衡陽賀延年譯述

漢譯何魯陶三氏高中代數學

下冊

商務印書館發行

何魯陶三氏

代數學

第二編

第一章

基礎運算法

1. 基礎運算法之次序 凡含加減乘除諸符號之算術式。或代數式之數值。依其所示運算之次序而演算之。於此不可不知次之規則。

含加減乘除諸運算之一連續數。必須順其中所有之次序。先行乘法及除法。然後順其中所有之次序或取任意次序。行加法及減法。

於式中任何括弧。此規則亦可適用。

習　題

試簡單以下各題。

1. $3-5+6-8.$

2. $6\div2+1-4.$

3. $34\div8\times4-4+6.$

4. $(7-6)(18-2\cdot4)\div(20\div4).$

5. $24-2(18-2\cdot3)\div4+3\times5.$

6. $16+4\div 8-10+51\div 16-4-6\cdot 3\cdot 0\cdot 2$
$+18\cdot 8\div 48-2\cdot 18\div 12.$

7. $(16\div 32\times 48\div 8-4-8+3)\times[12\div 4\div 3-1]$
$+(42\div 6\cdot 7-42-6)\cdot 6.$

8. $a^4=4a$ 問 $a=3$ 乎。$a=2$ 乎。$a=0$ 乎。

9. $a^4=4a$。問給各 4 字以何名稱。並各爲之界說。

10. 試作方乘之界說。試區別指數與方乘。

試求以下各題之數值。

11. x^2-5x+6. 當 $x=5$.

12. x^3-3x^2+3x-1. 當 $x=3$.

13. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. 當 $x=4$ 及 $y=2$.

14. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$. 當 $x=3$ 及 $y=2$.

15. 問一數之絕對值如何。試說明之。

2. 加法 代數中之加法。即合併同號或異號之同類項(見次之界說)爲一項之法也。因而有規則如次。

I. 加二或二以上之正數。即求其絕對值之算術和。而置正符號於此和之前。

II. 加二或二以上之負數。即求其絕對值之算術和而置負符號於此和之前。

III. 加一正數與一負數。即求其絕對值之差。而置其絕對值較大之數之符號於此差之前。

$2+4+7=2+7+4=7+2+4.$ 是固顯然無疑者也。故凡正數或負數之諸連續數。其所有之次序。皆不影響於其最終之結果。此種加法規則。名曰**交換定則**。

同類項者。卽 (a) 諸整數及諸有理之數分數。(b) 相同之方根。如 $\sqrt{2}$ 與 $3\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{3}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$, (c) 有同文字部之項。如 $4a$ 與 $3a$ 或 $6xy^2$ 與 $2xy^2$ 各種皆是也。

異類項者。卽不同樣之指根。或有不同文字部之項是也。

因而多項式之加法。有次之

規則 記同類項於同一縱行。

求各行內諸項之代數和。用其各各應有之符號。記其結果爲一連續式。

3. 減法 同樣多項式之減法。亦有次之

規則 記減數於被減數之下。且令同類項爲同縱行。

於心中假定變減數各項之符號。以求各行內諸項之代數和。用其各各應有之符號。記其結果爲一連續式。

習　題

試加次之各題。

1. $16, -3, +2, -8, -7,$ 及 $4.$

2. $4a, -6a, -10a, +2a,$ 及 $18a.$

3. $4x-3y+7, 8x-10y-11,$ 及 $10y-30+7x.$

4. $7x-4y-z$, $3x+z-8y$, 及 $18y-17x-14z$.

5. $4a^2-3a^2c-4ac^2$, $3a^2c-8ac^2-8a^2$, 及 $3a^2-6a^2c$.

6. 若 $x=1$, $y=2$, $z=3$. 試求習題4之三式內。及其所得之結果內。各各之數值。試比較此三數值之和與結果之數值。

7. 試述代數式之加法內檢算法之規則。

試以多項係數記出以下各題。

8. $ay+by+cy$.

9. $3ax-4bx+6x$.

10. $4x-abx-x$.

11. $7x-3ax-4a^2x$.

12. $3(a+b)-c(a+b)$.

13. $6a(x-2c)-3(x-2c)$.

14. $4b(3x-2)-8c(3x-2)$.

15. $4m(5a-3c)-6n(-3c+5a)$.

試於以下各題內。從第二式減去第一式。

16. $4a$, $6a$.

17. $8a^3$, $5a^3$.

18. $4x+3$, $8x+6$.

19. $7x^2-10$, $5x^2-20$.

20. $x-3y^2+z-4ac+7ax$, $4x-y^2+8-5ax+9ac$.

21. $a^3-c+3x-a^2m-8ac$, $4a^3+m-8x-10ac+4a^2m$.

於以下各題內。試求出一式。能令其加於第一式則得第二式。

22. x^2-5x+6, $3x^2-5x+2$.

23. $4x^2-3cx+c^2$, $8c^2+7cx-10x^2+8$.

於以下各題內。試求出一式。能令第一式減去該式則得第二式。

24. $4a^2-2ab+b^2,\ 7a^2-10ab+6b^2.$

25. $c^2-10cx+8x^2,\ 9x^2-10cx+4+c^2.$

26. 由前習題22及24所提示之方法。試述減法內檢算法之規則。

27. 從 $ax-ac-3c^2$ 及 $4c^2-3ac$ 之和內。減去 $4c^2-8ax+a^2$ 及 $4ac+3ax-5c^2$ 之和。

於以下各題內。消去其括弧。且合併其同類項。

28. $4x-3-(a-2x)+(3x-a).$

29. $6x+(3c-8x+2)-(c-x-2).$

30. $6x-[-(a-c)+(3c-4a)].$

31. $7c-[(3c-4)-6-(4x-3a-c)].$

32. $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)+8].$

33. $6x-4(3-5x)-4[2(x-4)+3(2x+1)-(x-7)].$

34. $3x-2[1-3(2x-3-a)-5\{a-(3x-2a)-4\}].$

35. 試述去括弧之規則。

(*a*) 當正符號在於其前時。

(*b*) 當負符號在於其前時。

試於以下諸題。括其含 x 與 y 之各項於一括弧內。其前置以正號。又括其所餘之他項於一括弧內。其前置以負號。

36. $x^2+2xy+y^2-a.$　　*37.* $x^2+14ab-49a^2-b^2.$

38. $y^2+6xy+9x^2-m^2-10m-25.$

39. $x^4+10x^2y^3-c^8+12c^4d-36d^2+25y^6.$

40. 試述括諸項於一括弧內之規則。(*a*) 其前置以正號者。(*b*) 其前置以負號者。

4. 乘法 一項以他一項乘之。所得積之符號,積之係數,及積中任一文字之指數。皆可得之於次。

I. 若乘數與被乘數有同符號。則積之符號爲正。若有異符號。則爲負。

II. 積之係數。卽各因子之係數之積。

III. 積中各文字之指數。由次之普通定律決之。

$$\mathbf{n}^a\times\mathbf{n}^b=\mathbf{n}^{a+b}$$

因而多項式之乘法。有次之

規則 以乘數之各項。次第乘其被乘數。而令其各次乘積相加。

指數定律。擴張於乘法內。是爲**自乘法之定律。**

$$(\mathbf{n}^a)^b=\mathbf{n}^{ab}$$

後之定律。應用稍普通之形如次。

$$(\mathbf{x}^a\mathbf{y}^b)^c=\mathbf{x}^{ac}\mathbf{y}^{bc}.$$

又　$$((\mathbf{x}^a)^b)^c=\mathbf{x}^{abc}.$$

5. 除法 一項以他項除之。所得商之符號。商之係數。及商中任一文字之指數。皆可得之於次。

I. 當被除數與除數有同符號。則商之符號爲正。若有異符號則爲負。

II. 商之係數。卽被除數之係數由除數之係數除之之商。

III. 商中各文字之指數。由次之定律決之。

$$n^a \div n^b = n^{a-b}.$$

一多項式以他多項式除之。其方法述之於次。

規則 依某公共文字之降冪。整列被除數與除數。稱曰該文字之整列式。

以除數之第一項。除被除數之第一項。記其結果。爲商之第一項。

以商之第一項。乘全除數。記其結果於被除數之下。而減之。試留心記其餘數之各項。與除數之各項。同其次序。

以除數之第一項。除餘數之第一項。是爲商之第二項。以下逐次如前法。除至無餘數而止。或至僅有某餘數。但其整列之文字較除數爲低次者(8節)而止。

6. 零指數之意義 關於指數之諸定律。述之於4及5兩節之公式中者。係假定對於 a 與 b 有一切之值。

故 $$x^a \div x^a = x^{a-a} = x^0$$

但 $$\frac{x^a}{x^a} = 1$$

因而 $$x^0 = 1$$

由是凡任何數。(除零外)其指數爲零者。等於 1。

7. 負指數之意義 若於 5 節之公式內 b 大於 a 時。則得一負指數 n。如斯指數之意義。說明之於次。

由 5 節 $$\frac{x^a}{x^{a+b}} = x^{a-(a+b)} = x^{-b}$$

但此分數之分子分母各項。同以 x^a 除之。

$$\frac{x^a}{x^{a+b}} \text{ 或 } \frac{x^a}{x^a x^b} = \frac{1}{x^b}$$

故 $$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$$

於一般 $$cx^{-a} = \frac{c}{x^a} \text{ 及 } \frac{c}{x^{-a}} = cx^a$$

此後對於以上指數定律。皆假定其包含正，負，零。及分數指數。

習題

試演次所示之運算。

1. $(4x^2-3x)(2x)$. 2. $(2x+3)(5x-6)$.

3. 於習題 2 及其積內之各因子。以 2 代其 x。試比較積之數值與諸因子數值之積。由是說明乘法內檢算法之手續。

4. $(3x^2-1)^2$.

5. $(7x^{2a}-8x^a+3)^2$.

6. $(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$.

7. $(x^{\frac{1}{2}}-x)^2$.

8. $(e^1+e^{-1})^2$.

9. $(e^x+2e^{-x})^2$.

10. $(e^x-e^{-x})^3$.

11. $(e^{2x}-3e^{-x})^4$.

12. $(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1)$.

13. $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{4}x-2\right)\left(\frac{4x}{5}-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}\right)$.

14. $(4x^{3a}-6x^a+3)(7x^{3a}-x^{2a}+4)$.

15. $(x^2-2xy^2+y^4)(x^2+2xy^2+y^4)$.

16. $(x^{-1}-3x-2x^{-2})^2$.

17. $(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}})^2$.

18. $\left(\frac{2a^2}{3}-\frac{a}{5}+\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2a^3}{3}+\frac{a^2}{5}-\frac{2a}{7}\right)$.

19. $(5x^{2a}-3x^{-2a}-6x^{-a}+3x^a)^2$.

20. 若 $x=-9$, $x^2-x-90=?$

21. 若 $x=3$ 及 $y=2$, $x^2-4xy^2+4y^4=?$

22. 若 $x=2$ 及 $y=-3$, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=?$

23. 若 $x=-4$ 及 $y=-2$, $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=?$

24. 若 $e=2$, $e=-3$, $(e^1-e^{-1})^2=?$

25. 若 $e=2$ 及 $x=2$, $e^{2x}-2e^0+e^{-2x}=?$

26. $(8x^4-6x^2-4x)\div(-2x)$.

27. $(x^2-7x+12)\div(x-3)$.

28. 試述乘法之組合定律。並說明之。

29. 試述乘法之分配定律。並說明之。

30.　$(x^3-64)\div(x-4)(x^2-4x+16)$.

31.　$(x^4-8x^2+33x-30)\div(x^2+3x-5)$.

32.　試說明除法內檢算法之手續。同於乘法內之檢算。

試求次題之餘數。

33.　$(8x^3-x^2-5)\div(2x-3)$.

34.　$(4x^4-x^2-3)\div(2x^2-x-1)$.

35.　$x^3+8y^3+125-30xy$. 以 $x+2y+5$ 除之。

36.　$x^3+y^3+z^3-3xyz$. 以 $x+y+z$ 除之。

37.　$a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}$. 以 $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除之。

38.　$3x^{-10}+x^6-4x^{-6}$. 以 $2x^{-2}+x^2+3x^{-6}$ 除之。

39.　$x^{\frac{3}{5}}-y^{\frac{3}{5}}$ 以〔$(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}})\div(x^{\frac{1}{10}}+y^{\frac{1}{10}})$〕除之。

40.　$9m+4m^{-1}-13$. 以 $3m^{\frac{1}{2}}-5+2m^{-\frac{1}{2}}$ 除之。

41.　$x^{2a}+4x^{-2a}-29$. 以 $x^a-2x^{-a}-5$ 除之。

42.　$9x^{2a}+25x^{-4a}-19x^{-a}$. 以 $5x^{-2a}+3x^a-7x^{-\frac{a}{2}}$ 除之。

43.　$\left(\dfrac{x^3}{8}+\dfrac{27y^3}{64}\right)\div\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{9y}{4}\right)(64x^2+96xy+144y^2)$.

44.　$\left(6a^3+6x^3+\dfrac{35ax^2}{2}+\dfrac{35a^2x}{3}\right)\div\left(\dfrac{3a}{2}+\dfrac{2x}{3}\right)$.

45.　$$\left(\frac{9a^5}{5}+\frac{243a^3}{20}-12+\frac{59a}{4}-\frac{443a^2}{30}-\frac{43a^4}{8}\right)$$
$$\div\left(\frac{3a^3}{4}+a-\frac{3}{2}-\frac{5a^2}{6}\right).$$

8. 分離係數 若一項爲單獨量。或爲諸文字含有四基礎運算。而皆不含任何方根者。則此項稱曰**有理**。

若一項無文字之分母。又各因子之指數爲正數(或零)者。則其項稱曰**整**。

一整式可不爲有理。凡有理式不必皆爲整。如$\frac{x^2}{4}+\sqrt{x}+8$爲整式。但不爲有理。而$\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x}+8$爲有理式。但不爲整。

若一有理整式之各項皆爲同次者。則其式曰**等次式**。

凡多項式僅含一文字者。或含二文字而爲等次者。其乘法與除法之繁難。可僅用其係數以簡省之。

例題

1. $3x^3-4x+6$. 以$2x^2-5x+3$乘之。

解法 因第一式內缺x^2一項。卽其係數爲零。補入$0x^2$。然後分離各係數，而行乘法如次。

$$\begin{array}{rrrrrr}
3 & +0 & -4 & +6 & & \\
2 & -5 & +3 & & & \\
\hline
6 & +0 & -8 & +12 & & \\
 & -15 & +0 & +20 & -30 & \\
 & & +9 & +0 & -12 & +18 \\
\hline
6 & -15 & +1 & +32 & -42 & +18
\end{array}$$

補入x之諸方乘。則得其積爲$6x^5-15x^4+x^3+32x^2-42x+18$。

2.　$6x^4-11x^3y+2x^2y^2+27xy^3-18y^4$. 以 $2x^2-5xy+6y^2$ 除之。

解法

$$
\begin{array}{l|l}
6-11+2+27-18 & 2-5+6 \\
\underline{6-15+18} & \overline{3+2-3} \\
\quad 4-16+27 & \\
\quad \underline{4-10+12} & \\
\qquad -6+15-18 & \\
\qquad \underline{-6+15-18} &
\end{array}
$$

由是得其商爲 $3x^2+2xy-3y^2$。

用分離係數以行乘除二法。必須注意以零補足其任何缺少項之係數。

習　　題

試用分離係數法演次所示之運算。

1.　$(x^2-8x+16)(2x-3)$.

2.　$(x^2-4x+4)(x^2+4x+4)$.

3.　$(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.

4.　$(2x^2+5x+2)\div(2x+1)$.

5.　$(x^3+4x-16)\div(x-2)$.

6.　$(3xy-6y^2-2x^2)(8x^2-6y^2-5xy)$.

7.　$(9x^4-4x+13x^2+4-6x^3)\div(3x^2-x+2)$.

8.　$(x^4+4y^4)\div(x^2-2xy+2y^2)$.

9.　$(81a^4-171a^2b^2+25b^4)\div(9a^2-5b^2+9ab)$.

10.　$(4a^3-2a^2-3a^{-2}-5a^{-1}+2a)\div(2a^2-2-a^{-1})$.

11.　$(8x-12x^{\frac{2}{3}}y^{-1}+6x^{\frac{1}{3}}y^{-2}-y^{-3})\div(2x^{\frac{1}{3}}-y^{-1})$.

12.　問於各題內。有何式 (a) 不爲整者。(b) 不爲有理者。

備考　吾人通常所用十進數紀法。其實有分離係數之作用存焉。觀此甚爲有趣。例如今有數649。然可以看作爲$6\cdot10^2+4\cdot10+9$之簡寫法。是故十進數中任何數之諸數字。皆爲10之某方乘之分離係數也。

9. 綜合除法　此種除法。頗省手續。惟其除數祇限於二項式。

例　　題

1.　由通常除法。有

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-8x^2+9x-8 & x-2 \\ \cline{2-2}
3x^3-6x^2 & 3x^2-2x+5 \\ \cline{1-1}
-2x^2+9x & \\
-2x^2+4x & \\ \cline{1-1}
5x-8 & \\
5x-10 & \\ \cline{1-1}
2 & \text{餘數}
\end{array}
$$

上之除法。若依第8節例題2略去文字。且整列之。可使之簡省。但通常所用之法。又可較前法更簡。蓋因各部分積之第一項。恰僅爲上項之重複。故並可省略之。因得

$$
\begin{array}{r|l}
3-8+9-8 & 1-2 \\ \cline{2-2}
-6 & 3-2+5 \\ \cline{1-1}
-2 & \\
+4 & \\ \cline{1-1}
5 & \\
-10 & \\ \cline{1-1}
2 & \text{餘數}
\end{array}
$$

因除數 2 之前有負符號。故盡變其部分積中之各符號。今若以 $+2$ 代 -2。則可加所減之部分積於被除數。而代其相減。(此符號之變化。非爲一定必要者。不過於實際上更便宜耳。)由是置文字於水平綫內。且僅用除數之第二項變其符號。可得較前更簡約之方法如次。

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -8 & +9 & -8 & \underline{2} \\ & -6 & -4 & +10 & \\ \hline 3 & -2 & +5 & +2 & \end{array}$$

但此 $x-2$ 除 $3x^3-8x^2+9x-8$ 之完全除法。有緊要手續。不可不知。卽直綫下之數字 3, -2, 5 之一部分爲商 $3x^2-2x+5$. 此外所餘之部分 2 爲餘數。

2. $2x^4-14x^2-6x-54$. 以 $x+3$ 除之。

解法

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & +0 & -14 & -6 & -54 & \underline{3} \\ & -6 & +18 & -12 & +54 & \\ \hline 2 & -6 & +4 & -18 & 0 & \end{array}$$

故其商爲 $2x^3-6x^2+4x-18$。

因餘數爲零。故知 $x+3$ 得爲被除數之因子。如斯求因子之法。將用於22節習題 *5—21*。

習　題

以下各題。試用綜合除法除之。

1. 以 $x+3$ 除 x^2-x-12.

2. 以 $x-2$ 除 x^3-2x-4.

3. 以 $x-4$ 除 $x^3+2x+96$.

試用綜合除法。求習題 4, 6, 8 及 10 之餘數。

4. $(x^2-5x+6)\div(x-n)$.

5. x^2-5x+6 內。以 n 代換 x。取其所得之結果。與習題 4 內所得之餘數比較之。

6. $(x^2+bx+c)\div(x-n)$.

7. 置 n 代換 x^2+bx+c 內之 x。再比較其結果。

8. $(x^3+ax^2+bx+c)\div(x-n)$.

9. 於 x^3+ax^2+bx+c 內。以 n 代換其 x。取習題 8 之餘數。與此所得之結果比較之。

10. $(x^3-2x^2+6)\div(x-4)$.

11. 於 x^3-2x^2+6 內。以 4 代換其 x。取其結果。與習題 10 內所得之餘數比較之。

12. 從習題 4 至 11 內。試抽出普通之結論。

備考 用數係數以解三次方程式及高次方程式之漸近值之解法。實爲牛頓氏專心研究之一問題也。從其時迄於 1819 年。此種方針。大概成立。卽當威廉儒治荷爾奈氏 (William George Horner 1786–1837) 教授於巴西英格蘭。宣布用綜合除法以解方程式之時也。彼之程序。其本質甚與牛頓氏相似。而其創意之原則。布置簡明。且整列數之手續。極其優美。自後十九年中。此法略有變更。故所公布之荷爾奈氏方法。逐漸改頁。雖然。荷氏於大學教程無有便利。故彼不得稱爲大數學家。

10. 重要特別之積 多數之積爲通常所需用者。宜記憶之。以便卽時寫出。而得結果。以免實行乘法之繁。

I. 二項之和之平方。有次公式。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

II. 二項之差之平方。有次公式。

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

III. 二項之和及其差之積。有次公式。

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

IV. 有公項之兩二項式之積。有次公式。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

V. 多項式 $(a+b+c)$ 之平方。有次公式。

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

VI. 二項式 $(a+b)$ 之立方。有次公式。

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

同樣 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

口述之習題

1. 於前公式 I 至 IV。試各以言語表之。

試書出以下各題所示之運算。

2. $(x+3)^2$.　*6.* $(x^2-x)^2$.　*10.* $(3x^2-4xc)^2$.

3. $(x-5)^2$.　*7.* $(2x+c)^2$.　*11.* $(7x+4ax^2)^2$.

4. $(2x+4)^2$.　*8.* $(x-3c^2)^2$.　*12.* $(x^2-x^{-2})^2$.

5. $(4x-3)^2$.　*9.* $(4x+xc)^2$.　*13.* $(x^4-3x^{-4})^2$.

14. $(2a^x-a^{-x})(2a^x-a^{-x})(2a^x-a^{-x})\div(2a^x-a^{-x})$.