文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

经济数学 微积分

解题方法技巧归纳

（与人大版赵树嫄主编·三版配套）

◎毛纲源 编著

△ 专题讲解 涵盖重点难点

△ 通俗易懂 帮助记忆理解

△ 同步学习 深入辅导指点

△ 复习迎考 获益效果明显

买书送课：配套精品课程讲解

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

文都教育®

高等院校
同步辅导及考研复习用书

经济数学 微积分

解题方法技巧归纳

（与人大版赵树嫄主编·三版配套）

◎毛纲源 编著

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(微积分)解题方法技巧归纳/毛纲源编著. —武汉：华中科技大学出版社，2014.12
ISBN 978-7-5609-9141-2

Ⅰ. ①经…　Ⅱ. ①毛…　Ⅲ. ①经济数学-研究生-入学考试-题解　②微积分-研究生-入学考试-题解　Ⅳ. ①F224.0-44　②O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 289940 号

经济数学(微积分)解题方法技巧归纳　　毛纲源　编著

策划编辑：王汉江(QQ：14458270)
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰　李　焕
封面设计：杨　安
责任监印：朱　霞
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：北京世纪文都教育科技发展有限公司
印　　刷：三河市航远印刷有限公司
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：37
字　　数：650 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：68.00 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

郑重声明

买正版图书　听精品课程

毛纲源编著的《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳》《经济数学(线性代数)解题方法技巧归纳》《经济数学(概率论与数理统计)解题方法技巧归纳》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010－88820419,13488713672
电子邮箱:tousu@ wendu. com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www. wendu. com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社
北京世纪文都教育科技发展有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所
刘　岩
2015 年 3 月

前　言

为帮助经济类和财政类在校学生和自学者学好经济数学(微积分),为给他们备考研究生提供一份复习资料,编写了《经济数学(微积分)解题方法技巧归纳》这本书.

本书将经济数学(微积分)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教材、习题集和题解,自具特色.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题的一部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版(以下简称"人大版")的《微积分》中的典型习题,习题的原题号在例序后用表示章序、类序(A类还是B类)、题序和小题序的三个或四个文字后加上方括号标识.例如,例3[8A3(2)]表示例3是人大版《微积分》(第3版)第8章A类第3题的第2小题.例题的另一部分取材于历届全国硕士研究生入学考试数学试题,其中数学(试卷)三绝大部分考题都已收入(例序后用表示年份的五个文字后写上3或1,2加上方括号标识.例如,例1[2011年3]表示例1是2011年考研数学(试卷)三中的考题).

采用人大版《微积分》(第3版)中的典型习题,是因为该书是目前我国文科类专业使用量最大的一本数学教材,习题部分准确地反映了学习经济数学(微积分)的基本要求,因此该书也可作为研究生考试的复习教材.通过对这些例题的学习将有利于促进学生全面掌握经济数学(微积分)的基础知识、基本理论和基本方法,正确理解该课程的基本内容.

需查找人大版《微积分》(第3版)中习题解答的读者,请参看书末附录.

通过对统考试题的研讨,使有志于攻读硕士学位的青年"平战结合",了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识点上、题型上、方法和技巧上做好应试准备,做到心中有数.这些考题一般并非都是难题,其突出的特点是全面、准确地体现了教学大纲的要求,不少试题的原型就是《微积分》(第3版)中的习题.多做考题,并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力及加深对经济数学(微积分)的理解都是大有好处的.

考虑到经济类和工商管理类的学生及自学者学习经济数学(微积分)的困难,编写此书时,在例题的选择、理论推导和文字叙述等诸多方面尽量适应其特点.此外,还在不少例后加写注意部分,以总结解题经验,避免常犯错误.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学

(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志于攻读经济学和工商管理(即 MBA)硕士研究生的青年,本书更是良师益友;对于从事经济数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

鉴于目前有关读物尚缺,适用于理工科学生阅读的高等数学参考读物,文科学生阅读多有不便.作者使用多年来在教学过程中所积累的资料,汇集历年来"数学(试卷)三"绝大部分考题和其他试卷的部分考题,编写了这本书,为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力.希望它能激起在校和自修的广大学生学习经济数学(微积分)的兴趣,这是作者最大的心愿.

另外,准备考研的朋友,可以参考由本人编写、华中科技大学出版社出版的一套考研书籍:

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一、二、三)

◎考研数学客观题简化求解(数学一、二、三)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学一、二、三)

限于作者水平,书中不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教!

毛纲源

2015 年 3 月

目　录

第1章　函　数

1.1　求几类函数的定义域

(一) 求复杂函数的定义域

复杂函数是指由基本初等函数(又称简单函数)经过有限次四则运算并可用一个式子表示的函数,其定义域D是多个简单函数定义域的交集(公共部分).求其交集时,可根据多个简单函数的限制条件列出不等式组,其解集便是所求的定义域D.

列不等式组时,常用到下列简单函数的定义域($\mathbf{Z}$表示整数集):

(1) $y=1/x, D: x\neq 0$;　(2) $y=\sqrt[2n]{x}, D: x\geqslant 0$;

(3) $y=\arcsin x, D: |x|\leqslant 1$;　(4) $y=\arccos x, D: |x|\leqslant 1$;

(5) $y=\log_x f(x), D: x>0, x\neq 1, f(x)>0$;

(6) $y=\cot x, D: x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$;　(7) $y=\tan x, D: x\neq k\pi+\pi/2, k\in\mathbf{Z}$.

由上述简单函数的定义域易知,列不等式组时应遵循下列原则:

(Ⅰ) 分式中分母不能为零;

(Ⅱ) 偶次根号下的被开方数非负,即应大于或等于零;

(Ⅲ) 对数的真数不能为负和零,即应大于零;

(Ⅳ) 反正弦函数($\arcsin x$)和反余弦函数($\arccos x$),要求$|x|\leqslant 1$;

(Ⅴ) 余切函数的定义域为$x\neq k\pi$,正切函数的定义域为$x\neq k\pi+\pi/2$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$.

例1 [1A27(1)]* 确定函数$y=\sqrt{9-x^2}$的定义域.

解 由$9-x^2\geqslant 0$得$x^2\leqslant 9$,即$|x|^2\leqslant 9\Rightarrow |x|\leqslant 3$,于是所求的定义域为$-3\leqslant x\leqslant 3$.

注意 这里使用了不等式运算的下述法则:

若$a>b$,且a,b为正数,n为正整数,则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

由$x^2\leqslant 9$,得到$x\leqslant\pm 3$,这是常见错误.

例2[1A27(7)] 求$y_1=\sqrt{\lg[(5x-x^2)/4]}$的定义域.

---

* 例1[1A27(1)]表示该例(或该习题)是赵树嫄主编的《微积分》(第3版)第1章A类习题第27题第1小题.下同.

解 注意到所给对数的底数大于1,其真数部分满足$(5x-x^2)/4\geqslant 1$,即$(x-4)(x-1)\leqslant 0$,由此得到

$$x-4\geqslant 0,x-1\leqslant 0 \quad 或 \quad x-4\leqslant 0,x-1\geqslant 0.$$

前一不等式组无解,后一不等式组的解为$1\leqslant x\leqslant 4$,此为所求的定义域.

例 3 求$y_2=1/\sqrt{\lg[(5x-x^2)/4]}$的定义域.

解 在上例y_1的定义域中去掉使$(5x-x^2)/4=1$的两点$x=1$和$x=4$即得y_2的定义域为$(1,4)$.

例 4 分别求出下列两函数的定义域:

(1) $y_3=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$; (2) $y_4=1/\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$.

解 因所给对数的底数为$1/2<1$,故y_3与y_4中对数的真数分别满足

$$0<x-1\leqslant 1;\quad 0<x-1<1.$$

故y_3与y_4的定义域分别为$(1,2]$与$(1,2)$.

注意 由以上三例可知以下结论.

(1) 偶次根式的被开方数是对数式,当对数底数大于1时,该对数式的真数只能取大于、等于1的实数;当其底数小于1时,则只能取$(0,1]$内的实数.

(2) 偶次根式的被开方数为对数式,且该对数式为分式的分母,若其底数大于1,则其真数只能取大于1的实数;若其底数小于1,则只能取$(0,1)$内的实数.其理由可由图1.1.1说明.

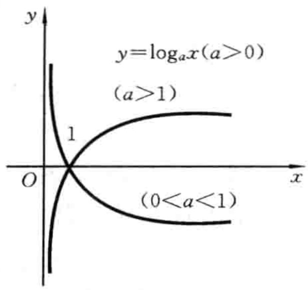

图 1.1.1

例 5[1B6]* $f(x)=1/(\lg|x-5|)$的定义域是( ).

(A) $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$ (B) $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$

(C) $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ (D) $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

解 $f(x)$的定义域为

$$\begin{cases}x-5\neq 0,\\ |x-5|\neq 1,\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x\neq 5,\\ x\neq 4,x\neq 6.\end{cases}$$

故所求的定义域为$(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$.仅(D)入选.

例 6 求函数$\log_{(x-1)}(16-x^2)$的定义域.

解 由

$$\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\neq 1,\\ 16-x^2>0,\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}x>1,\\ x\neq 2,\\ -4<x<4.\end{cases}$$

---

* 赵树嫄主编的《微积分》(第3版)(中国人民大学出版社出版)B类四选一习题,该类题的正确选项只有一个,其余三个都是干扰项.下同.

因而其交为 $1 < x < 2$ 或 $2 < x < 4$. 于是所求的定义域为 $(1,2) \cup (2,4)$.

例 7　求 $y = 1/\sqrt{\cos x} + \lg(25 - x^2)$ 的定义域.

解　要使 y 有意义必有 $\cos x > 0$ 且 $25 - x^2 > 0$,其交即为所求.

由 $\cos x > 0$ 得到 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, k 为整数.　①

由 $25 - x^2 > 0$,即 $|x|^2 < 25$,得到 $|x| < 5$,即 $-5 < x < 5$.　②

当 $k = 0$ 时,不等式①与②分别变为 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 与 $-5 < x < 5$,求交得 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;当 $k = 1$ 时,不等式①与②分别变为 $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ 与 $-5 < x < 5$,求交得 $\left(\frac{3\pi}{2}, 5\right)$;当 $k = -1$ 时,不等式①与②分别变为 $-\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}$ 与 $-5 < x < 5$,求交得 $\left(-5, -\frac{3\pi}{2}\right)$. 于是 y 的定义域为

$$\left(-5, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 5\right).$$

注意　函数的运算仅在相同区域内才能进行,因此如果函数表达式是由若干项的代数和、差、积、商所组成,其定义域是多个定义区间的交集.

(二) 求分段函数的定义域

在不同的区间,函数有不同的表达式,这样的函数称为分段函数. 分段函数表示一个函数. 分段函数的定义域是各分段区间的定义区间的并集.

例 8[1A29(2)]　确定下列函数的定义域,并作出函数的图形.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ x - 1, & 1 < |x| < 2. \end{cases}$$

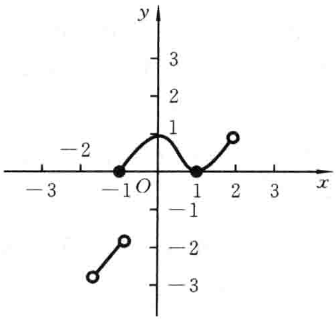

图 1.1.2

解　$f(x)$ 的定义域是 $|x| \leqslant 1$ 与 $1 < |x| < 2$ 的并集.

因 $1 < |x| < 2$ 为 $|x| < 2$ 与 $|x| > 1$ 之交,而 $|x| > 1$ 为 $x > 1$ 或 $x < -1$,于是 $1 < |x| < 2$ 为下列两不等式组

$$\begin{cases} -2 < x < 2, \\ x > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x < -1 \end{cases}$$

之解 $1 < x < 2$ 与 $-2 < x < -1$ 的并. 再将它们与 $|x| \leqslant 1$ 即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 求并,得所求的定义域为 $(-2,-1) \cup [-1,1] \cup (1,2) = (-2,2)$,其图形如图 1.1.2 所示.

(三) 求复合函数的定义域

任意函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 并不一定能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 要能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,则需 $Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空,即 $u=\varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$ 要全部或部分地落在 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 中. 因而 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $\varphi(x)$ 的值落在 $D(f)$ 中的那些 x 所组成的集合.

复合函数定义域的求法应根据基本初等函数的定义域列出满足复合函数表达式中各部分要求的不等式组. 解此不等式组即可求得复合函数的定义域.

例 9[1A27(8)]　求函数 $y=\dfrac{\arccos[(2x-1)/7]}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 的定义域.

解　要使 y 有意义,必有

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ x^2-x-6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1,\\ (x-3)(x+2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ \begin{cases}x-3>0,\\ x+2>0\end{cases}\end{cases}\text{或}\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ \begin{cases}x-3<0,\\ x+2<0.\end{cases}\end{cases}$$

前一不等式组的解为 $x>3$,后一不等式组的解为 $x<-2$. 将其分别与 $-3\leqslant x\leqslant 4$ 求交,即求不等式组

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ x>3\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ x<-2\end{cases}$$

的解,易知其解分别为 $(3,4]$,$[-3,-2)$,因而所求的定义域为 $(3,4]$ 或 $[-3,-2)$,即为 $[-3,-2)\cup(3,4]$.

例 10[1A56]　分别就 $a=2$,$a=1/2$,$a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数?如果是,求其定义域.

解　当 $a=2$ 时,$y=f(x)=\lg(a-\sin x)=\lg(2-\sin x)$. 由于对任意 x 有 $2-\sin x>0$,显然 f 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$. 因 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $\varphi(x)=2-\sin x\geqslant 2-1=1>0$,$\varphi(x)\leqslant 2-(-1)=3$,即 $\varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)=[1,3]$. 因而 $D(f)\cap Z(\varphi)=[1,3]$ 为非空集,故 y 是复合函数.

其定义域为一切实数,因当 $-\infty<x<+\infty$ 时,均有 $2-\sin x>0$.

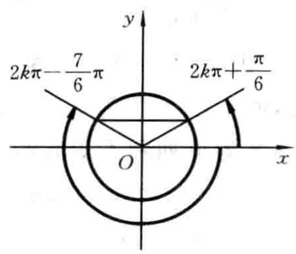

图 1.1.3

当 $a=1/2$ 时,$y=f(x)=\lg(1/2-\sin x)$. 由 $\varphi(x)=1/2-\sin x>0$,即 $\sin x<1/2$,在 $(0,2\pi)$ 内有 $-7\pi/6<x<\pi/6$,如图 1.1.3 所示. 其定义域为 $D(f)=\{x\mid 2k\pi-7\pi/6<x<\pi/6+2k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$;

值域为　$Z(\varphi)=[3/2,0)$.

因 $D(f)\cap Z(\varphi)=[3/2,0)$ 为非空集,故 y 为复合函数.

当 $a=-2$ 时,无论 x 取何值时,均有 $\varphi(x)=-2-\sin x<0$,即 $Z(\varphi)=(-3,-1)$,而 $y=f(x)=\lg(-2-\sin x)$ 的定义域 $D(f)$ 为空集,故 $D(f)\cap Z(\varphi)$ 为空集,y 不是复合函数.

(四) 已知 $f(x)$ 的定义域,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域

已知 $f(x)$ 的定义域,用代入法可求出抽象复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

不妨设外层函数 $f(x)$ 的定义域为 $a<x<b$,将中间变量 $\varphi(x)$ 替换不等式中的 x,得到 $a<\varphi(x)<b$(这就表明 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(x)$ 的定义域内),由此解出 x,即得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域. 注意不要忽略定义区间的变化.

例 11 已知 $f(x)$ 的定义域为[1,2],求 $f(1-\ln x)$ 的定义域.

解 将 $1-\ln x$ 代换 $1\leqslant x\leqslant 2$ 中的 x,得到 $1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2$,即 $1/\mathrm{e}\leqslant x\leqslant 1$,故所求定义域为 $[1/\mathrm{e},1]$.

例 12[1B9] 设 $f(x)=1/\sqrt{3-x}+\lg(x-2)$,那么 $f(x+a)+f(x-a)(0<a<1/2)$ 的定义域是( ).

(A) $(2-a,3-a)$ (B) $(2+a,3+a)$ (C) $(2+a,3-a)$ (D) $(2-a,3+a)$

解 首先求出 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$. 由 $f(x)$ 的表示式易得到 $\begin{cases}3-x>0,\\x-2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<3,\\x>2.\end{cases}$ 因而其定义域 $D(f)=\{x\mid 2<x<3\}$,则 $f(x+a)+f(x-a)(0<a<1/2)$ 的定义域应满足

$$\begin{cases}2<x+a<3,\\2<x-a<3,\\0<a<1/2,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}2-a<x<3-a, & ①\\2+a<x<3+a, & ②\\0<a<1/2,\end{cases}$$

因 $a>0$,故式 ① 与式 ② 之交为 $2+a<x<3-a$. 此为所求的函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域. 仅(C) 入选.

(五) 求实际应用问题中函数的定义域

如果一函数具有实际应用意义或几何意义,则其定义域是有实际意义的全体自变量取值的集合.

例 13[1A36] 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱,试将圆柱的体积表示为高的函数,并确定此函数的定义域.

解 设 V 为圆柱体体积,h 为其高,r 为球的半径,R 为圆柱底面半径,则

$$R=\sqrt{r^2-(h/2)^2}=\sqrt{r^2-h^2/4},$$
$$V=\pi(R)^2h=\pi h(r^2-h^2/4).$$

因 $V>0$,故 $r^2-h^2/4>0$,且 $h>0$,因而 $0<h<2r$(圆柱体在球内,故其高必

小于球的直径). 于是,V 的定义域为 $D(V)=\{h \mid 0<h<2r\}$.

例 14[1992 年 3]* 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$,其中 Q,P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是______.

解 由弹性定义及题设有 $\left|\dfrac{-5P}{100-5P}\right|>1$,又由价格和需求量 $Q=100-5P$ 的实际意义可知,必有 $P\geqslant 0, Q\geqslant 0$,从而 $100-5P\geqslant 0$ 即 $P\leqslant 20$,于是

$$\left|\frac{-5P}{100-5P}\right|=\frac{5P}{100-5P}>1.$$

解之得 $P>10$,又 $100-5P\neq 0$,故 $P\neq 20$,从而 $P<20$,所以 $10<P<20$.

习 题 1.1

1. 确定下列函数的定义域:

(1) [1A27(2)] $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(2) [1A27(6)] $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{15}+\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(x-3)}}$; (4) $y=\sqrt{x^2(x^2-1)}$.

2. 设 $f(x)=\arcsin x, g(x)=x/2$,则 $f[g(x)]$ 的定义域为( ).

(A) $(-1/2,1/2)$ (B) $[-2,2]$ (C) $[-1/2,1/2]$ (D) $(-2,2)$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ \sin x, & 1<|x|\leqslant 4, \end{cases}$ 则 $f(x^2)$ 的定义域是( ).

(A) $[-4,4]$ (B) $[-1,1]$ (C) $[1,4]$ (D) $[-2,2]$

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[1,2]$,试求 $f(ax)(a\neq 0)$ 的定义域.

1.2 判断两函数是否为同一函数

由于对应法则和其定义域是确定一个函数的两大要素,据此可判别两函数是否相同.

两函数虽然用不同的解析式表示,但如果其定义域相同,且其对应法则也相同,则为同一函数.

---

* 例 14[1992 年 3] 表示该例是 1992 年考研数学三的考题. 下同.

为验证对应法则相同，常在相同的定义域内任意取一点，证明其函数值相等.

当两函数的定义域不同，或其对应法则不同，即在相同的定义域内两函数不恒等，则它们不是同一函数.

例1 下列函数是否为同一函数，为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{(x-1)/(2-x)}$, $g(x)=\sqrt{x-1}/\sqrt{2-x}$;

(2) $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x$, $g(x)=1$.

解 (1) 易求出 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为$[1,2)$；又在$[1,2)$内任取 x，有

$$f(x)=\sqrt{(x-1)/(2-x)}=\sqrt{x-1}/\sqrt{2-x}=g(x),$$

其对应法则也相同，故$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，都为$(-\infty,+\infty)$；又对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1=g(x)$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则相同，所以它们为同一函数.

例2[1A20(1)] $y=(x^2-1)/(x-1)$ 与 $y=x+1$ 是不是相同的函数关系？为什么？

解 不是相同函数. 这是因为 $y=(x^2-1)/(x-1)$ 的定义域为 $x\neq 1$，而 $y=x+1$ 的定义域为所有实数，它们的定义域不同，故它们不是相同的函数.

例3 设 $f(x)=x-1$, $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$，问函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同，为什么？

解一 $f(x)$ 与 $g(x)$ 虽然其定义域相同，均为$(-\infty,+\infty)$，但由于

$$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$$

在$(-\infty,1)$内 $f(x)=x-1$，而 $g(x)=1-x$. 显然 $f(x)\neq g(x)$，故它们不是同一函数.

解二 当 $x=-1$ 时，$f(-1)=-2$，而 $g(-1)=2$，即 $f(-1)\neq g(-1)$，故它们的对应法则不同，虽然其定义域相同，但不是同一函数.

习 题 1.2

判断下列各组函数是否是同一函数，为什么？

1. [1A20(6)] $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$, $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$.

2. $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

3. $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $g(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$.