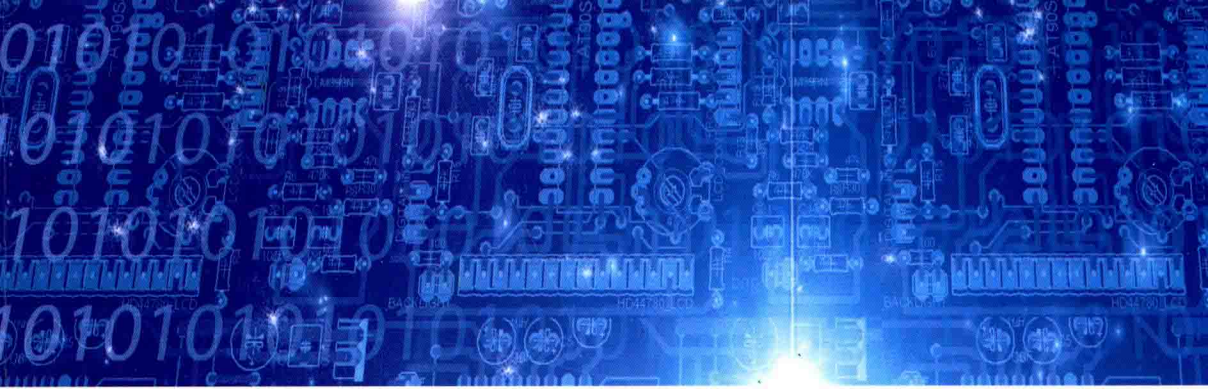




Singular Information Theory and Its Application

奇异信息论及其应用

骆建华 著 李元祥 校



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

Singular Information Theory and Its Application

奇异信息论及其应用

骆建华 著 李元祥 校



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书针对缺损 K 数据重构的关键问题展开讨论,通过揭示部分 K 数据与其余 K 数据的内在关系,建立奇异信息理论,构造基于奇异信息理论的 K 数据重构数学模型,给出获取模型参数的方法,解决由缺损 K 数据重构完整 K 数据的这一难题,实现缺损 K 数据的高精度重构。内容包括解析延拓理论、奇异信息理论、频谱延拓误差评估、基于奇异信息论的医学成像应用和基于奇异信息论的图像处理应用。

本书可作为高等院校信号与信息处理专业的教材和参考书,也可供图像处理专业人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

奇异信息论及其应用 骆建华著 上海 上海
交通大学出版社, 2015
ISBN 978-7-313-12822-5

I. ①奇… II. ②骆… III. ①信息论 IV. ①G201

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 061227 号



奇异信息论及其应用

著者: 骆建华

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出版人: 韩建民

印制: 常熟市文化印刷有限公司

开本: 787 mm×960 mm 1/16

字数: 133 千字

版次: 2015 年 4 月第 1 版

书号: ISBN 978-7-313-12822-5/G

定价: 28.00 元

地址: 上海市番禺路 951 号

电话: 021-64071208

经销: 全国新华书店

印张: 8.5

印次: 2015 年 4 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0512-52219025

前 言

在工业、国防、航天科技活动中,经常遭遇观测数据损坏、丢失等问题。例如,在工业探测 CT 成像中,由于环境条件的限制,只能在有限角度范围内进行扫描;因此,经常无法得到完整的扫描数据。在医学 X-CT 成像中,为了减少 X 射线对人体的伤害,使用稀疏扫描策略,则造成观测数据不全。在众多的光学成像中,由于光学系统尺寸有限,获取的图像总是缺失光学截止频率以外的频谱分量,使得观测数据不全。由于噪声、运动、大气湍流等原因,造成了遥感图像的部分频谱分量受损。另外,通讯传输系统中,由于信道带宽的限制,使得传输后的信号缺失信道带宽以外的频率分量。如何恢复这些损坏或丢失的观测数据一直是信号与信息处理领域研究的热点和难点。

目前,对于复原观测数据的缺损或缺失问题,存在两种学术观点。一种观点认为,丢失的或损坏的数据是不可以修复的,即用部分数据去复原丢失数据是不可能的。为了工程实际需要,人们按经验设定目标函数,在满足已有观测数据的约束条件下,在无穷多可行解中选择一个目标函数的最优解。因为这种观点首先否认了正确解的存在性,所以,无需去考虑其获得的解是否正确。利用这类方法进行研究时,需要具备以下两个条件:第一,目标函数能客观反映观测数据的特征;第二,能在可行解中搜索出最优解,该最优解常常与初值相关。目前这种观点是主流的,其代表性的研究方法主要有:压缩感知理论(compression sensing, CS)、全变分(total variation, TV)、小波变换(wavelet)、神经网络(neural network)和各类插值方法等。但是,在一些重要场合,人们往往不愿意

相信优化解,如医生不愿意使用经过后处理的图像。

另一种观点认为,丢失或损坏的数据在某些条件下可以正确恢复,其科学依据为著名的闭区间上解析函数延拓定理。目前,基于此种观点的代表性方法是自回归估计和频谱外插值方法,但这两种方法对于缺损数据的重构效果不太理想,最终导致了学者们对这种观点的研究热度锐减。之所以这两种方法不能取得很好的重构效果,是因为它们没有充分考虑图像频谱数据中的隐含信息。由于当前观测数据都是离散的,我们无法(也不可能)直接得到闭区域上的连续函数值;所以,若要利用这些已知的离散观测数据去求其延拓,显然比较困难,至今还没有出现很好的方法或结果。因此,很多学者认为,由离散观测数据去延拓它们缺损的其他频谱数据是不可能的神话。

本书根据解析函数延拓定理,推导出离散频谱数据的延拓理论,建立奇异信息理论(singular information theory, SIT),构造由部分频谱数据重构完整频谱数据的数学模型,提出奇异信息论频谱延拓方法(spectrum extensions by SIT, SSIT),并给出利用 SSIT 方法重构各种缺损数据的应用实例以及在图像处理中的应用实例。

本书中奇异信息理论的研究和发展,得到法国里昂国家科学应用研究院(INSA Lyon France)终身教授朱跃敏(Yuemin Zhu)博士,澳大利亚卧龙岗大学 ICT 研究所(ICT Research Institute, University of Wollongong, Australia)教授厉万庆博士的大力支持,在此表示衷心感谢。

本书是在国家 863 计划项目、国家自然科学基金项目的研究成果基础上撰写的。在此对国家科技部、国家自然科学基金委表示衷心感谢。

由于作者学识、时间有限,加上图像复原技术方面的新理论、新技术层出不穷,本书存在的疏漏和错误之处,恳请广大读者给予批评指正。

作者

2015 年 3 月

目 录

第 1 章 解析延拓理论	1
1.1 解析函数唯一性	1
1.2 解析延拓定理	3
1.3 图像谱函数解析定理	3
参考文献	5
第 2 章 奇异信息理论	7
2.1 奇异信息	7
2.2 奇异化算子性质	14
2.3 最佳奇异化算子	19
2.4 部分谱数据延拓	23
2.4.1 搜索最佳奇异化算子	25
2.4.2 摄取奇异信息	28
2.4.3 缺损频谱数据的复原	32
2.4.4 延拓误差分析	34
参考文献	37

第 3 章 频谱延拓误差评估	38
3.1 图像定性评价	38
3.2 定量评价	41
3.3 半定量评价	44
参考文献	46
第 4 章 奇异信息论在医学成像中的应用	47
4.1 部分频谱数据成像	47
4.1.1 一维部分 K 数据成像	48
4.1.2 二维笛卡儿网格扫描的部分 K 数据成像	57
4.1.3 二维非笛卡儿网格扫描的部分 K 数据成像	63
4.2 X-CT 稀疏投影成像	71
4.3 有限角投影 X-CT 成像	76
4.3.1 噪声对重构算法的影响测试	79
4.3.2 实际 X-CT 图像的算法测试	81
参考文献	82
第 5 章 奇异信息论在图像处理中的应用	84
5.1 图像去噪声	85
5.1.1 除噪声方法分类	85
5.1.2 除噪声方法	86
5.2 磁共振图像去截断伪影	100
5.3 图像非均场校正	107
5.4 超分辨率复原技术	118
参考文献	126

第 1 章 解析延拓理论

按照傅里叶光学的观点,光学成像系统相当于一个低通滤波器,由于受到光学衍射的影响,系统响应在由衍射极限分辨率所决定的某个截止频率上的值均为零^[1]。图像复原技术的目的就是要在提高图像质量的同时恢复成像系统截止频率之外的信息,重建高于系统分辨率的图像。对一幅图像,由于空域有界,其谱函数必然解析,即截止频率以上的信息通过卷积,叠加到了截止频率以下的频率成分之中。根据解析延拓理论,截止频率以上的信息可通过截止频率以下的谱函数重构得到,从而实现图像的超分辨率复原。图像的复原技术试图恢复成像过程中已经“丢失”的成像系统截止频率之外的信息,其基本的理论依据就是解析延拓理论和正则化理论^[2]。

本章主要介绍解析函数的解析延拓理论及图像谱函数的延拓定理。

1.1 解析函数唯一性

对于一般的复变函数 $f(z)$ ^[3],已知定义域 D 内某一子域 $d \subset D$ 上的函数值 $f(z)$, $z \in d$, 并不能确定它在其余定义域 $D - d$ 上的函数值。例如,一个在复平面上的复变函数 $f(z)$, $z \in D$, 其单位圆内的取值为常数 1,而在单位圆外的值可以任意。如果要求 $f(z)$ 在复平面 D 上连续,那么要求在单位圆外及其附近的那些函数值要无限接近于 1。这就是连续性制约,是一种非常弱的制约。但是,一个在区域 D 内解析的函数 $f(z)$,如果它在其子区域 $d \subset D$ 内的函数值已

经确定,那么,它在 D 内每一点的值就完全确定了。这就是区域内解析函数的唯一性。

定理 1.1(唯一性定理 1) 设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, 在区域 D 内解析, 并且在包含于 D 的某一区域 d 内有 $f(z) = g(z)$, 则在整个 D 内必有 $f(z) \equiv g(z)$ 。

证 设 d 是一个以 z_0 为中心的圆, 令 $h(z) = f(z) - g(z)$, 则在圆 d 上 $h(z) \equiv 0$ 。假设定理不成立, $f(z) \neq g(z)$, 则在 D 内存在一点 z_1 , 使得 $h(z_1) \neq 0$ 。设 L 是一条 z_0 和 z_1 之间的路径(见图 1-1), 当 z 沿 L 从 z_0 移动到 z_1 时, 起初观察到 $h(z) = 0$, 最终必然会遇到以下分界点 ω , 即

- (i) L 上 ω 前的所有点 z , $h(z) = 0$;
- (ii) 在 L 上存在任意接近 ω 的点 z , 使得 $h(z) \neq 0$ 。

由(i)推出在 L 上位于 ω 之前部分, $h(z)$ 的所有阶导数都为 0, 再由连续性, 在点 ω 处 $h(z)$ 及所有阶导数也全为 0, 也就是说, $h(z)$ 在 $z = \omega$ 处的泰勒展开系数全为 0, 即 $h(z)$ 在 $z = \omega$ 为中心的某一圆盘内为 0。但是这与条件(ii)相矛盾, 所以, 我们关于 $h(z)$ 不恒为 0 的假设是错误的, 必有 $h(z) = f(z) - g(z)$ 在 D 内恒为 0, 即 $f(z) \equiv g(z)$ 。

定理证毕。

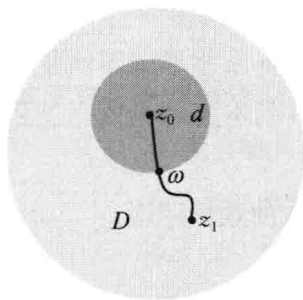


图 1-1 解析函数唯一性

定理 1.2(唯一性定理 2)^[4] 如果设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, 在复平面 D 内解析, $\{z_k\} = z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ 是 D 内不同点组成的收敛于 $z_0 \in D$ 无穷序列。如果有 $f(z_h) = g(z_h)$, $h = 1, 2, \dots, k, \dots$, 则在 D 内必有 $f(z) \equiv g(z)$ 。

证 设 D 是一个以 z_0 为中心, 半径为 R 的圆, 在 D 内对 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别进行泰勒展开为

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad |z - z_0| < R \\ g(z) &= b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad |z - z_0| < R \end{aligned}$$

根据假设, 即

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

当 $z_k \rightarrow \infty \rightarrow z_0$, 得到 $a_0 = b_0$, 于是上式变成

$$\begin{aligned} & a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots \\ &= b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

因为 $z_k \neq z_0$, 上式两边同除以 $z_k - z_0$ 后, 再让 $z_k \rightarrow \infty \rightarrow z_0$, 可得 $a_1 = b_1$; 如此重复, 可得 $a_h = b_h$, $h = 2, 3, \cdots, k, \cdots$ 。这样证明了以 z_0 为中心的圆区域 D 内 $f(z) = g(z)$ 。

为了证明对于包含 z_0 任意区域 D 内的任意一点 b , 都有 $f(b) = g(b)$, 先用一条分段光滑曲线连接 z_0 和 b , 这可参考文献[3]。

1.2 解析延拓定理

定义 1.1(解析延拓) 设复变函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内解析, 如果存在区域 $D_2 \supset D_1$ 内及在区域 D_2 内的解析函数 $f_2(z)$, 使得在区域 D_1 内有 $f_1(z) = f_2(z)$, 则称函数 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 从 D_1 到 D_2 的解析延拓, 简称解析延拓^[5]。

定理 1.3(解析延拓定理) 设复变函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 内解析, 区域 $D_2 \supset D_1$ 内的解析函数 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 从 D_1 到 D_2 的解析延拓, 则解析延拓 $f_2(z)$ 是唯一的。

证 设区域 $D_2 \supset D_1$ 内的解析函数 $f_3(z)$ 是 $f_1(z)$ 从 D_1 到 D_2 的一个解析延拓, 并且 $f_2(z) \neq f_3(z)$ 。因为 $f_2(z)$, $f_3(z)$ 都是 $f_1(z)$ 从 D_1 到 D_2 的解析延拓, 则在 D_1 内有

$$\text{存在 } z \in D_1, f_2(z) = f_1(z), f_3(z) = f_1(z)$$

$$\text{即存在 } z \in D_1, f_2(z) = f_3(z)$$

根据解析函数唯一性定理, 在 D_2 内处处有

$$\text{存在 } z \in D_2, f_2(z) = f_3(z)$$

证毕。

1.3 图像谱函数解析定理

定理 1.4 设函数 $g(x)$ 在 $0 \leq x \leq L$ 上有界, 则其傅里叶谱函数 $\mathcal{F}[g(x)]$

在复平面上解析($\mathcal{F}[\cdot]$ 表示傅里叶变换)。

证 函数 $g(x)$ 在 $0 \leq x \leq L$ 有界, 则傅里叶变换存在

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_0^L g(x) e^{iux} dx \\ &= \int_0^L g(x) (e^{iu})^x dx \end{aligned}$$

令 $z = e^{iu}$, 并代入上式得

$$G(z) = \int_0^L g(x) (z)^x dx$$

上式是关于 z 的指数函数, 在复平面 z 上处处可导, 即复平面上解析。

证毕。

定理 1.5 设函数 $g(x, y)$ 在 $0 \leq x, y \leq L$ 上有界, 则其谱函数 $G(u, v)$ 在复平面上解析。

证 因为 $g(x, y)$ 在 $0 \leq x, y \leq L$ 有界, 所以傅里叶变换函数可写为

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_0^L \int_0^L g(x, y) e^{i(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^L \int_0^L g(x, y) (e^{iu})^x (e^{iv})^y dx dy \end{aligned}$$

利用定理 1.4 的结论, 令 $z = e^{iu}$ 和 $G(z, y) = \int_0^L g(x, y) (z)^x dx$

上式一个解析函数的参变量积分为

$$G(z, v) = \int_0^L G(z, y) (e^{iv})^y dy$$

取复变量 $\dot{z} = e^{iv}$, 则

$$G(z, \dot{z}) = \int_0^L G(z, y) (\dot{z})^y dy$$

上式对复变量 z 和 $\dot{z}$ 均在复平面上处处可导, 即复平面上解析。

证毕。

推论 任何多维图像都是闭区间上有界函数, 它们的傅里叶谱函数都是解析函数。

在实践中, 常见的是数字图像不是连续图像, 频谱也是离散频谱, 为此给出

离散频谱延拓定理。设 $g_N(i, j)$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ 为非欠采样离散图像, 其离散频谱为

$$G(k_i, k_j), \quad k_i, k_j \in \Omega$$

其中, $\Omega = \{k_i, k_j = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1\}$ 。

定理 1.6 (离散频谱延拓定理) 若部分离散频谱空间 Θ 中的频谱数据为

$$G_\Theta(k_i, k_j), \quad k_i, k_j \in \Theta \subset \Omega$$

且 $G(k_i, k_j)$, $k_i, k_j \in \Omega$ 是 $G_\Theta(k_i, k_j)$ 从部分离散谱空间 Θ 到整体离散谱空间 Ω 的解析延拓, 则解析延拓 $G(k_i, k_j)$ 是唯一的。

证 设部分和整体离散频谱空间 Θ, Ω 对应的连续频谱空间分别为 θ, ω , 根据 Nyquist 采样定理从部分离散频谱数据 $G(k_i, k_j)$ ($k_i, k_j \in \Theta \subset \Omega$) 可准确重构出连续频谱空间 θ , 得到其连续频谱函数 $G(u, v)$ ($u, v \in \theta$)。

根据解析延拓定理, $G(u, v)$ ($u, v \in \theta$) 又可以唯一地从子频谱空间 θ 延拓到全频谱空间 ω 。然后再对 $G(u, v)$ ($u, v \in \omega$) 进行 Nyquist 离散便得到完全离散频谱 $G(k_i, k_j)$ ($k_i, k_j \in \Omega$)。

证毕。

图像的噪声、低分辨率及运动模糊等问题的本质都是图像的谱函数受到污染损坏、缺失的问题, 所以, 只要能够从受损的图像谱函数中提取出精确无误的部分离散频谱数据, 就可以运用解析函数唯一性定理、延拓定理来复原受损的其余离散频谱数据, 将其还原到受损前的高质量图像。解析函数的延拓性定理与解析函数的唯一性定理告诉我们, 利用给定的图像频谱数据是可以复原出其余频谱数据的, 并且复原的结果是唯一的, 尽管这两个定理没有给出具体的求解方法。

如何利用已知的频谱数据去重构出完整的频谱数据呢? 在重构的过程中会遇到什么样的困难? 是否存在某种最佳的快速重构算法呢? 这一系列问题将在本书的第2章——奇异信息理论中给出答案。

参考文献

- [1] Castleman K R. 数字图像处理[M]. 朱志刚, 译. 北京: 电子工业出版社, 2002.
- [2] 卓力, 王素玉, 李晓光. 图像/视频的超分辨率复原[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2011.

- [3] 陈方权, 蒋绍惠. 解析函数论基础[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2008.
- [4] 郭洪芝, 滕桂兰. 复变函数[M]. 天津: 天津大学出版社, 2004.
- [5] 李建林. 复变函数积分变换[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005.

第 2 章 奇异信息理论

在生物科学研究中,20 世纪 70 年代发展起来的基因克隆技术无疑是一项开创历史的革命性研究技术。它是将体外含有目的基因或其他有意义的 DNA 片段同能够自我复制的载体 DNA 连接,然后将其转入宿主细胞或受体生物进行表达或进一步研究的分子操作过程,该技术可概括为分、切、连、转、选。对于任一幅利用二进制编码的图像而言,它自身是否也隐藏着某些“目的基因”和具有“自我复制的 DNA 载体”呢?如果有,它在哪里?怎样才能准确地找出它们呢?如果能够准确地找出它们,是否就一定可以实现图像处理中的“基因克隆”技术呢?

从纯理论的数学观点来看,在解析函数中,解析唯一性定理和解析延拓定理告诉我们,由于部分谱函数值可完全决定整个谱函数,因此这部分谱函数值必定含有决定整个谱函数的隐含信息及其表达机制。对于我们而言,现在最关键的问题就是能否从已有部分谱数据中准确地获取这些隐含信息,并利用完整谱函数将它们表示出来。我们称这些隐含信息为奇异信息,奇异信息表达谱函数的理论为奇异信息论(singular information theory, SIT),该理论就是本书要介绍的在图像处理中具有革命性创新的理论。

2.1 奇异信息

大家熟悉的函数表达,如傅里叶级数、幂级数、多项式表达等,这些函数表达

的一个共同点都是预先选定用于表达的函数系,然后再确定加权系数,最后以无穷级数的形式来表达函数。这种传统方法缺乏对延拓频谱函数的针对性,难以取得很好的效果。我们总结了长期部分频谱数据复原研究实践的经验,认为尽量少用待定谱函数加权和来表示将要延拓的谱函数。待定函数系和待定参数可以从部分谱空间函数中获取。

定理 2.1(奇异谱数学模型) 任给一个二维离散函数 $g(i, j)$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$, 其谱函数 $G(k_i, k_j)$ ($k_i, k_j \in \Omega$) 都可以表示为

$$G(k_i, k_j) = \sum_{c=1}^q a_c e^{-\frac{2\pi}{M}(k_i i_c + k_j j_c) \sqrt{-1}} H(k_i, k_j), k_i, k_j \in \Omega \quad (2-1)$$

其中, $H(k_i, k_j)$ 为待定函数,称为**奇异谱函数**, (a_c, i_c, j_c) ($c = 1, 2, \dots, q$) 为待定模型参数, $q \ll N^2$ 为信息量。信息量决定待定模型参数的个数,体现了谱函数 $G(k_i, k_j)$ 的复杂程度。

证 设任给一个二维离散函数 $g(i, j)$ 的谱函数 $G(k_i, k_j)$ ($k_i, k_j \in \Omega$) 都可以表示为

$$G(k_i, k_j) = \sum_{c=1}^q a_c e^{-\frac{2\pi}{M}(k_i i_c + k_j j_c) \sqrt{-1}} H(k_i, k_j), k_i, k_j \in \Omega$$

则对两边取傅里叶逆变换得

$$g(i, j) = \sum_{c=1}^q a_c \delta(i - i_c, j - j_c) * h(i, j), i, j \in 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-2)$$

其中, $*$ 表示卷积, $h(i, j)$ 为奇异函数, $\delta(i - i_c, j - j_c)$ 为狄拉克函数。它们的关系式为

$$h(i, j) = \mathcal{F}^{-1}[H(k_i, k_j)] \quad (2-3)$$

式中, $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ 表示傅里叶逆变换。

$$\delta(i - i_c, j - j_c) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{2\pi}{M}(k_i i_c + k_j j_c) \sqrt{-1}}\right] \quad (2-4)$$

有

$$\delta(i-i_c, j-j_c) = \begin{cases} 1, & i=i_c, j=j_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2-5)$$

为了确定式(2-2)中的待定参数,需要定义一个算子,使得对函数 $g(i, j)$ 进行卷积后,函数中绝大数函数值为零。特给这个算子定义如下:

定义 2.1(奇异化算子) 如果一个离散函数 $\phi(i, j)$ 与函数 $g(i, j)$ 的卷积

$$g_{\phi}(i, j) = \phi(i, j) * g(i, j), i, j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2-6)$$

使得

$$g_{\phi}(i, j) = \sum_{c=1}^q a_c \delta(i-i_c, j-j_c) \quad (2-7)$$

$$q = \|g_{\phi}(i, j)\|^0 \ll N^2 \quad (2-8)$$

其中, $\|\cdot\|^0$ 表示 0 范数, 0 范数就是函数中出现非零函数值的个数, 即

$$\|g_{\phi}(i, j)\|^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0, j=0}^{N-1} |g_{\phi}(i, j)|^{\epsilon} \quad (2-9)$$

则称 $\phi(i, j)$ 为 $g(i, j)$ 的奇异化算子。奇异化算子与一个函数 $g(i, j)$ 的卷积, 其卷积后函数的非 0 函数值的数量远小于函数值总数 N^2 的离散函数。

定义 2.2(奇异信息函数) $g_{\phi}(i, j)$ 具有表达谱函数 $G(k_i, k_j)$ ($k_i, k_j \in \Omega$) 的全部信息, 其中 $g_{\phi}(i, j)$ 中的非零值为 a_c ($c = 1, 2, \dots, q$), 非零点坐标为 (i_c, j_c) ($c = 1, 2, \dots, q$), 构成式(2-1)或式(2-2)中的全体参数 (a_c, i_c, j_c) ($c = 1, 2, \dots, q$), 称 $g_{\phi}(i, j)$ 为奇异信息函数。

为求式(2-1)中的待定参数 (a_c, i_c, j_c) ($c = 1, 2, \dots, q$), 用奇异化算子对式(2-2)两边同时卷积得

$$g_{\phi}(i, j) = \sum_{c=1}^q a_c \delta(i-i_c, j-j_c) * \phi(i, j) * h(i, j) \quad (2-10)$$

只要令

$$\phi(i, j) * h(i, j) = \delta(i, j)$$

则得

$$g_{\phi}(i, j) = \sum_{c=1}^q a_c \delta(i - i_c, j - j_c).$$

这样式(2-2),也就是式(2-1)奇异谱数学模型的参数,就是奇异信息函数 $g_{\phi}(i, j)$ 的非零值及坐标。定理 2.1 证毕。

定理 2.1 奇异谱数学模型中离散谱函数的表达式(2-1)中,不但要求待定参数 $(a_c, i_c, j_c) (c = 1, 2, \dots, q)$, 而且要求待定函数 $H(k_i, k_j)$ 。这些与传统的方法有很大不同。在大家熟悉的幂级数、傅里叶级数、三角级数中,都是设定用于级数表达的函数,待定的参数只是加权系数。

推理 2.1(一维) 任给一维离散函数 $g(i) (i = 0, 1, \dots, N-1)$, 的谱函数 $G(k) (k \in \Omega)$ 都可以表示为

$$G(k) = \sum_{c=1}^q a_c e^{-\frac{2\pi}{M}(k i_c) \sqrt{-1}} H(k), k \in \Omega \quad (2-11)$$

其中, $H(k)$ 为待定函数,称为一维奇异谱函数; $(a_c, i_c) (c = 1, 2, \dots, q)$ 为待定模型参数; $q \ll N$ 为信息量。证明从略。

定义 2.3(最佳奇异化算子) 设函数 $g(i, j) (i = 0, 1, \dots, N)$ 的奇异化算子集合为 $\{\phi_c(i, j), c = 1, 2, \dots, k\}$ 。

若

$$\phi^*(i, j) = \arg \min_c \{ \|\phi_c(i, j) * g(i, j)\|^0 \} \quad (2-12)$$

则称 $\phi^*(i, j)$ 为 $g(i, j)$ 的最佳奇异化算子。

定理 2.2 若 $\phi(i, j)$ 为 $g(i, j)$ 的奇异化算子,则

(1) 奇异化算子 $\phi(i, j)$ 与奇异函数 $h(i, j)$ 卷积等于狄拉克函数,即

$$h(i, j) * \phi(i, j) = \delta(i, j) \quad (2-13)$$

(2) 谱函数 $G(k_i, k_j) = \mathcal{F}[g(i, j)]$, 任意 $\Phi(k_i, k_j) \neq 0$, 可以表示为

$$\text{即} \quad G(k_i, k_j) \big|_{\Phi(k_i, k_j) \neq 0} = \sum_{c=1}^q a_c e^{-\frac{2\pi}{M}(i_c k_i + j_c k_j) \sqrt{-1}} \frac{1}{\Phi(k_i, k_j)} \quad (2-14)$$

证(1) 因为 $\phi(i, j)$ 为 $g(i, j)$ 的奇异化算子,有