高等学校教材 15

复变函数与积分变换

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES & INTEGRAL TRANSFORMATION

王晶囡　翟莉　李锐　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 学 校 教

复变函数与积分变换

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES & INTEGRAL TRANSFORMATION

王晶囡 翟莉 李锐 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书结合理工科专业的特点，介绍了复变函数与积分变换的基本知识与基础理论. 内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、幂级数、洛朗展式与孤立奇点、留数理论及其应用、傅里叶变换和拉普拉斯变换共8章内容，并精选了大量的自测题，题型丰富，附有详细答案，在附录中还给出了积分变换简表等内容. 全书具有以简驭繁、循序渐进、层次分明的特点.

本书可作为高等院校理工科专业(包括信科专业)本科教材，也可作为远程教育教学教材及自学用书. 另外，还可供一般的数学工作者及工程技术人员作为参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/王晶囡，翟莉，李锐主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5603-4890-2

Ⅰ.①复… Ⅱ.①王… ②翟… ③李… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 190685 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 17.5　字数 312 千字
版　　次　2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4890-2
定　　价　48.00 元

序

复变函数理论产生于 18 世纪，于 19 世纪得到了全面的发展. 复变函数理论对数学领域许多分支的发展有很大的影响，它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等多个学科. 更重要的是，它在其他学科中也得到了广泛的应用，推动了许多学科的发展，在解决某些实际问题中也是强有力的工具，它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程，如数学、信息与计算科学、机械、电气等专业.

世界正在走向以数字化为特征的信息时代，信息与计算科学无疑是这个进程中最重要的学科之一. 数学是信息科学走向成熟与辉煌的基础. 考虑到数学和非数学专业的特点，有针对性地设计一套适合理工科专业的高校数学教材是本书编写的目的和理念. 教材是教与学的一个环境，它应具有多层次的包容性，由浅入深，突出重点和学科框架. 编者根据多年教学实践和教学经验，结合理工科专业的特点，在编写本书时，注意了下列几点：

1. 对于与高等数学中平行的概念，如极限、连续、微分等内容，既指出了相似之处，又强调了本质的不同.

2. 指出了由于定义域和值域范围的增大，在实变函数中的初等函数的某些性质将发生改变.

3. 将实例与某些概念和公式建立联系，使初学者了解学习的目的与意义. 如柯西积分公式就可以解释“如果测得地球表面各点的温度，就能测出地心的温度”.

4. 突出了留数在利用拉普拉斯(Laplace)变换求解常微分方程时的应用.

5. 配备了适量的典型例题、习题和大量自测题，并附有答案或提示，便于读者自学和教学工作者参考.

6. 因篇幅有限而不能给出的定理证明，大多都指出参考资料，对于不属于复变函数的基础内容加上了 * 号，供有余力的学生选学.

本书为了锻炼学生的分析推理能力，我们不但给出了一些定理的细致证明过程，还给出了理论的应用，强调了一题多解的思想. 从课程内容出发，本书由复变函数和积分变换两部分组成，主要参考了钟玉泉编写的《复变函数论》(第三版)和严镇军编写的《复变函数论》(第二版)等书的内容. 本书具体包括复数与复变函数、

解析函数、复变函数的积分、幂级数、洛朗展式与孤立奇点、留数理论及其应用、傅里叶变换和拉普拉斯变换共 8 章主要内容，还有大量的自测题和详细解答、附录积分变换简表和中英文单词对照等内容.

本书可作为高等院校理工科各专业的本科教材或作为信息与计算科学专业的教学用书，也可作为远程教育教学教材及自学用书. 另外，还可供一般的数学工作者、工程技术人员作为参考书.

全书由王晶囡组织编写、负责统稿，并与我系翟莉老师和黑龙江大学数学系李锐老师共同完成了本书的编写工作. 其中王晶囡主要负责第 4 章、第 6 章及第 8 章的编写；翟莉主要负责第 3 章、第 5 章、自测题 1～自测题 11、附录 A 和参考文献的编写；李锐主要负责第 1 章、第 2 章、第 7 章、自测题 12～自测题 19 以及附录 B 和中英文单词对照的编写. 在本教材的编写过程中还得到了赵辉、王剑飞和孟桂芝等老师的帮助，及应用数学系与学院的大力支持，作者在此深表感谢.

限于编者水平，谬误之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2014 年 7 月

于哈尔滨理工大学应用数学系

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

解析函数是复变函数的主要研究对象，在解决实际问题中有着广泛的应用．本章熟悉复数的概念，掌握复数的四则运算及共轭运算；熟悉复平面、模与辐角的概念，熟练掌握复数的各种表示法；了解复球面、无穷远点及扩充复平面的概念．熟练掌握乘积与商的模和辐角定理，方根运算公式．理解区域、简单曲线、单连通区域与多连通区域的概念；理解复变函数以及映射的概念；了解复变函数与二元实函数的关系；了解复变函数的极限与连续的概念、性质，熟悉复变函数的极限和连续性与实变函数的极限和连续性之间的区别与联系．

1.1　复　　数

1.1.1　复数定义

“复数”术语由高斯于 1831 年首次给出，在这以前它被称为“虚数”或“不可能的数”．这个概念的给出是为了表示一元二次方程

$$x^2+1=0$$

的解，从而引入了虚数单位 i，把实数域扩大了，形成了形式意义上的复数定义．

定义 1.1　形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x,y 为任意实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位．又记 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$，分别称为 z 的实部与虚部．

与实数一样，也建立了复数的运算法则和规律，来解决和解释数学和工程等方面出现的问题．

1.1.2　复数运算

对于两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，有：

加减法：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$；

乘法：$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+y_2x_1)$；

除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0)$；

共轭运算：$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；$\bar{\bar{z}}=z$；

$z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

例 1.1 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\bar{z}$.

解 $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\Rightarrow\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow z\bar{z}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

1.2 复数的几何表示

定义 1.2 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与坐标平面上的点 (x,y) 构成一一对应的关系，用点 (x,y) 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，此时直角坐标平面称为复平面，记作 **C**. x 轴称为实轴，y 轴去掉原点称为虚轴.

定义 1.3 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为模，$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，如图 1.1.

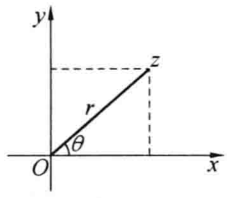

图 1.1

定义 1.4 以 x 轴为始边，以向量 $\overrightarrow{Oz}$ 为终边的角称为 z 的辐角，$\mathrm{Arg}\ z=\theta$.

定义 1.5 辐角有无穷多个，其中满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为辐角主值，记作

$$\theta_0=\arg z$$

可以利用 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 表示辐角主值，具体情况如下

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & (x>0,y>0)\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & (x<0,y>0)\\ -\pi+\arctan\dfrac{y}{x} & (x<0,y<0)\\ \arctan\dfrac{y}{x} & (x>0,y<0)\end{cases}$$

轴上的主辐角：当 z 在上半虚轴时，主辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$；当 z 在下半虚轴时，主辐角为

$-\frac{\pi}{2}$；当 z 在负实轴时，主辐角为 π；当 z 在正实轴时，主辐角为 0.

几何意义：两个复数 z_1 和 z_2 的加减法运算和相应向量的加减法运算一致，如图 1.2 所示. 复数 z 和它的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称.

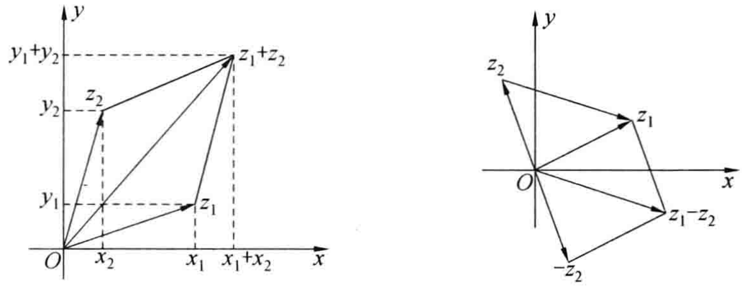

图 1.2　加减法几何表示

定义 1.6　将 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的三角(极坐标) 表示法.

定义 1.7　将 $re^{\mathrm{i}\theta}$ 称为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的指数表示法.

例 1.2　将复数 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 化为三角表示与指数表示.

解　有

$$r=|z|=\sqrt{12+4}=4,\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=-\frac{5}{6}\pi$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$$

定理 1.1　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数乘积的辐角等于两个辐角的和(图 1.3).

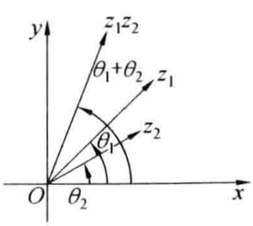

图 1.3

定理 1.2　两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

定义 1.8　将 z^n 称为 z 的 n 次幂，表示 n 个相同复数 z 的乘积.

定义 1.9　将 $\sqrt[n]{z}$ 称为 z 的 n 次根，表示 n 个不相同复数 $w=\sqrt[n]{z}$，满足 $w^n=z$.

z 的 n 次幂与 n 次根的计算公式如下：首先将复数 z 改写成三角形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

那么
$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

为了求 z 的 n 次根 $w = \sqrt[n]{z}$，将 w 也改写成如下三角形式

$$w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

那么会得到 n 个不同的 w，即

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

例 1.3 若 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^n = (1-\sqrt{3}\mathrm{i})^n$ 成立，n 为整数，求 n 的值.

解 有

$$\begin{cases} (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right) \\ (1-\sqrt{3}\mathrm{i})^n = 2^n\left(\cos\dfrac{-n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{-n\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{3} = \frac{-n\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow n = 3k$$

其中，k 为整数.

例 1.4 将通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解 设通过点 z_1 和 z_2 直线上的点为 $z = x + \mathrm{i}y$，(x, y) 可以用参数方程来表示

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

所以，当 $t \in (-\infty, +\infty)$ 时，$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ 表示通过点 z_1 和 z_2 的直线的参数方程；当 $t \in [0, 1]$ 时，表示从 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程(图 1.4).

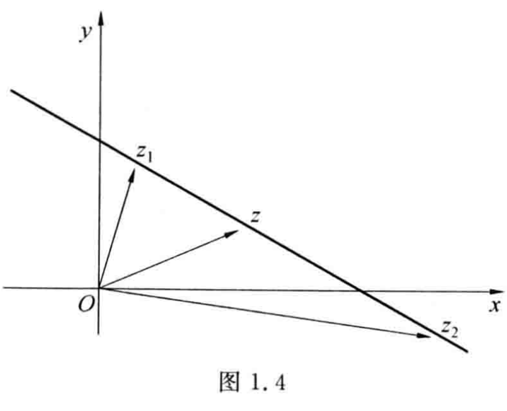

图 1.4

例 1.5　求下列复数方程所表示的曲线.

(1) $|z-2\mathrm{i}|=1$；　(2) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}-z)=3$.

解　如图 1.5 所示，(1) 是以 (0,2) 为圆心以 1 为半径的圆；

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，那么

$$\mathrm{i}-z=-x+(1-y)\mathrm{i}\Rightarrow\mathrm{Im}(\mathrm{i}-z)=1-y=3\Rightarrow y=-2$$

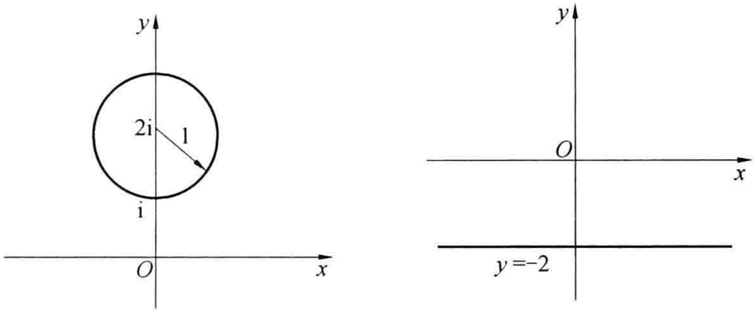

图 1.5

定义 1.10　如图 1.6 所示，作一个与复平面切于原点 O 的球面. 将原点称为 S(南极)，过 S 且垂直 z 平面的直线与球面交于点 N(北极)，则球面上任一点 P 都有复平面上一点 z 与之对应，规定北极 N 点可以看成与复平面上模为无穷大的假想点相对应，这个假想的点称为无穷远点，并记为点 ∞.

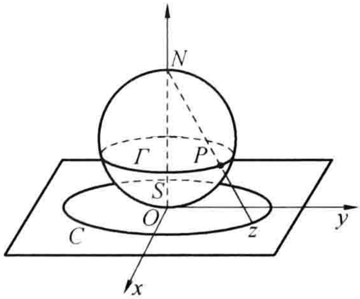

图 1.6

定义 1.11　复平面加上点 ∞ 后称为扩充复平面，常记作 $\mathbf{C}_\infty$，$\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}+\{\infty\}$.

定义 1.12　与扩充复平面对应的就是整个球面，即球面上每一点都有唯一的一个复数 z 与之对应，该球面称为复球面.

1.3 平面点集的一般概念

复变函数的定义域和值域与实变函数的有所不同，都是用点集刻画的. 下面介绍一下复平面的点集.

定义 1.13 将平面上以 z_0 为中心，以 δ(任意的正数) 为半径的圆内部的点集，称为 z_0 的 δ 邻域，记为 $U_{z_0}(\delta)$，即 $U_{z_0}(\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$；称 $U_{z_0}^0(\delta)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$ 为 z_0 的 δ 去心邻域.

定义 1.14 设 G 为一平面点集，z_0 为 G 中的任意一点，如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内的所有点都属于 G，那么称 z_0 为 G 的内点.

定义 1.15 如果 G 内的每一个点都是它的内点，那么称 G 为开集.

定义 1.16 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下面两个条件：

i) D 是一个开集；

ii) D 是连通的，就是说 D 中任何两点都可以用完全属于 D 内部的一条折线联结起来(图 1.7).

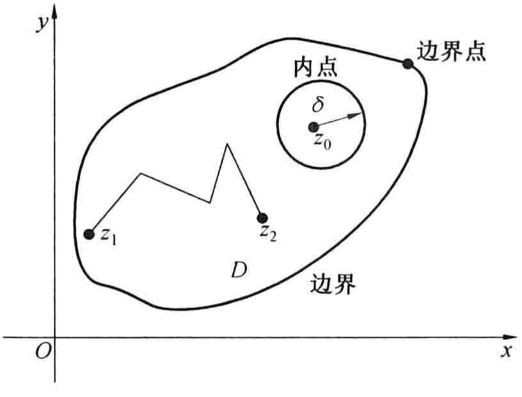

图 1.7

定义 1.17 设 D 为一个区域，如果点 P 的任意小的邻域内总包含有 D 中的点和不包含 D 中的点，那么称点 P 为区域 D 的边界点.

定义 1.18 D 的所有的边界点组成的点集称为 D 的边界.

定义 1.19 区域 D 与它的边界一起构成的点集称为闭区域，简称闭域.

定义 1.20 复平面上的一个区域 D，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于 D，则该区域称为单连通区域.

定义 1.21　一个区域如果不是单连通区域，则称为多连通区域.

1.4　复变函数

定义 1.22　设 G 是一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合. 如果有一个确定的法则 f 存在，按照这个对应法则，对于集合 G 中的每一个复数 z，就有一个或几个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，那么称复变数 w 是复变数 z 的函数（简称复变函数），记作 $w=f(z)$.

注　复变函数 $f(z)$ 与实变函数不同的是它不一定是单值函数，如果 z 的一个值对应着 w 的一个值，那么称函数 $w=f(z)$ 为单值函数，如 $w=\arg z$；如果 z 的一个值对应着 w 的两个或两个以上的值，那么称函数 $w=f(z)$ 为多值函数，如 $w=\operatorname{Arg} z$.

设 $z=x+\mathrm{i}y, w=u+\mathrm{i}v$，则函数关系 $w=f(z)$ 相当于实变量 x,y 的两个实值函数

$$u=u(x,y), v=v(x,y)$$

为了给出 $w=f(z)$ 的几何意义，取 z 平面和 w 平面分别表示自变量和因变量所在的平面，对 z 平面上点集 E 中的每个点，根据对应法则 $w=f(z)$，在 w 平面上可描出相应一个点 $w(f(z))$. 当点 z 在 z 平面跑遍点集 E 时，就相应点 w 在 w 平面跑遍平面上的一个点集 G.

例如当 $w=\dfrac{1}{z}$ 时，则由

$$u+\mathrm{i}v=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}$$

有

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

如果在 z 平面的点集 E 表示以 $(1,0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，即 $(x-1)^2+y^2=1$. 该圆可改写为 $\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$，则对应在 w 平面的点集 G 是一条平行于 v 轴的直线，如图 1.8 所示，即 $u=\dfrac{1}{2}$.

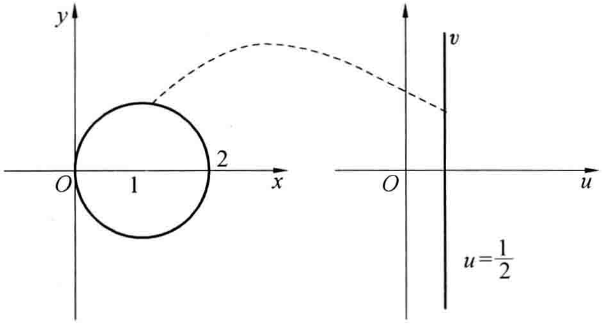

图 1.8

定义 1.23 设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内.如果有一确定的数 A 存在,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,相应的必有一正数 $\delta(\varepsilon)(0<\delta\leqslant\rho)$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,那么称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向 z_0 时的极限,记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

这个定义在几何上意味着:当自变量 z 进入 z_0 的一个充分小的 δ 的去心邻域时,它们的像点就落入 A 的一个给定的 ε 邻域,如图 1.9 所示.与实变函数极限的定义在形式上很像,表面上是将自变量 x 改写成 z,它们的本质区别在于,$x\to x_0$ 趋向的方向是左右的,而 $z\to z_0$ 对于复数趋向的方向则是四面八方的.

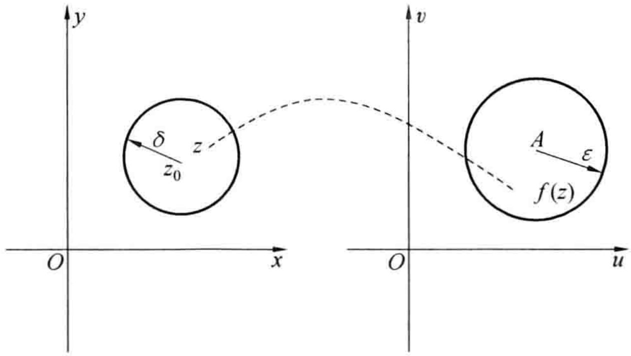

图 1.9

定义 1.24 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续,则称 $f(z)$ 在区域 D 内连续.

定理 1.3 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$A=u_0+\mathrm{i}v_0$,$z=x_0+\mathrm{i}y_0$,那么 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$

的充要条件是：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

定理 1.4 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，那么：

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

例 1.6 证明函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证明 当 z 沿正实轴 $\arg z=0$ 趋于零时，$f(z)\to 1$；当 z 沿正虚轴 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$ 趋于零时，$f(z)\to 0$. 故$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=A$ 不存在.

习 题 1

1. 求 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$ 的值.

2. 求 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的三角表示形式.

3. 问 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上 $x^2+y^2=4$ 的曲线映射成 w 平面上的怎样的曲线？

4. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

5. 若 $|\beta|<1$，$|\alpha|=1$，求证 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\alpha\bar{\beta}}\right|=1$.

习题 1 答案

1. 答：解一 原式 $=\left(\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}\right)^7=(-\mathrm{i})^7=\mathrm{i}$.

解二 原式$=\left(\dfrac{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}\right)^7$