MT 小学数学教师·新探索 XIN TAN SUO

XIAOXUE SHUXUE JIAOSHI

罗永军 著

长方形面积计算教学研究

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL PUBLISHING HOUSE

小学数学教师·新探索 XIN TAN SUO
XIAOXUE SHUXUE JIAOSHI

罗永军 著

长方形面积计算教学研究

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据
长方形面积计算教学研究 / 罗永军著. —上海：
上海教育出版社，2013.11
(小学数学教师·新探索)
ISBN 978-7-5444-4604-4

Ⅰ. ①长… Ⅱ. ①罗… Ⅲ. ①小学数学课—教学研究
Ⅳ. ①G623.502

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第247384号

小学数学教师·新探索
长方形面积计算教学研究
罗永军 著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易文网 www.ewen.cc
地 址 上海永福路 123 号
邮 编 200031
经 销 各地新华书店
印 刷 上海市印刷十厂有限公司
开 本 700×1000 1/16 印张 14 插页 3
版 次 2013 年 11 月第 1 版
印 次 2013 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-4604-4/G·3648
定 价 28.00 元

序

教师是教育的根本。教师专业的发展是教师的根本。如何使教师的专业得到较快的发展是一切懂教育的人十分关注的问题。教师的专业发展实质上是希望教师越来越聪明，不同职业的人要聪明起来有许多共同的途径，比如，都要投入，都要勤奋，都要多读书，等等。但当不同的职业作为专业时，一定也有着它特别的方法。什么是小学数学教师的专业发展特别的途径与方法呢？以“小学数学的课例作为研究的载体”是专业得到较快发展的特质之一。如何展开以课例为载体的研究，本书提供了很好的范例，给出了具体的操作方法，特别是对老师们如何开展以课例为载体的研究，提供了很大的参考价值。

本书从多个维度对长方形面积的教学进行了深入的研究，每一个维度都能给我们的教学提供理论和实践两方面的启示与操作方法。

本书中“本体性知识的解读与启示”这部分内容，是让读者能够提高自己的数学知识水平。大家知道，一个小学数学教师自身的数学知识水平如何，必将直接影响着他们的教学水平。但从目前小学数学教师的学历来看，只有极少部分教师是从数学系专科或本科毕业的，自数学专业研究生毕业的就更为稀少。因此，小学数学教师的数学素养可谓“先天不足”。而如果只是空洞地讲一些高等数学知识，常常会使一线教师感到“无用”。本书提供的是结合长方形面积这一节课例，阐述关于长方形面积相关的数学知识，这样的阐述可以切实使老师们感到“有用”，直接对课堂教学产生影

响，比较好地解决“无用”的问题，相信读者也一定可以通过对这部分内容的阅读和思考，使自己在长方形面积的教学中，真正拥有“一桶水”。

从理论上说，所有数学教师在教学前都应该认真阅读理解国家的大纲或课程标准。只有从大纲或课程标准的要求出发来思考某一内容的教学问题时，才可能使教学更为清晰。本书中“大纲或课标的要求与启示”这部分内容，是从历史的角度，从国家标准的高度，让读者明确长方形面积这一课的“地位”。

我们国家教材的多样化局面来之不易。有了多套教材后，了解不同教材的特点，吸取各套教材的长处才有可能。通过阅读本书中的“教材比较”这部分内容，相信读者会更进一步明确不同时期的和同一时期的小学数学教材，在编写长方形面积这节课时的风格与特点。这种纵向与横向的比较，会让我们感受到历史的变迁和当今时代的繁荣，会对我们更好地把握现在和未来产生影响。

学生视角永远是教育中最重要的视角。作为教师应该而且必须多从学生的角度出发来考虑数学教学中的问题，要反复地思考：学生可能会怎么想；对数学问题的解决可能是怎样的思维过程；哪些是学生学习中感到困难的；容易出现错误的地方；如何根据学生的思维过程来引导与启发；等等。本书中对学生学情的分析(包括学生学前情况研究和学生常见错误研究)这部分内容，不但给出了学生在学习长方形面积这一内容时，他们的思维特点，容易做错的问题以及原因分析，而且也展示了一个数学教师如何研究学生的具体方法，有了具体可操作的了解学生的方法，并不断实践才能真正做到数学教育以学生发展为本。

本书中“课堂教学研究”部分从学习理论出发，对“精讲多练”“建构主义”等理念在小学数学教学中的应用进行了清晰的阐述。对如何进行课堂的观察与诊断给出了程序与方法。附录中还给出了多个不同结构的教学设计、习题，并给出了以研究长方形面积为主题的校本教研活动方案，这部分内容具有很强的实用性。能够为一线的小学数学教师提供直接的操作方法，为理论研究者提供有用的参考资料。

"朱乐平小学数学名师工作站"学员展开以课例为载体的研究已经有了五个多年头，本书的作者罗永军先生是所有学员中较为勤奋、较投入和富有成效的一位。他的这种持之以恒地投入学术研究的精神是值得所有工作站学员与老师学习的。

以上只是笔者读了罗先生的书稿后的一些感受，是为序。

朱乐平

2013年5月20日

目 录 CONTENTS

第一章　长方形面积计算的本体性知识解读与启示

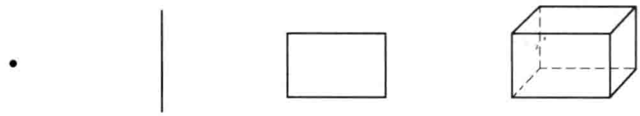
长方形的面积计算是小学经典的教学内容。无论是近代第一部几何教科书《形学备旨》中，还是新中国的第一本数学教科书《(初)高级小学算术课本》内，都把它作为面积学习的基础内容，其重要性可见一斑。我们把它摆在重要位置上并不等于我们已经重视它，相反，更有可能熟视无睹。比如，一个平面图形的面积是这个图形所围成的区域的测度，长方形的面积等于“长×宽”。这些大家都知道，会觉得这是天经地义的知识，但为什么是这个公式呢？或者说，这个公式是怎么来的？为什么要用公式计算而不采用直接测量的方法？这样计算是人为规定，还是有算理在其中？长方形的面积计算作为教学内容来说，它的学习价值只是让学生知道公式吗？从大纲(课程标准)、教材、教法的变迁中能让我们得到哪些启示？今天，我们该如何教学呢？种种问题需要我们进一步厘清才能更好地教学。

1.1　求面积为什么是以计算为主？

想一想，为什么没有一个像直尺那样可以方便地量出线段长度的“面积测量工具”，让我们也可以直接“量”出平面图形的面积，而往往要用系列公式，经过计算把“面积”算出来？

在讨论之前，我们先来回顾一个概念：维。“点”是零维，点没有大小。“线”是一维，线没有粗细，但有长度。“面”是二维，有长和宽两个方向。“体”是三维的，有长、宽、高三个方向。每多一个“维”，就需要多一个坐标轴来描述。

在零维的世界里，我们几乎不能做什么，进入一维世界，我们有了某个方向上前进或后退的“自由”。来到二维的平面世界，眼界一下开阔了：在两个维度上的变量和变量之间的关系可以是任意的，因此，平面图形千变万化，就多边形来



点：零维　　线：一维　　面：二维　　体：三维

说，就有各种各样的三角形、正方形、长方形、平行四边形、梯形、五边形、六边形等，此外，还有形状各异、数不胜数的曲边形。但困惑也随之而来，如何测量它们的大小？

我们知道，在测量时先要定义一个基准单位，然后再用它去测量被测对象。比如要测量一条线段的长度，我们先定义长度为 1 个单位的线段作为基准，然后用它去测量被测线段，所得到的数量就是这条线段的长度。对于平面图形来说，基准单位是边长为 1 个单位的正方形面积，用它去测量正方形或长方形我们还能接受，但要让它去测量形状各异、千变万化的其他图形面积则显得烦琐而困难。因此，我们需要寻找另外一条得出平面图形面积的道路，在找到长方形的面积计算方法后，再根据图形之间的联系推导出其他系列图形的面积。这样，人类的认识就从“直接感知”飞跃到了“间接认知”。从计量的角度来看，一维世界进入二维世界的一个最大变化是，对几何对象的刻画从测量为主转到对算法的研究为主，即求面积时往往经过系列公式的计算把平面图形的面积算出来。

1.2 计算长方形的面积公式为什么是“长×宽”？

从“量”到“算”的发展，意味着知识的发生、发展可以摆脱直接经验的局限，有可能成为一个独立的发展体系。对于长方形的面积来说，从“量”发展为“算”的过程是通过空间推理得到的。根据边的长度分别是整数、有理数和实数分述如下。

（1）边长的量数是整数

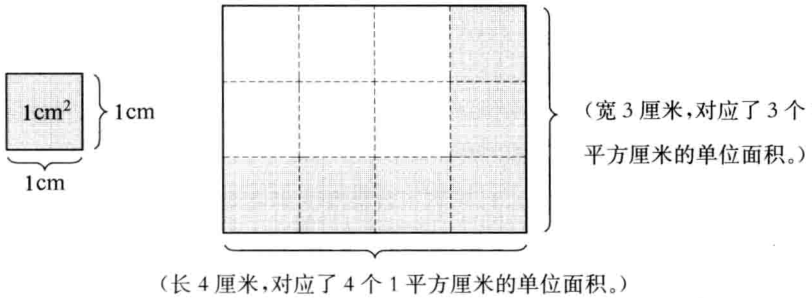
如果边的长度量数是整数，我们可以通过空间对应关系，将一维的线段长度与二维的单位面积个数之间建立量的对应关系，从而推理出长方形面积的算法。例如，求长 4 cm、宽 3 cm 的长方形面积。

因为：长方形面积 = 单位面积的个数 = 每行个数 × 行数（每列个数 × 列数）

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

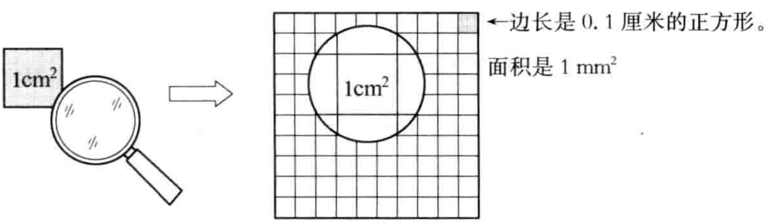
长的厘米数 × 宽的厘米数

所以：长方形面积 = 长 × 宽



（2）边长的量数是有限小数

如果长和宽的量数是有限小数的话，我们很容易想到把 1 cm² 的正方形换成更小单位的“单位面积”，比如 1 mm² 或者更小。例如，求长 3. 9 cm、宽 4. 1 cm 长方形的面积，我们可以把单位面积换成 1 mm²，这样沿着长和宽分别可以摆 39 个、41 个 1 mm² 的正方形，这个长方形的面积是 1599 mm² 或 15. 99 cm²。



只要长和宽是有限小数，那么总可以选择和长度单位相应的更小的面积单位来测量，测量后的总个数等于“长 × 宽”，单位面积乘划分的个数就是长方形的面积。因此，长方形的面积 = 长 × 宽。

（3）边长的量数是实数

如果长或宽的量数不是有限小数的话怎么办呢？用上面测量的方法显然是不适用了，因为不论将单位面积怎样缩小，都无法划分成整数个小正方形。因此，不能用数个数的方法得到长方形的面积。这个难题困扰了人们很多年，使人们重新对几何的基本量，长度、面积、体积作了新的思考，随着 20 世纪初测度理论的建立，这个问题才得以解决。著名的数学家罗声雄先生用通俗的语言说明了这个证明的大致步骤：

设矩形的边长为非负实数 a、b，它的面积记为 $S(a,b)$，且有性质：

① $S(1,1)=1$（单位面积）；

② $S(a,b)=S(b,a)$（矩形的长、宽对换面积不变）；

③ $S(a+c,b)=S(a,b)+S(b,c)$（矩形分割成两个矩形，原矩形的面积等于两部分之和）。

根据以上性质，可证明：

① $S(0,b)=0$；

② 对任意非负有理数，有 $S=a\times b$；

③ 当 a、b 为非负实数时，对任何实数都有两串有理数从左右两边无限逼近它，设有理数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\alpha'_n\}$ 无限逼近 a，$\{\beta_n\}$ 和 $\{\beta'_n\}$ 无限逼近 b，即：

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots\leqslant a\leqslant\cdots\leqslant\alpha'_n\leqslant\alpha'_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\alpha'_1$$

$$\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_n\leqslant\cdots\leqslant b\leqslant\cdots\leqslant\beta'_n\leqslant\beta'_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\beta'_1$$

当 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，$\beta_1\leqslant\beta_2$ 时，$S(\alpha_1,\beta_1)\leqslant S(\alpha_2,\beta_2)$，即边的长度较长则面积较大，据此，有不等式：

$$S(\alpha_n,\beta_n)\leqslant S(a,b)\leqslant S(\alpha'_n,\beta'_n)$$

因为 α_n，β_n，α'_n，β'_n 是有理数，因此上述不等式变为：

$$\alpha_n\beta_n S(1,1)\leqslant S(a,b)\leqslant a'_n\beta'_n S(1,1)\text{，即 }\alpha_n\beta_n\leqslant S(a,b)\leqslant a'_n\beta'_n$$

令 $n\to+\infty$，上式左右两边都无限逼近 $a\times b$，得 $S(a,b)=a\times b$。至此，我们可以得到长方形的面积都可以用长乘宽来计算。

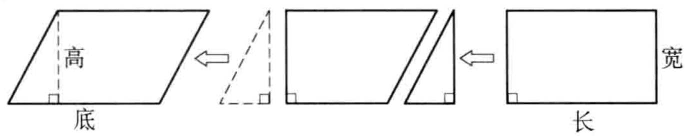
1.3 小学和初中的面积公式有区别吗？

小学阶段长方形面积＝长×宽，正方形面积＝边长×边长，到初中以后把长方形、正方形统称为“矩形”。矩形是指“有一个角是直角的平行四边形”，也就是小学里所说的长方形或正方形，这可能是因为古人把“规矩”当作几何名词，“规”是圆，“矩”是方，所以称作“矩形”。因此，矩形的面积公式统一为“长×宽”。小学和初中的面积公式没有区别。

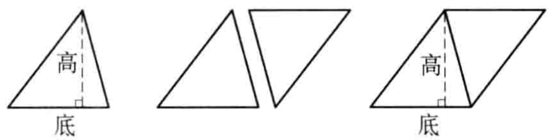
1.4 面积学习为什么从长方形开始？

首先，由于面积单位采用了边长为 1 个长度单位的正方形面积，而将长方形分割成若干个正方形比较容易，因此先学习长方形的面积计算比较方便。

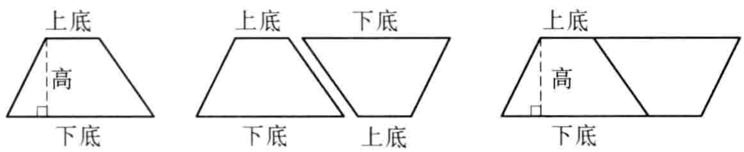
其次，长方形的面积算法一旦确定，其他的一些基本图形，如平行四边形、三角形、梯形等的面积算法也可推导出来了：



平行四边形等积变换为长方形，得：平行四边形的面积＝底×高。



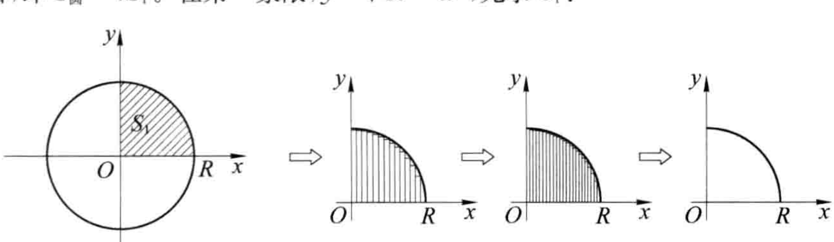
两个全等的三角形可以拼成一个平行四边形，得：三角形的面积＝$\frac{1}{2}$×底×高。



两个全等的梯形可以拼成一个平行四边形，得：梯形的面积＝$\frac{1}{2}$×（上底＋下底）×高。

在此基础上，任意多边形的面积通过分割成上面的几种图形后都可以求出来了。而曲边形的面积则可以通过无数多个长方形逼近曲边形面积，即可利用“化曲为直”的思想和微积分的工具得到解决。以小学阶段的“圆”为例，推导如下：

首先在直角坐标中作出圆 O 的图像，设圆心为 O，半径为 R，则此圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$，利用圆的对称性，可得圆的面积等于第一象限部分面积 S_1 的 4 倍，即 $S_{圆}=4S_1$。在第一象限，$y=\sqrt{R^2-x^2}$，先求 S_1：



首先将曲边图形分割成若干个小曲边梯形，用相应的小长方形的面积近似地代替小曲边梯形面积，再求这些小长方形的面积和作为原曲边图形面积的近

似值,当被分割的曲边梯形无限变小时,这个近似值就无限接近于曲边图形的面积。

设 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\lambda = \max\{\Delta x_i\}(i=1,2,3,\cdots,n)$, $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$,则

$$S_1 = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$S_{圆} = 4S_1 = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = R\sin t$, $x \in [0,R]$,则 $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$
\begin{aligned}
所以\ S_{圆} &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\,\mathrm{d}R\sin t = 4\int_0^{\pi} R^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\mathrm{d}t = 4R^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2R^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,\mathrm{d}2t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2R^2\left(\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2R^2\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}
$$

从上述“化曲为直”的过程可以看出,求曲边形的面积仍然用到了矩形的面积公式。因此,长方形的面积计算是各类图形面积计算的基础和逻辑原点。

1.5 教学时学生的研究素材以什么为宜?

由于面积是指一个平面图形所围成的区域的测度,所以在公式推导时,让学生自主研究中宜用纸片等能看得见“面”的学习材料,而周长的学习则宜用“空心”的长方形。根据心理学的相关研究,纸片如果是彩色的,如淡蓝色,更容易让学生集中于区域的研究。另外,给学生的纸片长和宽数据宜用整数,以利于对应关系的发现,从而发现规律。

1.6 教学时有哪些数学思想方法可以渗透?

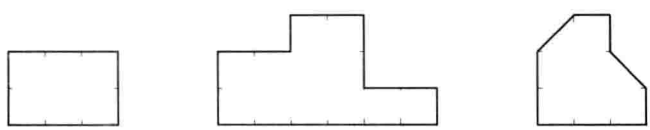
从长方形面积计算公式的算理形成和应用来看,在教学时至少有三个关键

点，在这三个关键点中包含了一些数学思想、方法，我们可以在教学中渗透。

（1）用单位面积测量长方形的面积

用单位面积做标准去测量长方形的面积，实质上是将长方形分割成了若干个小正方形，由面积的可加性得知，各个小正方形面积（单位面积）之和等于原来那个长方形的面积。推而广之，对一个图形进行割补，各部分面积之和等于原来那个图形的总面积。割补法是求图形面积中常用的一种基本方法，特别是在求组合图形的面积时，往往需要将一个图形先割补成几个计算条件充分的基本图形，然后分别计算它们的面积。进一步，以后对曲边图形的求积，甚至求物体的体积，也会常常用到割补法。因此，在本课的教学之前，学生只有熟练掌握此方法才能使课堂教学顺利进行。教学时，我们不仅要让学生掌握长方形、正方形的面积测量方法，还可以给出一些其他的多边形（如下图），让学生在测量中潜移默化地体会割补法。

如果□的面积是 1 平方厘米，你知道下面图形的面积分别是多少吗？



面积:　　　　面积:　　　　面积:

（2）引导学生发现长和宽与单位面积个数的对应关系

这种对应关系反映了一维线段的长度与二维面积个数之间存在着“量”的对应关系。对应是一个重要的数学思想，它通过一定的关系在原本相对独立的两个集合之间建立了意义联系，从而可以通过一个量的变化推测出另一个量的变化。对应思想含义很广泛，像函数、变换等都是对应，在小学阶段主要包括：函数思想、变换思想、数形结合思想等。长方形面积公式是一个函数关系式，长、宽、面积三个量之间存在着相互关联的对应关系：如果把长作为常量，那么面积和宽存在着正比例关系。从直观上可以看出，当长不变时，宽变化了，面积相应扩大或缩小。这一点往往被教师应用于教学的引入环节：让学生根据经验猜测面积的大小可能与什么有关，学生猜测后教师可作如上的演示。这些函数关系在练习时也应该进一步渗透。

（3）从一系列长度、宽度和面积的对应关系中归纳出公式

当学生发现长方形的长和宽与单位面积个数存在着“量”的对应关系后，教

师应及时引导学生进行归纳，这个过程是一个归纳推理的过程。归纳法，就是由一些特殊事例推出一般结论的推理方法。它的特点是从特殊到一般。归纳法可以分为完全归纳法和不完全归纳法。就研究对象一一考查而推出结论的归纳法称为完全归纳法。完全归纳法是一种在研究了事物的所有（有限种）特殊情况后得出一般结论的推理方法，又叫作枚举法。根据事物的部分（而不是全部）特例得出一般结论的推理方法称为不完全归纳法。在小学三年级，限于学生的知识积累，长方形面积公式的得到只能在整数范围内研究，所以是不完全归纳法。因此，教师在教学时，应该多举些实例。这些实例，其中的一些可以由教师给出，也可以设计一些教学环节，让学生自己举一些实例，只有更多的研究材料，才能丰富学生的直观认识，从而自主归纳出长方形面积的计算公式。

【主要参考文献】

1. 承方:《几何基本概念和简单图形》，中国青年出版社，1954 年版。
2. 傅章秀:《几何基础》，北京师范大学出版社，1984 年版。
3. M. U. 亚格龙:《几何变换》第二册，北京大学出版社，1988 年版。
4. 李云普、任国朝:《几何基础》，高等教育出版社，1990 年版。
5. 希尔伯特:《几何基础》第二版，科学出版社，1995 年版。
6. 罗声雄:《数学的魅力 - 初等数学概念演绎》，武汉出版社，1999 年版。
7. 傅仲孙:《几何基础研究》，北京师范大学出版社，2001 年版。
8. 张肇炽:《代数与几何基础》，高等教育出版社，2006 年版。
9. 克莱因著，舒湘芹等译:《高观点下的初等数学概念》，复旦大学出版社，2008 年版。
10. 解艳琼:《平面与立体几何基础》，北京师范大学出版社，2010 年版。
11. 沈钢:《高观点下的初等数学概念》，浙江大学出版社，2011 年版。