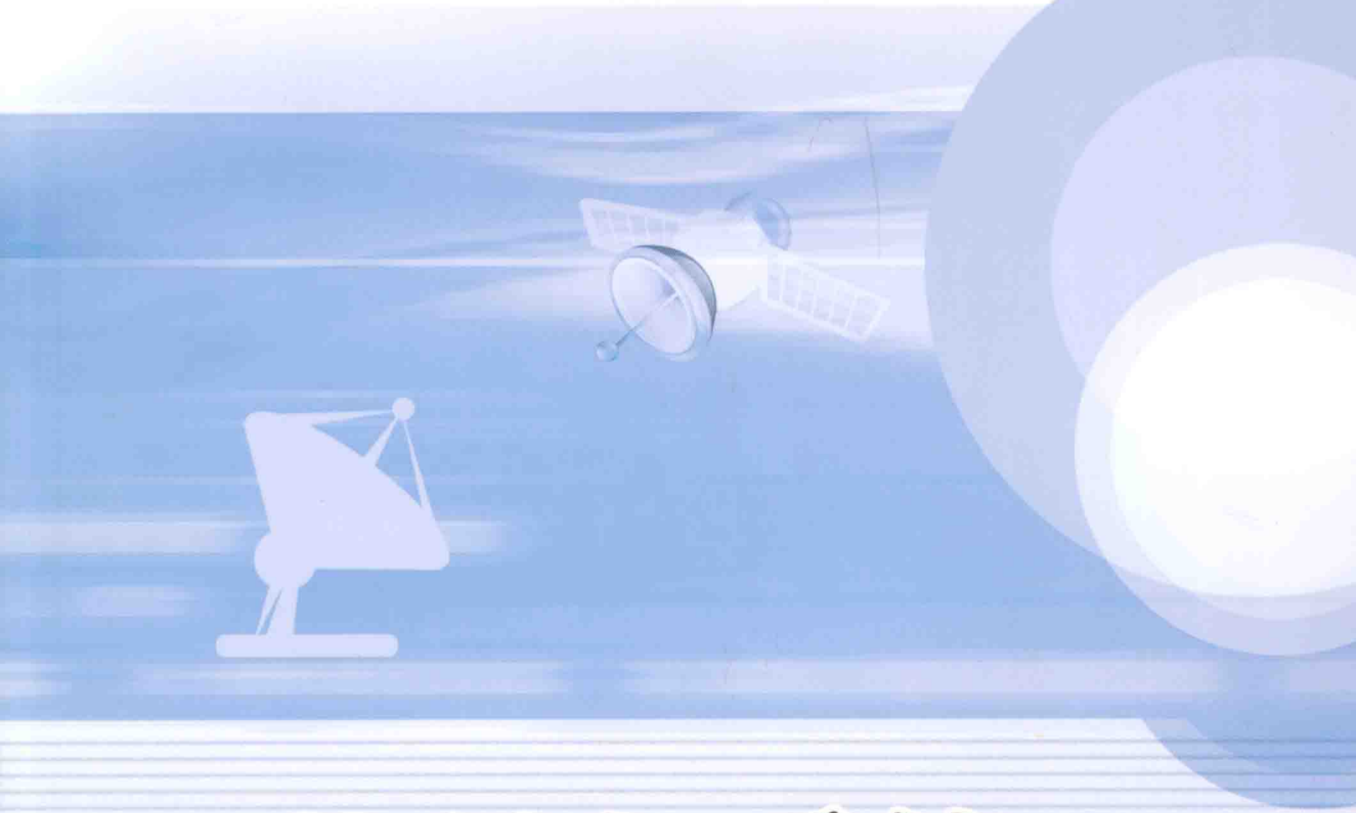
普通高等教育“十二五”规划教材



信号与系统

崔畅　赵强　佟慧艳　主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

普通高等教育“十二五”规划教材

信号与系统

崔畅　赵强　佟慧艳　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书主要研究线性时不变系统传输与处理确定性信号方面的基本概念和基本分析方法。全书共分为6章，主要内容包括信号与系统概述；连续时间信号与系统的时域、频域和复频域分析；离散时间信号与系统的时域和 z 域分析。

本书适合于渗透式双语教学。书中章节标题、重要的技术术语、概念等内容均采用中英文双语形式，例题、练习题几乎采用纯英文形式，使学生在学习本课程的同时，提高阅读本专业英文书籍和文献的能力。书中还引入 MATLAB 软件作为信号与系统分析的工具，加深学生对信号与系统基本原理、方法及应用的理解。

本书可作为高等学校电气信息类等相关专业本科生教材，也可作为从事相关领域工作的教师、科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统／崔畅，赵强，佟慧艳主编．—北京：中国石化出版社，2015.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5114-3061-8

Ⅰ.①信… Ⅱ.①崔… ②赵… ③佟… Ⅲ.①信号系统-高等学校-教材 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第277625号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 13.25印张 316千字
2015年1月第1版 2015年1月第1次印刷
定价：28.00元

前言(Preface)

信号与系统课程是电气信息类专业的一门重要技术基础课程，其中的概念和分析方法广泛应用于通信、自动控制、信号与信息处理、电路与系统等领域。

本书主要研究确定性信号和线性时不变系统的基本理论和方法，研究对象包括连续和离散时间信号与系统，研究方法包括时域分析和变换域分析，重点是变换域分析。本书按照先信号后系统，先连续后离散，先时域分析后变换域分析的顺序，对信号与系统的分析方法进行了全面地介绍。同时，根据教学实践中的经验与教学需要，对教材内容作了精心编排，以期能够更好地为高校信号与系统课程的教学服务。

本书内容深入浅出，通俗易懂。书中配有大量的例题和练习题，注重难点和重点的解释与分析。最重要的特点是适合于双语教学：章节标题、重要的技术术语、概念等内容均采用中英文双语形式，例题、练习题几乎采用纯英文形式，同时，在每章的最后还列出重要术语和概念的中英文对照表，使学生在学习专业知识的同时，增加本专业的英语词汇量，更好地与国际接轨，满足双语教学的需求。书中还引入 MATLAB 软件作为信号与系统分析的工具，将课程中的重点、难点用 MATLAB 进行形象、直观的可视化模拟与仿真实现，从而加深对信号与系统基本原理、方法及应用的理解。

本书共分为 6 章。第 1 章介绍了信号与系统的基本概念和基本理论；第 2~4 章着重讨论连续时间信号与系统的时域、频域和复频域分析；第 5 章和第 6 章分别研究了离散时间信号与系统的时域和 z 域分析。

本书由辽宁石油化工大学崔畅、赵强、佟慧艳主编，可作为高等学校电气信息类专业本科生教材，也可作为从事相关领域工作的教师、科技工作者的参考书。

由于时间及作者水平有限，书中难免有错误不当之处，恳请广大读者批评指正。

编者

目录(Contents)

第 1 章　信号与系统概述
(Introduction of Signals and Systems)

本章介绍信号与系统的基本概念和基本理论，是全书的基础。在信号方面概要介绍信号的描述、分类和基本变换，详细阐述了常用的典型信号、奇异信号的基本性质；在系统方面概要介绍了系统的概念和描述方法及系统的分类。

1.1　信息、信号和系统(Information, Signal and System)

“信号(signal)”一词在人们的日常生活与社会生活中有着广泛的含义。在掌握信号的概念之前先来了解一下消息和信息的概念。

消息(message)是表达客观物质运动和主观思维活动的状态，通常用语言、文字、图像、数据等来表达。例如，电话中的声音、电视中的图像、雷达探测到的目标距离等都是消息。

信息(information)则是消息中有意义的内容。在得到一个消息后，可能得到一定数量的信息。形式上传输消息，实质上传输信息；消息具体，信息抽象；消息是表达信息的工具，信息载荷在消息中，同一信息可用不同形式的消息来载荷；消息可能包含丰富的信息，也可能包含很少的信息。

消息的传送一般都不是直接的，必须借助于一定形式的信号才能进行远距离传输和各种处理。

信号就是运载消息的工具，是消息的载体，是带有信息的某种物理量，例如，电信号、光信号、声音信号等。这些物理量包含着信息，因此，信号可以是随时间变化或空间变化的物理量，在数学上可以用一个或几个独立变量(independent variable)的函数表示，也可以用曲线、图形等方式表示。

Signals are physical phenomena or physical quantities, which change with time or space. They can represented mathematically as functions of one or more independent variables.

在可以作为信号的诸多物理量中，电是应用最广的物理量。电易于产生和控制，传输速率快，也容易实现与非电量的相互转换。因此，本书主要对电信号(electrical signal)展开讨论。电信号通常是随时间变化的电压(voltage)或电流(current)。由于是随时间而变化的，在数学上常用时间 t 的函数来表示，所以本书中“信号(signal)”与“函数(function)”这两个名词常交替使用。

In this book, we focus our attention on signals involving a single independent variable. For convenience, we will generally refer to the independent variable as time, although it may not in fact represent time in specific applications.

系统(system)是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的、具有特定功能的整体。系统是由各个不同单元按照一定的方式组成并完成某种任务整体的总称。系统所完成的任务就是处理、传输和存储信号，以达到自然界、人类社会、生产设备按照对人类有利的规律运动的目的，故系统的组成、特性应由信息和信号决定。

A system is an interconnection of components (e. g. devices or processes) with terminals or access ports through which matter, energy, or information can be applied or extracted. It will often turn out to be more convenient to use the concept of the signal and the resulting response to describe the characteristics of a system. Actually, the system will sometimes only be known in terms of its response to given signals.

信号与系统是两个既相互联系又相互区别的研究对象。信号是运载信息的工具，系统是产生、传输和处理信号的客观实体。信号离开了系统就失去了存在的价值，系统没有信号的输入，也失去了作用。例如，电视信号与电视机的关系。

综上所述，信息、信号和系统是不可分割的整体。

1.2 信号的分类(Classification of Signals)

信号的分类方法有很多，可以从不同的角度对信号进行分类。例如，按实际用途可将信号划分为电视信号、雷达信号、控制信号、通信信号、广播信号等；在信号与系统分析中，按照信号所具有的时间特性可划分为确定性信号与随机信号、连续时间信号与离散时间信号、周期信号与非周期信号、能量信号与功率信号等。

1.2.1 确定性信号与随机信号(Deterministic and Random Signals)

确定性信号(deterministic signal)是对于指定的某一时刻 t，可确定相应的函数值 $f(t)$ 与之对应(有限个不连续点除外)。随机信号(random signal)具有未可预知的不确定性，不能以明确的数学表达式表示，只能知道该信号的统计特性。

A deterministic signal can be represented by distinct mathematical expressions, but a random signal cannot find a function to represent it.

两者的区分要点是：给定的自变量是否对应唯一且确定的信号取值。

本书只涉及确定性信号。

1.2.2 连续时间信号与离散时间信号(Continuous-time and Discrete-time Signals)

按照信号在时间轴上取值是否连续，可将信号分为连续时间信号与离散时间信号。连续时间信号(continuous-time signal)在其所研究的时间内，对任意时刻除若干个不连续点外都有定义。这里"连续"是指函数中的时间取值是连续的，而信号的幅值可连续，也可不连续。常用 $f(t)$ 表示，如图 1-1(a)所示。

The independent variables of continuous-time signals are continuous, thus these signals are defined for a continuum of values of the independent variables.

与连续时间信号相对应的是离散时间信号。离散时间信号(discrete-time signal)是指时间(其定义域是一个整数集)是离散的，只在某些不连续的时刻给出函数值，而在其他时间没有定义。常用 $x(n)$ 表示，如图 1-1(b)所示。

Discrete-time signals are defined only at discrete times, and consequently, for these signals, the independent variables take on only a discrete set of values.

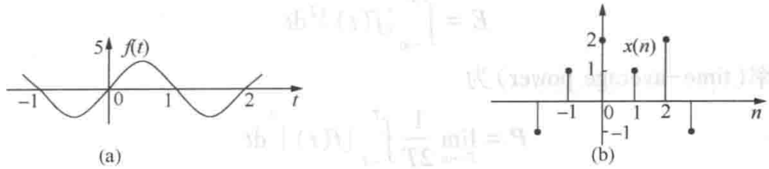


图 1-1 连续时间信号与离散时间信号波形

连续时间信号与离散时间信号的区分要点在于信号的时间是否连续，而不在于幅值是否连续。

对于连续时间信号：幅值连续的称为模拟信号(analog signal)；幅值离散的称为脉冲信号(pulse signal)。

对于离散时间信号：幅值连续的称为抽样信号(sampling signal)；幅值离散的称为数字信号(digital signal)。

1.2.3 周期信号与非周期信号(Periodic and Aperiodic Signals)

周期信号(periodic signal)是定义在区间(−∞，+∞)上，且每隔一个固定的时间间隔波形重复变化。连续周期信号与离散周期信号的数学表达式分别为

$$f(t)=f(t+mT) \quad m=\pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1-1}$$

$$x(n)=x(n+mN) \quad (n \text{ 取整数}) \tag{1-2}$$

满足以上两式中的最小正数 T 和 N 分别称为周期信号的基本周期。

For a continuous-time signal $f(t)$, if $f(t)=f(t+mT)$ for all values of t, for a discrete-time signal $x(n)$, if $x(n)=x(n+mN)$ for all values of n, in this case, we say that $f(t)$ [$x(n)$] is periodic with period $T(N)$.

如果两个周期信号的周期之比为有理数(rational number)，则它们的和仍然是一个周期信号，其周期为两者周期的最小公倍数(the lowest common multiple)，否则为非周期信号。非周期信号(aperiodic signal)就是不具有重复性的信号。

Example 1-1: Determine whether or not each of the following signals is periodic:

① $a\sin t-b\sin 5t$ ② $a\sin t-b\sin \pi t$

Solution: ① For $a\sin t-b\sin 5t$, this is a complex signal, and $T_1=2\pi$, $T_2=2\pi/5$. In this case, both T_1 and T_2 are rational, the lowest common multiple of T_1 and T_2 is 2π. So, the signal is a periodic signal, and the period is $T=2\pi$.

② For the signal $a\sin t-b\sin \pi t$, $T_1=2\pi$, $T_2=2$, $T_1 : T_2=\pi$, the ratio is an irrational, thus the signal is aperiodic.

在复合信号中，分量周期(或频率)的比为无理数，则该复合信号称为概周期信号，概周期信号是非周期信号。

1.2.4 能量信号与功率信号(Energy and Power Signals)

按照信号的可积性(integrability)划分，信号可以分为能量信号(energy signal)和功率信号(power signal)。

信号可看成是随时间变化的电压或电流，如信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$，则在时间区间(−∞，+∞)所耗的总能量(total energy)为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

其平均功率(time-average power)为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

能量信号是指能量有限($0<E<\infty$)的信号。因能量 E 有界，所以当 $T\to\infty$ 时，$P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=0$，表明能量信号平均功率为零。如单个矩形脉冲信号为能量信号，其平均功率为零，只能从能量的角度去考察。

The signals with finite total energy must have zero average power. An example of a finite-energy signal is a signal that takes on the value 1 for $0\leqslant t\leqslant 1$ and 0 otherwise. In this case, $E=1$ and $P=0$.

功率信号是指功率有限($0<P<\infty$)的信号，因功率 P 有限，故当 $T\to\infty$ 时，$E=\lim\limits_{T\to\infty}2T\cdot P=\infty$，表明功率信号能量无限。如周期信号、阶跃信号是功率信号，它们的能量为无限，只能从功率的角度去考察。

The signals with finite average power must have infinite energy. Of course this is meaningful, since if there is a nonzero average power per unit time, then integrating this over an infinite time interval yields an infinite amount of energy.

注意，一个信号不可能既是能量信号又是功率信号，但却有少数信号既不是能量信号也不是功率信号。如单位斜坡信号为非功率、非能量信号，它是持续时间无限、幅值也无限的非周期信号。

There are also signals for which neither total energy nor average power are finite. A simple example is the ramp signal.

With these definitions, we can identify three important classes of signals: energy signals, power signals, signals with neither finite energy nor finite power.

1.3 基本的连续时间信号(Basic Continuous-time Signals)

本节介绍几种重要的连续时间信号，这些信号在后续的课程中经常用到。在实际应用中，复杂信号可由这些基本的信号组合而成，并且这些信号对线性系统所产生的响应对分析系统和了解系统的性质起着主导作用，具有普遍意义。

In this section, we introduce several basic continuous-time signals. Not only do these signals occur frequently, but they also serve as basic building blocks from which we can construct many other signals.

1.3.1 实指数信号(Real Exponential Signal)

实指数信号的数学表达式为

$$f(t)=C\mathrm{e}^{at} \tag{1-5}$$

式中 C 和 a 均为实数，根据 a 的不同取值，有以下三种情况：若 $a>0$，则指数信号幅度随时间增长而增长；若 $a<0$，则指数信号幅度随时间增长而衰减；在 $a=0$ 的特殊情况下，信号不随时间变化，成为直流信号。

Depending upon the values of these parameters, the real exponential signal can exhibit several different characteristics. If $a>0$, it's waveform is growing. If $a<0$, it's waveform is decaying. When $a=0$, it is a direct current signal.

实指数信号的波形如图 1-2 所示。

根据连续时间变量 t 的取值范围，信号 $f(t)$ 又可分为双边信号(bilateral signal)($-\infty<t<\infty$, $t\in\mathbf{R}$)、单边信号(unilateral signal)($-\infty<t<t_1$ 或 $t_2<t<\infty$)和时限信号(time-limited signal)($t_1\leqslant t\leqslant t_2$)，信号 $f(t)$ 在所对应的区间上有非零确定值。单边信号又分为左边信号(left-sided signal)和右边信号(right-sided signal)。若 $f(t)$ 在 $-\infty<t<t_1$ 区间上为0，则称为右边信号(若 $t_1=0$，该右边信号称为因果信号(causal signal))；若信号 $f(t)$ 在 $t_2<t<\infty$ 区间上为0，则称为左边信号。

在实际中遇到较多的因果指数衰减信号(causal decaying exponential signal)，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}Ce^{at}, & t\geqslant 0,\ a<0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1-6}$$

波形如图 1-3 所示。

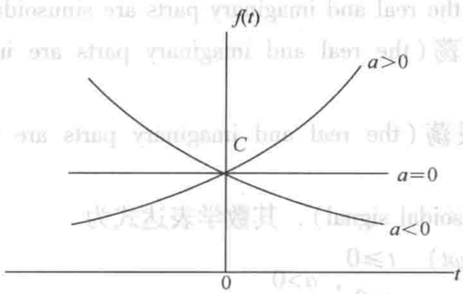


图 1-2　实指数信号

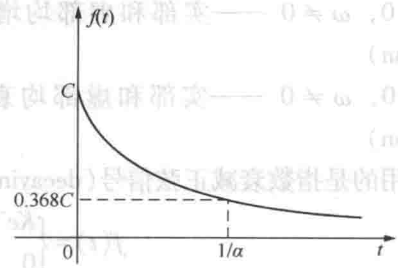


图 1-3　因果指数衰减信号

1.3.2　正弦信号(Sinusoidal Signal)

正弦信号和余弦信号两者仅在相位上相差$\frac{\pi}{2}$，通常统称为正弦信号，其数学表达式为

$$f(t)=K\sin(\omega t+\theta) \tag{1-7}$$

式中 K 为振幅，ω 为角频率，θ 为初始相位。波形如图 1-4 所示。

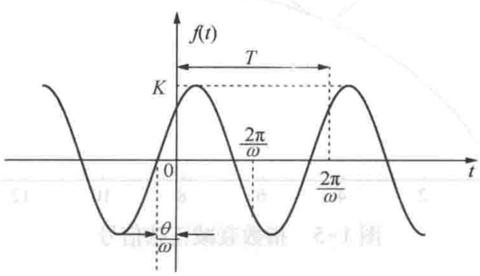


图 1-4　正弦信号

1.3.3 复指数信号(Complex Exponential Signal)

$$f(t)=Ke^{st} \tag{1-8}$$

式中 $s=\sigma+j\omega$ 为复数，K 一般为实数。利用欧拉公式(Euler formula)

$$\begin{cases} e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t \end{cases}$$

可将式(1-8)展开，得

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{\sigma t}\cdot e^{+j\omega t}=(Ke^{\sigma t}\cos\omega t)+j(Ke^{\sigma t}\sin\omega t) \tag{1-9}$$

式(1-9)表明，一个复指数信号可分解为实部和虚部两部分。实部(real part)、虚部(imaginary part)都是幅度按指数规律变化的正弦信号。

实指数信号、正弦信号都可由复指数信号导出。根据 σ 和 ω 的不同取值，可得到如下几种信号形式：

$\sigma=0$，$\omega=0$ ——直流信号(constant)

$\sigma>0$，$\omega=0$ ——升指数信号(growing exponential)

$\sigma<0$，$\omega=0$ ——衰减指数信号(decaying exponential)

$\sigma=0$，$\omega\neq0$ ——实部和虚部均等幅振荡(the real and imaginary parts are sinusoidal)

$\sigma>0$，$\omega\neq0$ ——实部和虚部均增幅振荡(the real and imaginary parts are increasing oscillation)

$\sigma<0$，$\omega\neq0$ ——实部和虚部均衰减振荡(the real and imaginary parts are decaying oscillation)

常用的是指数衰减正弦信号(decaying sinusoidal signal)，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases} Ke^{-at}\sin(\omega t) & t\geqslant0 \\ 0 & t<0 \end{cases},\quad a>0$$

波形如图 1-5 所示。

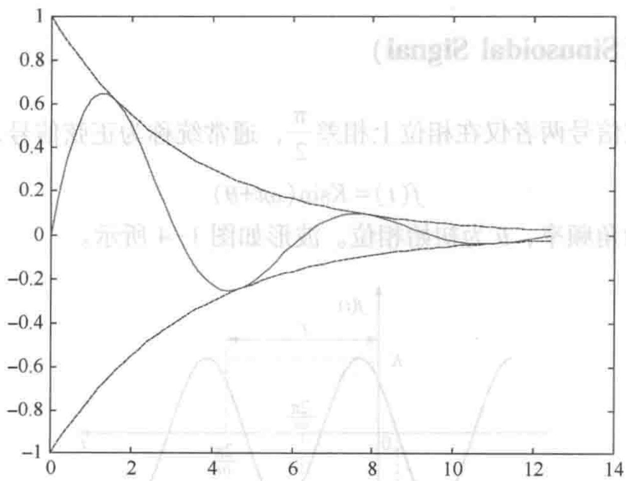


图 1-5 指数衰减正弦信号

1.3.4 抽样信号(Sampling Signal)

Sampling signal plays a veryimportant role in Fourier analysis and in the study of LTI systems. The sampling signal, which is defined as

$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{1-10}$$

抽样信号具有以下性质:

① $t=0$ 时，借助于罗彼塔法则求得 $Sa(0)=\frac{(\sin t)'}{t'}\Big|_{t=0}=\frac{\cos t}{1}\Big|_{t=0}=1$;

② $t\neq 0$ 时，随着 t 的绝对值的增大，函数值的绝对值振荡着不断减小，向 0 趋近;

③ 在 $t=n\pi(n\in Z,\ n\neq 0)$ 点处，函数值为 0;

④ 该函数是偶函数，即 $Sa(-t)=Sa(t)$;

⑤ $\int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)\,\mathrm{d}t=\pi$，$\int_{-\infty}^{0}Sa(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}Sa(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$;

⑥ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}Sa(t)=0$。

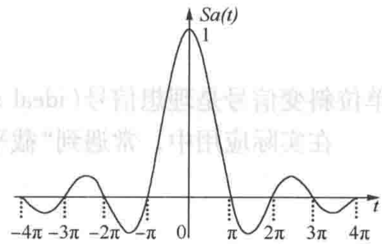


图 1-6 抽样信号

抽样信号的波形如图 1-6 所示。

以相邻两个过零点为端点的区间称为过零区间(zero crossing interval)。由图 1-6 中可以看出原点附近的过零区间宽度为 2π，其他过零区间宽度均为 π。

1.3.5 高斯信号(Gauss Signal)

高斯信号也称钟形脉冲信号，波形如图 1-7 所示，定义为

$$f(t)=E\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \tag{1-11}$$

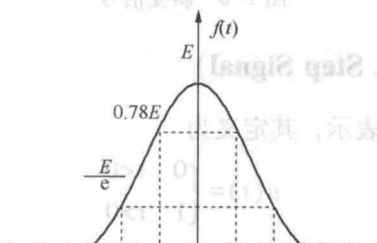


图 1-7 高斯信号

令 $t=\frac{\tau}{2}$，代人函数式求得

$$f\left(\frac{\tau}{2}\right)=E\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\approx 0.78E \tag{1-12}$$

函数式中的参数 τ 是当 $f(t)$ 由最大值 E 下降为 $0.78E$ 时所占据的时间宽度。高斯信号最重要的性质是其傅里叶变换也是高斯信号，这在信号分析中占有重要地位。

The most important characteristic of the Gauss signal is that its Fourier transform is still Gauss signal, which plays an important role in signal analysis.

下面介绍另一类基本信号——奇异信号(singular signal)，这类信号的数学表达式属于奇

异函数(singular function)，即函数本身或其导数或高阶导数出现奇异值(singular value)(趋于无穷)。

1.3.6 单位斜变(斜坡)信号(Unit Ramp Signal)

斜变信号指从某一时刻开始随时间正比例增长的信号，如果增长的变化率为1，则称为单位斜变信号。

The ramp signal, which is a signal with time proportional growth, is an ideal signal. If the growth rate is 1, then it is called the unit ramp signal.

通常用符号$R(t)$表示，其数学表达式为

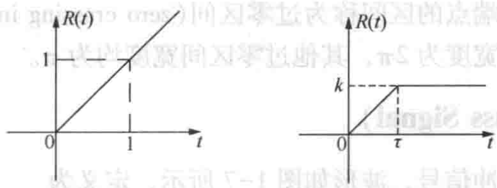
$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{1-13}$$

单位斜变信号是理想信号(ideal signal)，是不可实现的。其信号波形如图1-8(a)所示。

在实际应用中，常遇到“截平”的信号，其表达式为

$$R(t)=\begin{cases}\dfrac{k}{\tau}t & (t<\tau)\\ k & (t\geqslant\tau)\end{cases} \tag{1-14}$$

截平信号(truncated signal)波形如图1-8(b)所示。



(a) 单位斜变信号　　(b) 截平的斜变信号

图1-8　斜变信号

1.3.7 单位阶跃信号(Unit Step Signal)

单位阶跃信号以符号$u(t)$表示，其定义为

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{1-15}$$

波形如图1-9(a)所示。单位阶跃信号$u(t)$在$t=0$处存在间断点，在此点$u(t)$没有定义。

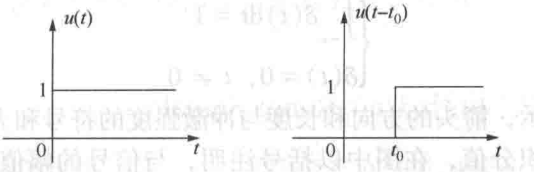
Obviously, there is a discontinuous point at $t=0$. As same as the complex exponential signal, the unit step signal will be very important in our examination of the properties of systems.

单位阶跃信号也可以延时任意时刻t_0，以符号$u(t-t_0)$表示，其表达式为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases} \tag{1-16}$$

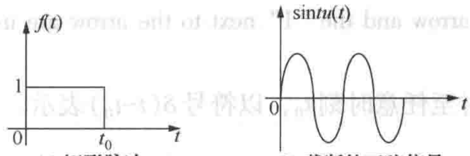
对应的波形如图1-9(b)所示。

阶跃信号鲜明地表现出信号的单边特性，即信号在某接入时刻t_0以前的幅度为零。利用这一特性可以较方便地以数学表达式描述各种信号的接入特性。例如，用阶跃信号表示矩形脉冲以及对正弦信号的截断，如图1-10所示。其中$f(t)=u(t)-u(t-t_0)$。



(a) 单位阶跃信号　　(b) 带延时的单位阶跃信号

图 1-9　单位阶跃信号



(a) 矩形脉冲　　(b) 截断的正弦信号

图 1-10　截断信号

The relationship between the unit step signal andthe unit ramp signal:

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = u(t) \quad \text{—— first derivative} \tag{1-17}$$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{—— running integral} \tag{1-18}$$

The unit ramp signal is also represented as $R(t) = tu(t)$.

1.3.8　符号函数(Sign Signal)

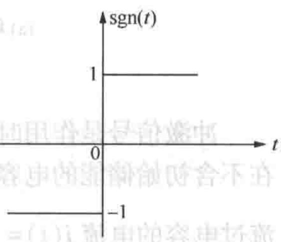


图 1-11　符号函数

符号函数的数学表达式为

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \tag{1-19}$$

与阶跃信号类似，符号函数在跳变点可不予定义。其波形如图 1-11 所示。

显然，阶跃信号可用来表示符号函数，即

$$\mathrm{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \text{ 或 } \mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \tag{1-20}$$

1.3.9　单位冲激信号(Unit Impulse Signal)

某些物理现象需要用一个持续时间无穷短而取值无穷大，但对时间的积分值为有限值的函数模型来描述。例如，电学中的雷击电闪，数字通信中的抽样脉冲，力学中瞬间作用的冲击力等。

The unit impulse function is quite useful in theanalysis of the signals and systems. The unit impulse signal is denoted as $\delta(t)$ and can be defined on many ways.

(1) 冲激信号的定义(Definition of the Impulse Signal)

冲激信号可以有不同的定义方式，例如，由矩形脉冲、三角形脉冲演变为冲激函数，还可利用指数函数、钟形函数、抽样函数、狄拉克(Dirac)函数来定义。

单位冲激信号的狄拉克(Dirac)定义为

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0,\ t \neq 0\end{cases} \tag{1-21}$$

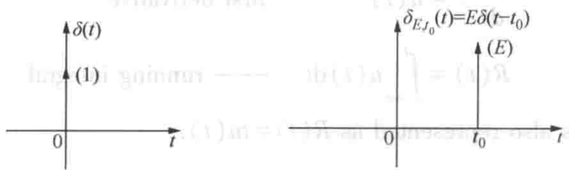
冲激信号用箭头表示，箭头的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致，其冲激强度就是冲激信号对时间的定积分值，在图中以括号注明，与信号的幅值相区分，如图 1-12(a)所示。

Since $\delta(t)$ has, in effect, no duration but unit area, we adopt the graphical notation for it shown in Figure 1-12(a), where the arrow at $t=0$ indicates that the area of the pulse is concentrated at $t=0$ and the height of the arrow and the "1" next to the arrow are used to represented the area of the impulse.

单位冲激信号可以延时至任意时刻 t_0，以符号 $\delta(t-t_0)$ 表示。冲激点在 t_0、冲激强度为 E 的冲激信号 δ_{E,t_0} 定义为

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{E,\ t_0}(t)\,\mathrm{d}t = E \\ \delta_{E,\ t_0}(t) = 0,\ (t \neq t_0)\end{cases} \tag{1-22}$$

波形如图 1-12(b)所示。



(a) 单位冲激信号　　(b) 冲激点在 t_0、冲激强度为 E 的冲激信号 δ_{E,t_0}

图 1-12　冲激信号

冲激信号是作用时间极短，但取值极大的一类信号的数学模型。例如，单位阶跃信号加在不含初始储能的电容两端，t 从 0^- 到 0^+ 的极短时刻，电容两端的电压从 0V 跳变到 1V，而流过电容的电流 $i(t)=\dfrac{C\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 为无穷大，这种电流持续时间为零，电流幅度为无穷大，但电流的时间积分有限的物理现象就可以用冲激函数 $\delta(t)$ 来描述。

为了更为直观地理解冲激信号，我们还可以将其看成某些普通信号的极限。例如，由对矩形脉冲取极限表示的单位冲激函数为

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1-23}$$

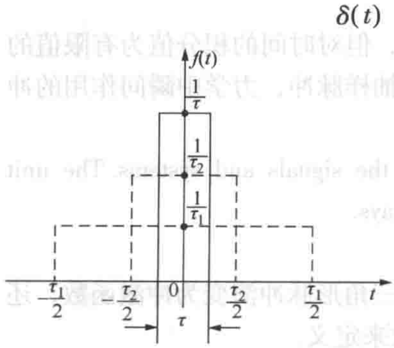


图 1-13　矩形脉冲的极限模型

如图 1-13 所示，宽度为 τ，高度为 $\dfrac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲，当保持矩形脉冲的面积 $\tau\cdot\dfrac{1}{\tau}=1$ 不变，而使脉宽 τ 趋于零时，脉高 $\dfrac{1}{\tau}$ 必为无穷大，此极限情况即为单位冲激信号。

$\delta(t)$ is a short pulse, of duration τ and with unit area value of τ. As $\tau\to 0$, $\delta(t)$ becomes narrower and higher, maintaining its unit area. Its limiting form can then be thought of as an idealization of the short pulse $\delta(t)$ as the duration τ becomes insignificant.

The relationship between the unit step signal and the unitimpulse signal:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \tag{1-24}$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \tag{1-25}$$

That is, $u(t)$ is the running integral of the unit impulse signal. This suggests that the continuous-time unit impulse signal can be thought of as the first derivative of $u(t)$.

(2) 冲激信号的性质(Properties of the Impulse Signal)

① 抽样特性(sampling property)

原点抽样:
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\,dt=f(0) \tag{1-26}$$

延迟抽样:
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0) \tag{1-27}$$

满足抽样特性的前提条件是$f(t)$在抽样点处连续。

Proof: We can deduce the property from the definition of the unit impulse signal,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\,dt&=\int_{-\infty}^{0^-}f(t)\delta(t)\,dt+\int_{0^-}^{0^+}f(t)\delta(t)\,dt+\int_{0^+}^{\infty}f(t)\delta(t)\,dt\\&=0+\int_{0^-}^{0^+}f(t)\delta(t)\,dt+0\\&=f(0)\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt\\&=f(0)\end{aligned}$$

原点抽样性质表明一个在原点连续的信号与冲激信号相乘以后的积分就等于该信号在原点处的值。

同理，我们也可以证明延迟抽样性质。延迟抽样性质表明一个在 t_0 点处连续的信号与冲激信号相乘以后的积分就等于该信号在 t_0 点处的值。

从冲激信号的抽样特性，我们还可以得出

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1-28}$$

$$f(t-t_0)\delta(t-t_1)=f(t_1-t_0)\delta(t-t_1) \tag{1-29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)\delta(t-t_1)\,dt=f(t_1-t_0) \tag{1-30}$$

② 对称性(symmetry property)

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{1-31}$$

Proof: Because $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)\,dt=-\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt$

hence, $\delta(t)=\delta(-t)$.

③ 尺度特性(scale property)

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-32}$$

Proof: When $a>0$, the left hand side of above equation is equal to