理工社®

[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学
真题大全解

CLASSIC

（精解分册 · 数学 三）

史上最全
含1987–2014年
全部真题

AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇

考研数学

真题大全解

理工社®

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解
（精解分册 · 数学三）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 精解分册. 数学三 / 张宇主编 . —北京:北京理工大学出版社,2014.7
ISBN 978－7－5640－9482－9

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 148153 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 15.5
字　　数 / 378 千字
版　　次 / 2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 46.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

——给读者一个全面的考研数学历史资料

先给读者讲个故事. 1637 年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:"方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解."现在说来,小学生都知道:$3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立. 然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上"乱写乱画":"你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,…,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geqslant 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了."这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战. 不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:"我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了."——这哪里是挑战? 简直就是挑衅!

数学界应战吗? 那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个"外行"难倒? 于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼兹等等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来. 一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了……直到 1993 年,也就是在费马提出这个定理的 356 年之后,才被美籍英裔数学家外尔斯证明出来,单单证明就写了 1000 多页. 外尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖("唯一"是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以前的数学家,但是当时的外尔斯已经 45 岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖).

费马的这个定理,被数学界称为"会下金蛋的鸡",因为在证明这个定理的数百年中,产生了好多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值. 因此,费马的这个定理被正式命名为:**费马大定理**. 你见过有几个定理叫"大定理"? 很少很少. 一个"大"字,足以体现这个定理的分量.

故事讲完了,这里讲了什么道理呢? 读者自己体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用"费马大定理"的"大"字,把我的这本书命名为:真题"大"全解. 因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准. 直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了如下两大特点:

第一,**考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大**. 考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身"喜好"的影响很小. 所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子.

第二,**考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须**. 为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了. 所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从

1987 年到今天积累下来的命制过的试题(这里还包括从未考过的备考卷上的试题)，以此为基础，“参考”“改编”甚至“照搬”这些题. 故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一，**考研数学试题收录的全面性**. 收录从全国统考以来所有的考研数学试题，给读者提供一个完整的历史资料，而不是部分试题 . 从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则.

第二，**考研数学试题解析的权威性**. 凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织的专家写的答案，参考其答案. 总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和精解分册. 试卷分册中，我将 1987 年至 2014 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；精解分册中，试题及其解析则按章节进行分类，方便读者按照章节的逻辑性研读真题. 其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除. 那么在试卷分册中，被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分. 当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们不仅在每套试卷后安排了答案速查栏目，同时也将试卷分册与精解分册做了全面的索引. 值得注意的是，本书仅为数学三的真题大全解，需考数学三的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学一与数学二的真题大全解.

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处. 我在《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》中已经给读者提出了建议：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，不要有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献. 感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2014 年 7 月 于北京

Contents 目录

第一篇 微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇

微 积 分

第1章 函数、极限与连续

一、判断题

1.1.[1987－Ⅳ,Ⅴ] $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$. ( )

答 应填×.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,但$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$,故错误.

1.2.[1988－Ⅳ,Ⅴ] 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$都存在,则极限$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$必存在. ( )

答 应填×.

解 取 $f(x)=x, g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$,但是$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$不存在,故错误.

二、选择题

1.1.[1987－Ⅳ,Ⅴ] 下列函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$.

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\leqslant 0,\\ \cos x, x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

答 应选(A).

解 由于 $f(x)=\ln x+\sin x$ 为初等函数,而初等函数在其定义区间内处处连续,则应选(A).

1.2.[1989－Ⅳ,Ⅴ] 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时

(A) $f(x)$是 x 等价无穷小.

(B) $f(x)$与 x 是同阶但非等价无穷小.

(C) $f(x)$是比 x 更高阶的无穷小.

(D) $f(x)$是比 x 较低阶的无穷小.

答 应选(B).

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 3}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6$,

则应选(B).

1.3.[1990－Ⅳ,Ⅴ] 设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$,则 $f(x)$是

(A)偶函数. (B)无界函数. (C)周期函数. (D)单调函数.

答 应选(B).

解 由于$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x\tan x e^{\sin x}=\infty$,则 $f(x)$无界.

1.4.[1991－Ⅳ,Ⅴ] 下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

(C) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$.

(D) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$.

答 应选(A).

解 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq -e$. 所以,不能选(C).

又 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e^{-1}\neq e$,所以,也不能选(D).

而
$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}},$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+t}=0,$$
则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^0=1\neq e$，应选(A)，不能选(B).

1.5.［1991－Ⅴ］ 设数列的通项为：$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$，x_n 是

(A)无穷大量．　(B)无穷小量．　(C)有界变量．　(D)无界变量．

答 应选(D).

解 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=\dfrac{(2k+1)^2+\sqrt{2k+1}}{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}2k+1+\sqrt{\dfrac{1}{2k+1}}=\infty\neq\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k+1}=0$，

因此，当 $n\to\infty$ 时，x_n 是无界变量.

1.6.［1992－Ⅳ］ 当 $x\to0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量？

(A)x^2.　(B)$1-\cos x$.　(C)$\sqrt{1-x^2}-1$.　(D)$x-\tan x$.

答 应选(D).

解 由于 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，则 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，则应选(D).

1.7.［1992－Ⅴ］ 当 $x\to0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量？

(A)x^2.　(B)$1-\cos x$.　(C)$\sqrt{1-x^2}-1$.　(D)$x-\sin x$.

答 应选(D).

解 由于 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，则 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}$是同阶无穷小，对于(D)选项，则有 $x-\sin x\sim\dfrac{1}{3}x^3$，故应选(D).

1.8.［1997－Ⅲ］ 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$是 $g(x)$的

(A)低阶无穷小.　(B)高阶无穷小.
(C)等价无穷小　(D)同阶但不等价的无穷小.

答 应选(B).

解 多次利用洛必达法则，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，并利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin(1-\cos x)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot(1-\cos x)\cdot\cos(1-\cos x)^2}{3x^2+4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{3x+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{3+8x}=0.$$

1.9.［1998－Ⅲ］ 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$的间断点，其结论为

(A)不存在间断点.　(B)存在间断点 $x=1$.
(C)存在间断点 $x=0$.　(D)存在间断点 $x=-1$.

答 应选(B).

解 由于 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x>1,\\ 1, & x=1,\\ 1+x & x<1,\end{cases}$ 显然，$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

1.10.［2000－Ⅲ］ 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A)存在且等于零. (B)存在但不一定为零.

(C)一定不存在. (D)不一定存在.

答 应选(D).

解 令 $\varphi(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$f(x)=1$，$g(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

显然，$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，故(A)不正确. (C)也被否定. 实际上，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在. 例如，令 $\varphi(x)=e^x-e^{-x}$，$f(x)=e^x$，$g(x)=e^x+e^{-x}$，显然，$\varphi(x)$、$f(x)$ 和 $g(x)$ 均满足题设条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. 故(D)为正确选项.

1.11.［2003－Ⅲ］ 设 $f(x)$ 为不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在.

(B)有跳跃间断点 $x=0$.

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在.

(D)有可去间断点 $x=0$.

答 应选(D).

解 由题 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 知 $x=0$ 是 $g(x)$ 的间断点，$x=0$ 是什么样的间断点由极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在与否决定. 由题给条件 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，因而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又由于 $f(x)$ 是奇函数，其图形关于原点中心旋转对称，故 $f(0)=0$，极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$，属于"$\dfrac{0}{0}$"可以用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{1}=f'(0)(\text{存在}),$$

所以 $x=0$ 是可以去掉的间断点，否定了(A)，(B)，(C)的结论，选择(D).

1.12.［2004－Ⅲ］ 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界？

(A)$(-1,0)$. (B)$(0,1)$. (C)$(1,2)$. (D)$(2,3)$.

答 应选(A).

解 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\dfrac{\sin3}{18}$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\dfrac{\sin2}{4}$.

定义函数

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin3}{18}, & x=-1,\\ \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{\sin2}{4}, & x=0,\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，因而 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上有界，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

又 $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

因而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 内都是无界的，不能选(B)，(C).

又 $$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\infty,$$

因而 $f(x)$在$(2,3)$内无界,故不能选(D),只有(A)正确.

1.13.［2004－Ⅲ］ 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点.

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点.

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$的连续点.

(D)$g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

答 应选(D).

解 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

令 $t=\dfrac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时 $t\to\infty$,则

$$\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}f(t)=a.$$

当 $a=0$ 时,有$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=g(0)$,$g(x)$在点 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a\neq g(0)$,$g(x)$在点 $x=0$ 处间断,因此 $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

1.14.［2007－Ⅲ］ 当 $x\to 0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B)$\ln(1+\sqrt{x})$.　　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

答 应选(B).

解 由于当 $x\to 0^+$时,

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x},\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2,$$

所以选项(A),(C),(D)均不正确.而

$$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}.$$

所以选项(B)正确.

1.15.［2008－Ⅲ］ 设函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的

(A)跳跃间断点.　　(B)可去间断点.　　(C)无穷间断点.　　(D)振荡间断点.

答 应选(B).

解 由于

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=f(0).$$

所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$的可去间断点,故应选择(B).

1.16.［2009－Ⅲ］ 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

答 应选(C).

解 由于当 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$时 $f(x)$的分母为零,所以 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$都是 $f(x)$的间断点.但是因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi},\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi},\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\frac{2}{\pi},$$

故 $x=0,\pm1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 而当 $x=k(k=\pm2,\pm3,\cdots)$ 时,

$$\lim_{x\to k}f(x)=\lim_{x\to k}\frac{x-x^3}{\sin\pi x}=\infty,$$

所以 $x=\pm2,\pm3,\cdots$ 都是 $f(x)$ 的无穷间断点.

综上可知, $f(x)$ 的可去间断点的个数为 3. 应选(C).

1.17.［2009－Ⅲ］ 当 $x\to0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$. (B) $a=1,b=\frac{1}{6}$. (C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$. (D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

答 应选(A).

解 由题意知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,\text{ 且 }b\neq0,$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^3},$$

至此可知应有 $a=1$, 若不然此极限不等于 1, 从而有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b},$$

所以
$$-\frac{1}{6b}=1,\quad\text{即}\quad b=-\frac{1}{6}.$$

综上知 $a=1,b=-\frac{1}{6}$, 故应选择(A).

1.18.［2010－Ⅲ］ 若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$, 则 a 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

答 应选(C).

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ae^x-(1-a^x)e^x}{1}=a-1,$

由题设知 $a-1=1$, 从而 $a=2$. 故应选择(C).

1.19.［2010－Ⅲ］ 设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有.

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$. (B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$. (D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

答 应选(C).

解 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=+\infty.$$

所以当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$.

故选项(C)正确.

1.20.［2011－Ⅲ］ 已知当 $x\to0$ 时, 函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量, 则

(A) $k=1,c=4$. (B) $k=1,c=-4$. (C) $k=3,c=4$. (D) $k=3,c=-4$.

答 应选(C).

解法 1 根据题意及洛必达法则, 有

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\frac{24}{ck(k-1)(k-2)}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{k-3}},\end{aligned}$$

由此可得 $k=3,c=4$, 因此选(C).

解法 2 根据泰勒公式，有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)(x\to 0),\sin 3x=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)(x\to 0),$$

所以

$$f(x)=3\sin x-\sin 3x=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3(x\to 0),$$

于是 $c=4,k=3$，因此选(C).

此外，用排除法也可得到正确选项.

首先，因为 $3\sin x\sim 3x\sim \sin 3x$，即 $3\sin x$ 与 $\sin 3x$ 是等价无穷小量，所以，$3\sin x-\sin 3x$ 是比 $3x$ 高阶的无穷小量，从而也是比 $cx(c\neq 0)$ 高阶的无穷小量，故排除选项(A)与(B). 其次，当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)>0$，当 $x\to 0^-$ 时，$f(x)<0$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\geqslant 0,$$

从而排除选项(D)，即选(C).

1.21.［2013－Ⅲ］ 当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$. (B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$. (D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

答 应选(D).

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以(A)中式子正确；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以(B)中式子正确；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{o(x^2)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=0$，所以(C)式子正确.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x}+\frac{xo(x^2)}{x^2}\right]=0$，故 $o(x)+o(x^2)=o(x)$，即(D)中式子不正确.

1.22.［2013－Ⅲ］ 函数 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

答 应选(C).

解 由函数的表达式可知需要考察的点只有三个：0，－1，1，在其他点处函数均连续.

因为 $$\lim_{x\to 0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1,$$

可知 $x=0$ 是函数的一个可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

可知 $x=-1$ 是函数的另一个可去间断点.

而 $$\lim_{x\to -1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\infty,$$

可知 $x=-1$ 是函数的无穷间断点，不是可去间断点.

综上可知，选项(C)符合题意.

1.23.［2014－Ⅲ］ 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$. (C) $a_n>a-\frac{1}{n}$. (D) $a_n<a+\frac{1}{n}$.

答 应选(A).

解 此题考查考生对极限定义的掌握，充分体现了考研命题重视基础的风格.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$，则 $\left| |a_n| - |a| \right| \leqslant |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$，

于是 $-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2}$，$\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$，

故选项(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ 入选，(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ 错误．

那么选项(C)，(D)呢？有考生这样做：

由于 $|a_n - a| < \varepsilon$，取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则 $-\frac{1}{n} < a_n - a < \frac{1}{n}$，于是 $a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$，选择(C)，(D)的考生不在少数．

为什么取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ 正确，而取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 就不正确了呢？不是说 ε 可以任取正数吗？事实上，这里有一个重要且深刻的问题，众多考生可能没有搞清楚．

①取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$，则 $\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$，如图 1.1－1：

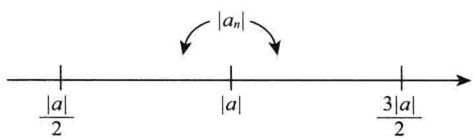

图 1.1－1

还可取 $\varepsilon = \frac{|a|}{3}, \frac{|a|}{4}, \frac{|a|}{5}, \cdots$，则 $|a_n|$ 的取值范围会越来越小，如图 1.1－2：

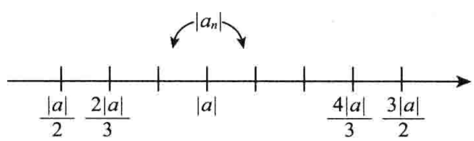

图 1.1－2

$\frac{2}{3}|a| < |a_n| < \frac{4}{3}|a|$，$\frac{3}{4}|a| < |a_n| < \frac{5}{4}|a|$，…，这都是正确的．因为，本质上说，$|a_n|$ 与 $|a|$ 亲密无间，多小的区间都可以．

②但若取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则 $a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$，这范围是不一定的．为什么？因为可再取 $\varepsilon = \frac{2}{n}$，则 $a - \frac{2}{n} < a_n < a + \frac{2}{n}$，$a_n$ 的取值范围扩大了，如图 1.1－3：

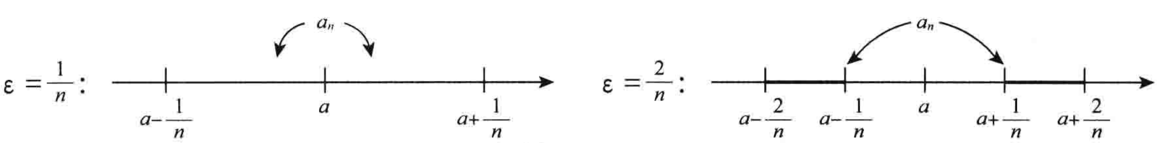

图 1.1－3

可以看出，a_n 不一定落在区间 $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ 内，也可以落在 $\left(a - \frac{2}{n}, a - \frac{1}{n}\right)$ 或 $\left(a + \frac{1}{n}, a + \frac{2}{n}\right)$ 内，于是 $a_n > a - \frac{1}{n}$ 是不一定成立的．

①，②的不同，关键是①给出的区间是"宏观"区间；②给出的是"微观"区间，也就是说②的区间本来就是"无穷小"区间了，a_n 落在任何一个"无穷小"区间均可以．