



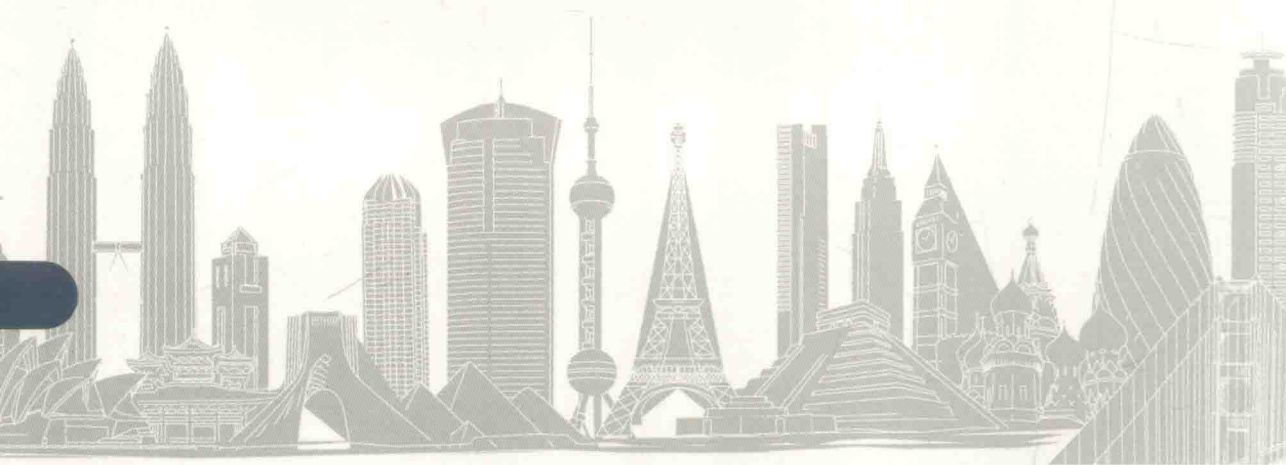
高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

高等传热学

——导热与对流的数理解析

(第二版)

孙德兴 吴荣华 张承虎 编著



中国建筑工业出版社

高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

高等传热学

——导热与对流的数理解析
(第二版)

孙德兴 吴荣华 张承虎 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等传热学——导热与对流的数理解析/孙德兴等编著.

2 版. —北京: 中国建筑工业出版社, 2014. 9

高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

ISBN 978-7-112-17148-4

I. ①高… II. ①孙… III. ①传热学 IV. ①TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 186748 号

本书共九章, 主要内容包括: 导热问题的数学描述, 用分离变量法求解导热问题, 用拉普拉斯变换求解非稳态导热问题, 用傅立叶变换法求解导热问题, 导热微分方程的格林函数, 对流换热的守恒方程组, 边界层, 管道中的流动阻力与换热, 紊流流动与换热等。

本书可作为建筑环境与能源应用工程专业、热能动力等专业的研究生教材, 也可供相关专业的技术人员参考。

* * *

责任编辑: 齐庆梅

责任校对: 陈晶晶 刘 钰

高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

高 等 传 热 学

——导热与对流的数理解析

(第二版)

孙德兴 吴荣华 张承虎 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

北京红光制版公司制版

北京中科印刷有限公司印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 11 字数: 263 千字

2014 年 10 月第二版 2014 年 10 月第二次印刷

定价: 30.00 元

ISBN 978-7-112-17148-4

(25905)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

第二版前言

本书由作者多年从事供热、供燃气、通风与空调专业研究生高等传热学授课的讲稿整理而成。

高等传热学是热动力专业与供热、供燃气、通风与空调专业研究生必上的专业基础课。近年来我国研究生招生数量急剧增长。办此类专业的各高校，特别是那些新办硕士点的高校往往面临该课的授课问题，特别是教材与师资问题。

本科传热学经国内外多年实践，各种版本教材的内容体系都差不多。与本科传热学不同，从全国范围看，高等传热学没有指导性大纲，没有推荐教材，也没有人组织过全国性的研讨。什么是它的基本内容？授课内容的边界在哪里？这些都是值得研究探讨的问题。据作者了解，各校讲授的内容体系、深度、广度各不相同，往往要凭任课教师根据自己的理解组织。这就有一个“讲什么”，“怎么讲”的问题。

目前可作为该课教材的国内外也确有一些好书。这些书也都是作者授课时重要的参考资料和学生的参考书。但作者在授课实践中感到这些书直接作为教材也有不太理想之处。主要是内容过多，讲解不细。这两条是相互关联的。许多问题的求解要用到学生此前并没有真正掌握的数学知识。加之现有的书都是从现有传热问题的角度安排内容，致使对学生而言繁多的内容哪一节都不是很好懂；对教师而言，全讲难以做到讲深讲透，不全讲又难以决定内容的取舍。

针对这一问题，作者把自己的讲稿整理了出来，写成此书，为该课的教学建设添砖加瓦。与同类书籍相比，本书有两个特点：

1. 以讲方法为主线组织内容。

本书没有像其他同类书籍那样按照传热现象出现的时、空特点，例如是否稳态，几维等编排内容，而是尝试了将现有解决传热问题的方法归纳整理构成章节。这样做一方面可避免内容过于繁杂，另一方面作者相信，学生若通过好好学习真正掌握了这些方法，就可以触类旁通，去解决没有学过的传热问题，或者自己去寻找解决问题的方法。

2. 有选择的细讲，力求通俗易懂。

为了使学生达到学懂的目的，本书并不追求将前人的成果作全面的介绍，而是将篇幅用在了方法与过程方面，希望学生学一点，懂一点，从中体会到思路与方法。现有的一些其他高等传热学教材确有一定的学术价值，但也存在过于重视介绍成果，对过程与方法的写作过于简练，学生难以读懂的问题。本书在这一点上与其他教材是不同的。

热力学的理论部分绝大多数要靠数学来解决。若说传热学难，往往是由于学生的数学知识不够。如果把解决学生相关数学知识的问题单纯看作是前面课的任务，不是本课的责任，看起来分工明确，符合道理，但如此确不符合实际情况。授课理应讲究上挂下联，把前后续课的内容串起来。作者在教学中一直坚持以学生懂为原则，发现学生前面的数学知识没学过或学得不好，到这里不会用，那就给学生补补。本书也是这样做的。根据作者所

理解的学生的实际情况，对所涉及比较复杂的数学问题，本书并不假定学生已会，都原本本地进行了推演介绍，当然不是在讲纯数学，而是从传热应用的角度。

本书不重复本科传热学的内容。目前以传热学为专业基础课的本科专业，诸如热能力、建筑环境与能源应用工程等，人都对该课进行过很好的建设，有公认的较成熟的教材。例如杨世铭、陶文铨编著的面向 21 世纪课程教材《传热学》，章熙民、任泽霏、梅飞鸣编著的《传热学》等。这些教材的内容与深度也都大体上一致。这些教材在各种传热现象的基本物理概念方面已经有了相当好的介绍。本书作为研究生教材，打算从本科的基础上讲起。凡是本科已经讲过的内容，包括物理概念方面，这里不再简单重复，而把笔墨放在讲授一些高级方法方面。这看起来顺理成章，但与一门课程的系统性也有矛盾。这大概正是一些供研究生使用的传热学教材对每一个题目都从头讲起的原因。本书中有些章节的题目看起来与本科教材相同，具体内容上却都是加深了的。

求解传热问题有三种方法，数学解析、数值模拟与实验。本书只涉及数学解析的方法，但这并不意味着后两个方法不重要。实际上，工程中大多数较复杂的传热问题要靠后两种方法解决。但后两种方法的应用多数要靠第一种方法所建立起来的思想作指导，也就是说，数学解析的方法是更为基础的，这方面薄弱，无论是数值模拟还是实验都不可能深入进去。

当然，应该指出，传热学发展的方向是在计算传热学方面。解析的方法是在几十年以前作为热门被应用的。在计算机技术迅速发展的今天，许多原来解析起来很难的问题，现在用数值解则很容易。但这并不意味着以前的这些学问不值得学了。第一，在探求物理机理方面，数值解的结果不如解析解直接；第二，传统的经典知识应该得到继承；第三，原来求解析解的思路、方法不乏精辟与精彩之处，这些经典的精华对培养学生研究、解决复杂问题的能力，树立正确的世界观与方法论，增强创新意识等都是大有好处的。

热辐射是传热的三大方式之一。本科教材对经典的热辐射理论与计算已经有了很好的分析与总结。作为高等传热学应该继续有系统地讲哪些，作者心中尚没有准确的把握，因此本书暂未列入高等的热辐射内容，期望在与同行有更多的研讨后，能更好地补充热辐射的内容，形成一本完整的《高等传热学》。

本书再版过程中，第一作者的两位学生吴荣华、张承虎对部分内容进行了修改和补充，因此列为共同作者。成书过程中，哈尔滨工业大学何钟怡教授对两处求解与推导给予了关键性的帮助，第一作者的研究生林涛与钱剑峰承担了全部打字和部分内容的校核工作。作者在此致以深深的谢意。

目 录

| | |
|---------------------------|----|
| 符号表 | 1 |
| 第一章 导热问题的数学描述 | 3 |
| 第一节 温度场和热流密度场 | 3 |
| 第二节 正交坐标系下的导热微分方程 | 5 |
| 第三节 导热问题的定解条件 | 9 |
| 第四节 导热系数各向异性时的导热问题 | 13 |
| 第五节 虚拟热源、映像法 | 16 |
| 第二章 用分离变量法求解导热问题 | 19 |
| 第一节 任意函数以正交函数系列为基的级数展开 | 19 |
| 第二节 三种边界条件下的特征值与特征函数 | 23 |
| 第三节 圆柱坐标下的一维非稳态导热问题 | 27 |
| 第四节 二维稳态导热问题的分离变量法求解 | 31 |
| 第五节 变量分解法 | 32 |
| 第六节 周期性非稳态导热的分离变量解 | 40 |
| 第三章 用拉普拉斯变换求解非稳态导热问题 | 44 |
| 第一节 拉普拉斯变换的基本概念 | 44 |
| 第二节 用拉普拉斯变换求解非稳态导热问题举例 | 47 |
| 第三节 杜哈美尔定理 | 50 |
| 第四章 用傅立叶变换法求解导热问题 | 53 |
| 第一节 引入概念的例子 | 53 |
| 第二节 傅立叶积分 | 56 |
| 第三节 傅立叶变换的应用, 非稳态导热问题的标准解 | 58 |
| 第五章 导热微分方程的格林函数 | 63 |
| 第一节 格林函数的概念、性质与用法 | 63 |
| 第二节 非稳态导热微分方程的格林函数 | 70 |
| 第三节 多维稳态导热方程的格林函数 | 72 |
| 第六章 对流换热的守恒方程组 | 74 |
| 第七章 边界层 | 83 |
| 第一节 关于边界层的一些基本概念 | 84 |
| 第二节 无穷大楔表面层流速度边界层的理论解 | 85 |
| 第三节 无穷大楔表面温度边界层的理论解 | 93 |
| 第四节 边界层动量与能量方程的近似积分解法 | 94 |
| 第五节 壁面温度沿程变化的平板温度边界层 | 99 |

| | |
|--------------------------------|-----|
| 第八章 管道中的流动阻力与换热 | 104 |
| 第一节 管内流动与换热的守恒方程组 | 104 |
| 第二节 圆管内的层流换热 | 108 |
| 第三节 非圆断面管道流动阻力与换热表达中的定性尺寸与当量直径 | 115 |
| 第四节 狭缝与圆环形断面流道中成熟发展层流的阻力与换热 | 119 |
| 第五节 椭圆与矩形断面流道中成熟发展层流的阻力与换热 | 125 |
| 第六节 圆扇形与任意三角形断面中成熟发展层流的摩擦阻力与换热 | 129 |
| 第九章 紊流流动与换热 | 138 |
| 第一节 时均守恒方程与紊流切应力 | 138 |
| 第二节 紊流在近壁处的速度型 | 140 |
| 第三节 管内紊流速度型与流动阻力计算 | 143 |
| 第四节 管内充分发展段的紊流换热 | 147 |
| 第五节 定壁温边界条件下外掠平板的紊流换热 | 154 |
| 第六节 描述紊流脉动量的微分方程与紊流模式 | 156 |
| 附录 | 160 |
| 参考文献 | 167 |

符 号 表

| | |
|-------------------------|--|
| 黑体阿拉伯字母: | 矢量 |
| 非黑体阿拉伯字母: | 数量 |
| A : | 面积 (m^2) |
| A, B, C, D : | 常数 |
| a : | 导温系数 (m^2/s) |
| Bi : | 毕渥准则 |
| c : | 质量热容量 ($\text{kJ}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$) |
| d : | 管径 (m) |
| e : | 单位质量流体的内能 (kJ/kg) |
| Fo : | 傅立叶准则 |
| f, g, u : | 函数 |
| G : | 格林函数 |
| H : | 拉梅系数 |
| h : | 放热系数 ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$) 或某物体的高度 (m) |
| L, l : | 长度 (m) |
| i, j, k : | 单位矢量 (m) |
| i, j, k, m, n : | 坐标的序数或级数项的序数 |
| K : | 单位质量流体的紊流脉动动能 (m^2/s^2) |
| n : | 壁面法线方向上的坐标 (m) |
| Nu_l, Nu_q, Nu_{lq} : | 等壁温, 等壁热流, 横向等壁温纵向等壁热流三种边界条件下的努谢尔特数 |
| p : | 压强 (Pa) |
| q : | 热流密度 (W/m^2) |
| q_1 : | 单位管长热流量 (W/m) |
| q_v : | 体积发热量 (W/m^3) |
| R, r_0, r : | 半径, 极坐标 (m) |
| s : | 面积 (m^2) |
| t : | 温度 ($^\circ\text{C}$) |
| t_0, t_f : | 某确定处的给定温度与流体温度 ($^\circ\text{C}$) |
| t_w : | 壁面温度 ($^\circ\text{C}$) |
| U : | 管道的湿周 (m) |
| u : | 速度, 流体的流速 (m/s) 或函数符号 |
| u_s : | 边界层的外缘速度 (m/s) |

| | |
|---|---|
| u, v, w : | x, y, z 三个方向上的速度分量 (m/s) |
| V : | 流速 (m/s) |
| V, \dot{V} : | 体积 (m ³) 与体积流量 (m ³ /s) |
| u^*, u^+, y^+ : | 切应力速度 (m/s), 无因次速度与无因次离壁距离见公式 (9-15) |
| x, y, z : | 直角坐标 (m) |
| X, Y, Z : | 无因次的直角坐标或单位质量的体积力 (m/s ²) |
| α : | 放热系数 (W/(m ² · °C)) |
| $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$: | 角度 |
| β, λ : | 特征值 |
| δ : | 厚度 (m) 或 δ 函数 |
| γ : | 冰的液化热 (kJ/kg) |
| θ : | 极坐标, 过剩温度 (°C) 或无因次温度 |
| ϕ : | 热流量 (W) |
| $\psi, \psi_{c_f}, \psi_t, \psi_q, \psi_{tq}$: | 非圆断面流道利用水力直径做定性尺寸计算流动阻力与换热时的断面形状修正系数, 角标分别表示: 流动阻力、等壁温边界条件下的对流换热、等壁热流、横向等壁温、纵向等壁热流。 |
| ξ, η, ζ : | 长度坐标 (m) 或无因次坐标 |
| ρ : | 密度 (kg/m ³) |
| λ : | 导热系数 (W/(m · °C)) 或管道的沿程阻力系数 |
| μ : | 动力黏滞系数 (Ns/m ² 或 kg/sm) 或某一常数 |
| ν : | 运动黏滞系数 (m ² /s) |
| $\varepsilon_M, \varepsilon_H$: | 紊流黏滞系数与紊流导温系数 |
| τ | 时间坐标 (s) |

注: 只给出通用符号。个别处使用的个别符号在行文中单独说明, 此处未列出。

第一章 导热问题的数学描述

所谓数学描述就是把一个实际的导热问题变为数学关系式，这有点像代数中解应用题时的列方程。

某一指定界面上通过的总热量为热流密度函数在该面上的积分，即 $\Phi = \iint q \cdot dS$ 。热流密度场与温度场有确定的关系——傅立叶定律，因此包括导热在内的许多传热问题的求解往往要归结为求解温度场。

当一算术问题直接算不出来时，将未知数设为 x ，先把 x 当作一个量用起来，建立代数方程，这个过程叫做“列方程”。对未知的温度场我们也是把它设为 $t(x, y, z, \tau)$ ，只不过以函数作为变量的方程为微分方程（或积分方程），写出微分方程的过程也可以叫做“列方程”。

与代数方程不同的是，微分方程描述的是该函数在空间与时间坐标上变化的普遍规律。一个特定的问题要求解，就要加上描述该现象的定解条件，例如边界条件、起始条件等等。某一方程的未知函数对某一坐标最高是 n 阶导数，该方程在该坐标上就必须写出 n 个定解条件，例如一长方体在直角坐标系下的导热微分方程可写为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1-1)$$

要求解这一长方体中的温度场，就必须写出一个起始条件和 x 、 y 、 z 方向上各两个总计六个边界条件，这样才能得到惟一解。

与代数方程组类似， n 个未知函数需列出 n 个互相独立的微分方程，这时称方程组是封闭的，才有可能得到惟一的解。

第一节 温度场和热流密度场

物理量在空间的分布叫做该物理量的场。传热学经常面对的场是温度场、速度场与热流密度场，可设为 $t(x, y, z, \tau)$ 、 $u(x, y, z, \tau)$ 和 $q(x, y, z, \tau)$ 。还有其他物理量也可能是空间变量的函数。例如流体的密度 ρ ，黏度 μ 与 ν ，导热系数 λ 等。它们与温度有关，而温度是空间变量的函数，故它们也就构成了自己的场，可分别记为 $\rho(x, y, z, t)$ 、 $\mu(x, y, z, \tau)$ 、 $\nu(x, y, z, \tau)$ 、 $\lambda(x, y, z, \tau)$ 等。

场分为数量场与矢量场，温度场是数量场，而热流密度场是矢量场。

一、温度场的方向导数与梯度

设空间有一点 $P(x, y, z)$ ，从 P 点出发沿 l 方向位移 Δl ，此时温度变化为 Δt ，则称

$\lim_{\Delta l \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{\Delta l}$ 为温度场 t 在 P 点的方向导数，记为 $\frac{\partial t}{\partial l}$ 。方向导数是个数量，表示温度在该方向上

的变化率。

某方向可用其与 x, y, z 三个坐标的夹角 α, β, γ 表示, 即 $\frac{l}{|l|} = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$ 。

由全微分概念知

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial t}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial t}{\partial z} \cos\gamma \quad (1-2)$$

此式即为方向导数的计算式, 当 $t(x, y, z, \tau)$ 已知, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (方向给定) 已知, $\frac{\partial t}{\partial l}$ 即可求出来。

对于确定的 t , 我们有确定的矢量 $G(x, y, z) = \frac{\partial t}{\partial x} i + \frac{\partial t}{\partial y} j + \frac{\partial t}{\partial z} k$, 将其与 $\frac{l}{|l|}$ 矢量点乘得:

$$G \cdot \frac{l}{|l|} = \frac{\partial t}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial t}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial t}{\partial z} \cos\gamma = \frac{\partial t}{\partial l}$$

即 G 与 $\frac{l}{|l|}$ 矢量点积为 t 的方向导数。

G 是确定的, l 的方向是可以变化的, 由两个矢量点积的概念知: 当 l 与 G 同向时, $\frac{\partial t}{\partial l}$ 取极大值, 大小为 $|G|$ 。

我们称 G 为温度场的梯度, 记为 $\text{grad}t$ 。

$$\text{grad}t = \frac{\partial t}{\partial x} i + \frac{\partial t}{\partial y} j + \frac{\partial t}{\partial z} k \quad (1-3)$$

不言而喻, 数量场 t 的梯度为矢量场, 它在直角系三个坐标上的投影为 $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}$,

它在 l 方向上的投影为 $\frac{\partial t}{\partial l}$ 。

二、热流密度场

在直角坐标系下热流密度场可表达为

$$q = q_x i + q_y j + q_z k \quad (1-4)$$

其中 q_x, q_y, q_z 为热流密度矢量在各个坐标系下的分量, 广义的讲, 他们都是空间坐标与时间的函数, 即 $q_x = q_x(x, y, z, \tau), \dots$ 。

根据上述温度场梯度与热流密度的概念, 傅立叶定律的通用表达式为:

$$q = -\lambda \text{grad}t \quad (1-5)$$

若两矢量相等, 其相同方向的分量也相等, 故:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}$$

$$q_l = -\lambda \frac{\partial t}{\partial l} \quad (1-6)$$

矢量在某点与 dS 面积的点积叫该矢量在微元面积上的通量。根据物理概念知，速度矢量的通量为体积流量，而热流密度矢量的通量为热流量。于是有 $\Phi = \iint_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}$ 。

设在空间某点周围有一封闭曲面 Ω 包围一个小体积 ΔV ，热流密度场的散度定义为：

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

其物理意义不难理解： $\operatorname{div} \mathbf{q}$ 为空间各点单位体积向周围贡献的热量。

根据高斯公式（Gauss）或奥斯特罗格拉特斯基（остроградский）公式，封闭曲面的面积分可化为体积积分，

$$\oiint_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\Omega} q_x dydz + q_y dx dz + q_z dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

则

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV}{\Delta V} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (1-7)$$

$\operatorname{div} \mathbf{q}$ 实际就是导热体中的内热源 q_v (W/m^3)，即单位体积的发热量

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = q_v \quad (1-8)$$

当确定对象中无内热源时 $q_v = 0$ ，即 $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ 。

值得一提的是，有些同学可能对导热或对流空间中某点是否存在一个确定大小与方向的热流密度矢量心存疑虑，概念模糊。同为矢量场，速度场中流体的质点往哪个方向流，看得见，摸得着，而在求解复杂的二、三维导热问题时，往往看到某点 x 方向有热流， y 方向也有热流，就搞不清楚 \mathbf{q} 是怎么回事了。其实任何导热体中都有一个确定的矢量场，每点都有由 \mathbf{q} 函数所确定了方向和热流密度的大小。各个方向上的热流与各个方向的分速度一样，分别是 \mathbf{q} 与 \mathbf{u} 在该方向上的分量。

第二节 正交坐标系下的导热微分方程

所谓正交坐标系，是指当空间某点沿某一坐标方向移动时，该点的其他坐标值保持不变。例如将某一三维空间坐标系的三个变量记为 x_1, x_2, x_3 ，则有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (1-9)$$

数学中记载的正交坐标系总共有十一个。传热学中常用的为直角坐标系、柱坐标系与球坐标系。

设有某一正交坐标系，三个坐标为 x_1, x_2, x_3 ，其与直角坐标系三个坐标的关系为

$$x = x(x_1, x_2, x_3) \quad y = y(x_1, x_2, x_3) \quad z = z(x_1, x_2, x_3) \quad (1-10)$$

对直角坐标系, x, y, z 均为尺度, 而任意坐标系下 x_1, x_2, x_3 就不一定具有尺度的因次。例如柱坐标与球坐标的角度坐标就不是尺度, 而只是无因次量。

在任意正交坐标系下, 写内能变化项的时候, 需要小微元体体积 dV , 写热量流进与流出小微元体的量时需要垂直于 x_1, x_2, x_3 方向上小微元体的表面积 dA_1, dA_2, dA_3 , 为了应用傅立叶定律需要小微元体三个方向上的尺度增量 dl_1, dl_2, dl_3 。现在我们就把这些都表达出来。

空间微元线段在直角坐标系下可表示为

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

式中 dx, dy, dz 可用 dx_1, dx_2, dx_3 表示,

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x_1} \quad (\text{第二、三项为零})$$

即 $dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1$ 。同理可写出 $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1, dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1$

故

$$\begin{aligned} dl_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2} \cdot dx_1 \\ dl_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2} \cdot dx_2 \\ dl_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2} \cdot dx_3 \end{aligned} \quad (1-11)$$

例如, 对柱坐标系:

$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$$

与直角坐标系的关系为:

$$x = r \cos \theta = x_1 \cos x_2 \quad y = r \sin \theta = x_1 \sin x_2 \quad z = z = x_3$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x_1} = \cos x_2 & \frac{\partial y}{\partial x_1} = \sin x_2 & \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} = -x_1 \sin x_2 & \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2 & \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial z}{\partial x_3} = 1 \end{cases}$$

$$dl_1 = \sqrt{\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2} \cdot dx_1 = dr$$

$$dl_2 = \sqrt{(x_1 \sin x_2)^2 + (x_1 \cos x_2)^2} \cdot dx_2 = x_1 dx_2 = r d\theta$$

$$dl_3 = dx_3 = dz$$

记
$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (1-12)$$

称为拉梅系数或度规系数。其意义为 i 坐标方向上的尺度增量与坐标本身增量之比，即

$$dl_i = H_i dx_i \quad (1-13)$$

显然它可能是有因次的。

垂直于坐标方向上小微元体面积为

$$dA_1 = dl_2 dl_3 = H_2 H_3 dx_2 dx_3$$

$$dA_2 = dl_1 dl_3 = H_1 H_3 dx_1 dx_3$$

$$dA_3 = dl_1 dl_2 = H_1 H_2 dx_1 dx_2$$

即

$$dA_i = H_1 H_2 H_3 dx_1 dx_2 dx_3 / (H_i dx_i) \quad (1-14)$$

小微元体的体积为 $dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dx_1 dx_2 dx_3$ 。

记
$$H = H_1 H_2 H_3 \quad (1-15)$$

则：
$$dV = H dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1-16)$$

以柱坐标为例：

$$H_1 = 1, H_2 = x_1, H_3 = 1, H = x_1$$

$$dA_1 = x_1 dx_2 dx_3 = rd\theta dz$$

$$dA_2 = dx_1 dx_3 = dr dz$$

$$dA_3 = x_1 dx_1 dx_2 = r dr d\theta$$

$$dV = x_1 dx_1 dx_2 dx_3 = r dr d\theta dz$$

导热微分方程描述的是空间各小微元体在瞬间的能量守恒关系，即单位时间小微元体内热源产生的热量等于单位时间内能的增加与单位时间边界上流出减流入的热量之和。

上述三项中的后两项均可用设定的温度场 t 函数的微分形式表达出来，导热微分方程就是这样构成的。

通过六个面导出导入小微元体的热量为

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial l_i} dA_i \right) dx_i = -\sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x_i} H dx_1 dx_2 dx_3 \right) / H_i dx_i \right\} \cdot dx_i$$

在对 x_i 求导时， H_i 为常数，故该热量为

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x_i} \frac{H}{H_i} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

内热源发热量为：

$$q_v dV = q_v H dx_1 dx_2 dx_3$$

内能增加为：

$$\frac{\partial (c\rho t)}{\partial \tau} dV = \frac{\partial (c\rho t)}{\partial \tau} H dx_1 dx_2 dx_3$$

当物性参数为常数时，导热微分方程被整理为：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{a}{H} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H}{H_i^2} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1-17)$$

以柱坐标为例，

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{a}{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1}{1} \frac{\partial t}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_1}{x_1^2} \frac{\partial t}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{x_1}{1} \frac{\partial t}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho} \\ &= \frac{a}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho} \end{aligned}$$

则：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1-18)$$

上式与我们直接用柱坐标所导出的导热微分方程相同。

对球坐标系

$$x_1 = r, x_2 = \theta (0 \sim 2\pi), x_3 = \varphi (0 \sim \pi/2)$$

坐标间的关系为

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \varphi = x_1 \cos x_2 \sin x_3 \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi = x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\ z &= r \cos \varphi = x_1 \cos x_3 \end{aligned}$$

用上述公式求得

$$H_1 = 1, H_2 = x_1 \sin x_3, H_3 = x_1, H = x_1^2 \sin x_3$$

得到导热微分方程为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\text{ctg} \varphi}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1-19)$$

上述方程希望读者自己推导一遍，以确实掌握任意坐标系下导热微分方程的应用。

上述导热微分方程的各项都是有因次的。在运用数学知识求解的时候，带有因次的量会带来不便。例如大家学过的对数平均温差 $\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$ ，对数号后是一个无因次的数，毫无问题。但推导过程可能会出现 $\ln \Delta t_1$ 这样的项， $e^{-\tau}$ 这样的项也是如此。

数学处理的是纯粹的数，是不讲因次的。物理问题拿到数学中求解的时候，先将物理问题的数学描述式无因次化，会给数学求解带来方便。

我们定义下述无因次量来重新构造直角坐标系下导热微分方程：

无因次坐标

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, Z = \frac{z}{L};$$

无因次温度

$$\theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f};$$

无量纲时间（傅立叶数）

$$Fo = \frac{a \tau}{L^2} \quad (1-20)$$

上述式子中 L 为特征尺寸，是研究对象中对导热过程影响最大的尺寸。例如平板导热， L 常取平板的厚度或两倍的厚度；圆筒壁导热 L 可取内径或外径。 t_f 为导热体外环境温度，对第一类边界条件取边界温度，对第三类边界条件 t_f 取流体温度。 t_0 为初始温度。当然实际问题可能不这么简单，例如导热体的各个边界上既有第一类边界条件，又有第三类边界条件，初始温度不是常数等等。具体问题应具体分析，以方程简练，边界条件能够齐次化，便于求解为目标。

将上述各项无量纲引入导热微分方程，得到：

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + G \quad (1-21)$$

式中 G 为无量纲内热源，

$$G = \frac{q_v L^2}{\lambda(t_0 - t_f)} \quad (1-22)$$

大家看到，方程无因次化后，与原方程相比，变量减少了，而且可以进行纯数学处理，将给求解过程带来方便。

第三节 导热问题的定解条件

导热微分方程描述的是导热现象的普遍规律。每一个具体的导热问题都有自己独特的情况，包括研究对象的形状尺寸、物性参数和边界上的热力条件等。把这些情况用数学式子写出来，成为方程的定解条件，就构成了对一个具体导热问题完整的数学描述。

在进行数学描述的时候，首先要清楚“维”的概念。在实际问题中，导热微分方程中各项的大小可能是差别很大的。当其中的一项或几项远远小于其他项时，则可将其忽略，以简化方程。这就有了稳态、一维、二维或无内热源等方程的简化形式。

所谓稳态，是指空间各点温度不随时间变化，即 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ 。实际中若温度随时间的变化很慢，远小于温度梯度随位置的变化率，则可做稳态简化。

所谓一维，并非指研究对象一定是一根细棒。例如房间的一面墙，当厚度方向温度变化很大，而宽、高方向温度变化不大时，则可忽略宽、高方向的温度变化，作一维处理。可见导热问题可简化为一维或二维，与研究对象在该维方向上的尺度大小没有直接关系。

完成一个导热问题的数学描述要经历下述步骤：

- (1) 确定是否稳态，以及空间坐标的维数；
- (2) 根据研究对象的几何形状选择坐标系，并写出相应的导热微分方程；
- (3) 根据边界条件，确定坐标原点的位置及各个坐标方向；
- (4) 写出全部定解条件，包括物性参数、起始条件与边界条件。

上述过程中要注意采用以下方法：

- (1) 应选用一个基准温度，把真实温度变换成基于基准温度的过剩温度。基准温度

常选第一类边界条件的边界温度 t_0 或第三类边界条件的流体温度 t_f ，此时令 $\theta = t - t_0$ 或 $t - t_f$ 。这样做的目的是使尽可能多的边界条件齐次化，以方便求解。

温度的大小本来就是相对的。 $t=0$ 中的零与数学中的 0 意义完全不同，它是水结冰的温度，绝非什么都没有。在传热学中，温度的绝对值没有多少物理意义，真正有意义的是温差。因此我们可以把边界上的温度或环境的温度看作是零度，用 θ 来代替 t 进行求解，解出 θ 后， t 与 θ 只差一个常数。

(2) 对几何形状对称的物体（轴对称或线对称），当边界条件对称时，应将坐标原点置于对称轴或对称线上，并将该轴或线看作是一个边界（可称为广义边界）。在该边界的法线方向上，温度梯度为零。

(3) 应理解第一类边界条件与第二类边界条件中的绝热边界条件可视为第三类边界条件的特殊情况。观察第三类边界条件的公式 $-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = h\theta$ ，设 L 为研究对象的一个特征尺寸，此公式可写为 $-\frac{\partial \theta}{\partial (n/L)} = \frac{hL}{\lambda} \theta = Bi\theta$ ，当 Bi 极大时， $\theta \rightarrow 0$ ，即 $t - t_f \rightarrow 0$ ， $t \approx t_f$ ，此为第一类边界条件；当 Bi 极小时， h 很小，接近于无对流换热， $\frac{\partial \theta}{\partial (n/L)} \approx 0$ ，此时即为第二类边界条件中的绝热边界条件。

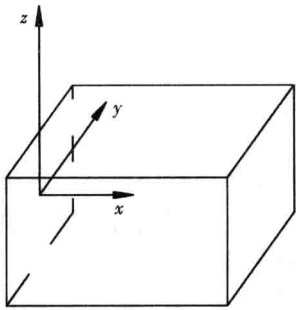


图 1-1 例 1 附图

因此，在对导热问题的理论研究中，也可不论实际情况，即将边界条件写成第三类进行推导。若需要第一类或绝热边界条件下的解，只需在普遍解中将 Bi 设为 ∞ 或 0 即可。

下面通过几个例子练习上述步骤和方法。

【例 1-1】 一个长方体，三个边长分别为 L_1 、 L_2 、 L_3 ，如图 1-1 所示。前、后面保持恒温 t_0 ，上、下面温度为 t_f ，与放热系数为 h 的流体接触，右侧加入定常热流 q (W/m^2)，左侧绝热，试写出该稳态导热问题的数学描述。

【解】 此题比较明显，应采用直角坐标系，是个三维稳态导热问题，无内热源。令 $\theta = t - t_f$ ，则 $\theta_0 = t_0 - t_f$ ，相应的微分方程为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

根据此题边界条件的特点，坐标原点宜设在左侧绝热面的中心。 L_1 、 L_2 、 L_3 分别为 x 、 y 、 z 三个坐标方向的边长，如此边界条件为

$$x = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

$$x = L_1 \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = q \quad (c)$$

$$y = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (d)$$

$$y = \frac{L_2}{2} \quad \theta = \theta_0 \quad (e)$$

$$z = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (f)$$