 的一个内点.

(2) **边界点**：集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，点 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$. 如果对于任意 $\delta>0$，同时满足

$$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap\Omega\neq\varnothing,\quad B(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap(\mathbb{R}^n\backslash\Omega)\neq\varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 Ω 的一个边界点，其中$\mathbb{R}^n\backslash\Omega=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{X}\notin\Omega\}$为集合 Ω 的**余集**.

(3) **开集**：若集合 Ω 中的每一点均为内点，则称 Ω 为开集.

(4) **闭集**：若集合 Ω 的余集$\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ 为开集，则称 Ω 为闭集.

(5) **内部**：由集合 Ω 的所有内点构成的集合称为 Ω 的内部，记作 $\mathring{\Omega}$.

(6) **边界**：由集合 Ω 的所有边界点构成的集合称为 Ω 的边界，记作$\partial\Omega$.

(7) **闭包**：集合 Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 为：$\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

在$\mathbb{R}^n$ 中有两个特殊的集合：全集$\mathbb{R}^n$ 和空集$\varnothing$，它们既是开集也是闭集.

对于任意的集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，可以证明 Ω 的内部 $\mathring{\Omega}$ 是开集，Ω 的闭包 $\bar{\Omega}$ 是闭集.

从上述基本概念还可推出下列性质：

(1) 任意多个开集之并为开集；有限个开集之交为开集.

(2) 任意多个闭集之交为闭集；有限个闭集之并为闭集.

▶ **例 1.1.1** ……………………………………………………

$\forall\,\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$和 $B^\circ(\boldsymbol{X}_0,\delta)$均为开集，其边界为

$$\partial B(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|=\delta\},$$

$$\partial B^\circ(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|=\delta\}\cup\{\boldsymbol{X}_0\},$$

其内部为各自集合本身，其闭包均为

$$\bar{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\overline{B^\circ}(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|\leqslant\delta\}.$$

与$\mathbb{R}^1$中的集合一样,集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$,若存在实数$M>0$,使得$\forall \boldsymbol{X}\in\Omega$,$\|\boldsymbol{X}\|\leqslant M$,则称$\Omega$为**有界集合**. 例 1.1.1 中的集合$B(\boldsymbol{X}_0,\delta)$,$B^\circ(\boldsymbol{X}_0,\delta)$,$\bar{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)$均为有界集合,其中$\bar{B}(\boldsymbol{X}_0,\delta)$为**有界闭集**.

1.1.3　$\mathbb{R}^n$ 中集合的连通性

设集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$,我们很关心集合$\Omega$是不是连成一片的,在数学上,这就是集合连通性的概念. 下面是最简单的一种连通定义: **道路连通**.

定义 1.1.4 ……………………………………

集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$称为(道路)**连通**的,如果对于任意的两点$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\Omega$,均有一条完全属于$\Omega$的折线段将两点连接起来; 否则,$\Omega$叫做**非**(道路)**连通集**. 例如图 1.1.1.

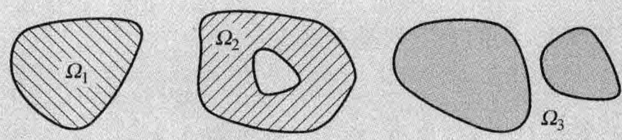


图 1.1.1　Ω_1,Ω_2是连通集,Ω_3是非连通集

定义 1.1.5 ……………………………………

$\mathbb{R}^n$中非空的连通开集称为**开区域**,开区域的闭包称为**闭区域**.

例 1.1.2 ……………………………………

$D=\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$是$\mathbb{R}^2$中的一个开区域;

$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$是$\mathbb{R}^3$中的一个闭区域.

1.1.4　$\mathbb{R}^n$ 中的点列,点列的收敛性以及收敛点列的性质

设$\boldsymbol{X}_k=(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)})\in\mathbb{R}^n$,$k=1,2,\cdots$,则$\{\boldsymbol{X}_k\}_{k=1}^{+\infty}$称为$\mathbb{R}^n$中的一个**点列**. 点列通常也记作$\{\boldsymbol{X}_k\}$.

定义 1.1.6 ……………………………………

点$\boldsymbol{A}=(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)})\in\mathbb{R}^n$,点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$**收敛于**$\boldsymbol{A}$,即$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$,指的是

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}^+,\quad \forall k\in\mathbb{N}^+:k>N,\quad \|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon.$$

当$n=1$时,定义 1.1.6 与实数列的收敛定义是一致的.

定理 1.1.1 ……………………………………

$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$的充分必要条件是$\lim\limits_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)}$,$i=1,2,\cdots,n$.

证明 显然有不等式

$$\begin{aligned}&\max\{|x_k^{(1)}-a^{(1)}|,|x_k^{(2)}-a^{(2)}|,\cdots,|x_k^{(n)}-a^{(n)}|\}\\ &\leqslant \|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k^{(i)}-a^{(i)})^2} \qquad (1.1.1)\\ &\leqslant |x_k^{(1)}-a^{(1)}|+|x_k^{(2)}-a^{(2)}|+\cdots+|x_k^{(n)}-a^{(n)}|.\end{aligned}$$

如果$\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}$,则由不等式(1.1.1)可知:$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+:k>N$,

$$\max\{|x_k^{(1)}-a^{(1)}|,|x_k^{(2)}-a^{(2)}|,\cdots,|x_k^{(n)}-a^{(n)}|\}<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

反之,如果

$$\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+:k>N_i,\quad |x_k^{(i)}-a^{(i)}|<\frac{\varepsilon}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由不等式(1.1.1)可知,

$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\}\in\mathbb{N}^+,\forall k\in\mathbb{N}^+:k>N,\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{A}\|<\varepsilon$,即

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{A}.$$

上述定理告诉我们,点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$收敛到$\boldsymbol{A}$ 等价与$\{\boldsymbol{X}_k\}$的 n 个分量构成的 n 个实数列$\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}(i=1,2,\cdots,n)$分别收敛到$\boldsymbol{A}$ 的相应分量. 例如:

$$\boldsymbol{X}_k=\left(1+\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{R}^2,\quad \lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{X}_k=(1,1).$$

与$\mathbb{R}^1$ 一样,我们可以定义$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列:

定义 1.1.7 ……………………………………

设$\{\boldsymbol{X}_k\}$为$\mathbb{R}^n$ 中的点列,如果

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}^+,\quad \forall l,m\in\mathbb{N}^+:l,m>N,\quad \|\boldsymbol{X}_l-\boldsymbol{X}_m\|<\varepsilon,$$

则称$\{\boldsymbol{X}_k\}$为$\mathbb{R}^n$ 中 **Cauchy 序列**.

容易证明,$\mathbb{R}^n$ 中的点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$为 Cauchy 序列的充分必要条件是$\{\boldsymbol{X}_k\}$的 n 个分量构成的 n 个实数列$\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}(i=1,2,\cdots,n)$均为 Cauchy 数列,因此有

定理 1.1.2 ……………………………………

$\mathbb{R}^n$ 是**完备的**,即$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列必收敛于$\mathbb{R}^n$ 中的点.