

**2016**

**李永乐·王式安唯一**考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

# 高等数学 辅导讲义

主 编 © 武忠祥

适合大多数考生的高等数学复习用书

★本书的最大特点★

**容实用** 全面的考试内容，清晰的逻辑结构，让考生真正做到心中有数  
**参考性强** 经典例题，全新练习，指导学习精髓，让你弄清原理心里有底



2016

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

# 高等数学 辅导讲义

主 编 ① 武忠祥



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲义/武忠祥主编. —西安:西安  
交通大学出版社,2014.8  
ISBN 978-7-5605-6651-1

I. ①高… II. ①武… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196662 号

### 敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识  
的为正版图书,敬请读者识别。

#### 高等数学辅导讲义

---

主 编:武忠祥  
装帧设计:金榜图文设计室  
出版发行:西安交通大学出版社  
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)  
电 话:(029)82668315 82669096(总编办)  
(029)82668357 82667874(发行部)  
印 刷:保定市中华美凯印刷有限公司  
开 本:787mm×1092mm 1/16  
印 张:14.75  
字 数:290 千字  
版 次:2014 年 9 月  
印 次:2014 年 9 月第 1 次印刷  
书 号:ISBN 978-7-5605-6651-1/O·481  
定 价:39.80 元

---

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换 电话:(010)51906740  
版权所有 侵权必究

# 前 言

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成。全书共分九章和两个附录,每章均由考试内容要点精讲和常考题型的方法与技巧及练习题精选三部分组成。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学梳理解题思路,掌握常用解题方法和解题技巧。

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面。其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要。希望本讲义能对考研同学有较大帮助。由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正。

祝同学们考研路上一路顺利!

编者

2014年7月

# 目 录

<b>第一章 函数 极限 连续</b> .....	(1)	题型一 导数与微分的概念 .....	(34)
<b>第一节 函 数</b> .....	(1)	题型二 导数的几何意义 .....	(38)
一、考试内容要点精讲 .....	(1)	题型三 导数与微分的计算 .....	(39)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(2)	<b>第二节 导数应用</b> .....	(43)
题型一 复合函数 .....	(2)	一、考试内容要点精讲 .....	(43)
题型二 函数性态 .....	(3)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(45)
<b>第二节 极 限</b> .....	(5)	题型一 函数的单调性、极值与最值 .....	(45)
一、考试内容要点精讲 .....	(5)	.....	(45)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(7)	题型二 曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率 .....	(47)
题型一 极限的概念、性质及存在准则 .....	(7)	.....	(47)
.....	(7)	题型三 方程的根的存在性及个数 .....	(49)
题型二 求极限 .....	(9)	题型四 证明函数不等式 .....	(51)
题型三 确定极限式中的参数 .....	(22)	题型五 微分中值定理有关的证明题 .....	(53)
题型四 无穷小量阶的比较 .....	(23)	.....	(53)
<b>第三节 连 续</b> .....	(26)	<b>练习题精选</b> .....	(60)
一、考试内容要点精讲 .....	(26)	<b>练习题答案与提示</b> .....	(61)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(26)	<b>第三章 一元函数积分学</b> .....	(63)
题型一 讨论连续性及间断点类型 .....	(26)	<b>第一节 不定积分</b> .....	(63)
题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题 .....	(28)	一、考试内容要点精讲 .....	(63)
<b>练习题精选</b> .....	(30)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(64)
<b>练习题答案与提示</b> .....	(31)	题型一 计算不定积分 .....	(64)
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	(32)	题型二 不定积分杂例 .....	(67)
<b>第一节 导数与微分</b> .....	(32)	<b>第二节 定积分</b> .....	(69)
一、考试内容要点精讲 .....	(32)	一、考试内容要点精讲 .....	(69)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(34)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(71)
		题型一 定积分的概念、性质及几何意义 .....	(71)
		.....	(71)

题型二 定积分计算 .....	(72)	<b>第五章 多元函数微分学</b> .....	(105)
题型三 变上限积分函数及其应用 ..	(76)	<b>第一节 重极限、连续、偏导数、全微分(概</b>	
题型四 积分不等式 .....	(80)	<b>念,理论)</b> .....	(105)
<b>第三节 反常积分</b> .....	(83)	一、考试内容要点精讲 .....	(105)
一、考试内容要点精讲 .....	(83)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(108)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(83)	题型一 讨论连续性、可导性、可微性 .....	
题型一 反常积分的概念与敛散性 ..	(83)	.....	(108)
题型二 反常积分计算 .....	(84)	<b>第二节 偏导数与全微分的计算</b> .....	
<b>第四节 定积分应用</b> .....	(85)	.....	(111)
一、考试内容要点精讲 .....	(85)	一、考试内容要点精讲 .....	(111)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(86)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(112)
题型一 几何应用 .....	(86)	题型一 求一点处的偏导数与全微分 .....	
题型二 物理应用 .....	(88)	.....	(112)
<b>第五节 导数在经济学中的应用</b>		题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数	
(数一、二不要求) .....	(89)	与全微分 .....	(112)
一、考试内容要点精讲 .....	(89)	题型三 含有抽象函数的复合函数偏导数与	
二、常考题型的方法与技巧 .....	(90)	全微分 .....	(114)
<b>练习题精选</b> .....	(93)	题型四 隐函数的偏导数与全微分 .....	
<b>练习题答案与提示</b> .....	(94)	.....	(118)
<b>第四章 常微分方程</b> .....	(95)	<b>第三节 极值与最值</b> .....	(121)
一、考试内容要点精讲 .....	(95)	一、考试内容要点精讲 .....	(121)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(97)	二、常考题型的方法与技巧 .....	(121)
题型一 微分方程求解 .....	(97)	题型一 求无条件极值 .....	(121)
题型二 综合题 .....	(101)	题型二 求最大最小值 .....	(124)
题型三 应用题 .....	(103)	<b>练习题精选</b> .....	(129)
<b>练习题精选</b> .....	(104)	<b>练习题答案与提示</b> .....	(130)
<b>练习题答案与提示</b> .....	(104)		

<b>第六章 二重积分</b> .....	(131)
一、考试内容要点精讲 .....	(131)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(132)
题型一 计算二重积分 .....	(132)
题型二 累次积分交换次序及计算 .....	(136)
题型三 与二重积分有关的综合题 .....	(138)
题型四 与二重积分有关的积分不等式问题 .....	(141)
练习题精选 .....	(143)
练习题答案与提示 .....	(144)
<b>第七章 无穷级数</b> .....	(145)
<b>第一节 常数项级数</b> .....	(145)
一、考试内容要点精讲 .....	(145)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(146)
题型一 正项级数敛散性的判定 .....	(146)
题型二 交错级数敛散性判定 .....	(148)
题型三 任意项级数敛散性判定 .....	(149)
题型四 证明题与综合题 .....	(152)
<b>第二节 幂级数</b> .....	(154)
一、考试内容要点精讲 .....	(154)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(155)
题型一 求收敛域 .....	(155)
题型二 将函数展开为幂级数 .....	(157)
题型三 级数求和 .....	(159)
<b>第三节 傅里叶级数</b> .....	(162)
一、考试内容要点精讲 .....	(162)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(163)

题型一 有关收敛定理的问题 .....	(163)
题型二 将函数展开为傅里叶级数 .....	(164)
练习题精选 .....	(166)
练习题答案与提示 .....	(167)
<b>第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用</b> .....	(168)
<b>第一节 向量代数</b> .....	(168)
一、考试内容要点精讲 .....	(168)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(169)
题型一 向量运算 .....	(169)
题型二 向量运算的应用及向量的位置关系 .....	(169)
<b>第二节 空间平面与直线</b> .....	(170)
一、考试内容要点精讲 .....	(170)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(171)
题型一 建立直线方程 .....	(171)
题型二 建立平面方程 .....	(172)
题型三 与平面和直线位置关系有关的问题 .....	(173)
<b>第三节 曲面与空间曲线</b> .....	(174)
一、考试内容要点精讲 .....	(174)
二、常考题型的方法与技巧 .....	(175)
题型一 建立柱面方程 .....	(175)
题型二 建立旋转面方程 .....	(175)
题型三 求空间曲线的投影曲线方程 .....	(176)
<b>第四节 多元微分在几何上的应用</b> .....	(176)

一、考试内容要点精讲·····	(176)	一、考试内容要点精讲·····	(196)
二、常考题型的方法与技巧·····	(176)	二、常考题型的方法与技巧·····	(196)
题型一 建立曲面的切平面和法线方程·····	(176)	题型一 求几何量·····	(196)
题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程·····	(178)	题型二 计算物理量·····	(197)
<b>第五节 方向导数与梯度·····</b>	<b>(179)</b>	<b>第三节 场论初步·····</b>	<b>(199)</b>
一、考试内容要点精讲·····	(179)	一、考试内容要点精讲·····	(199)
二、常考题型的方法与技巧·····	(179)	二、常考题型的方法与技巧·····	(199)
题型一 方向导数与梯度的计算·····	(179)	题型一 梯度、散度、旋度计算·····	(199)
<b>第九章 多元积分学及其应用·····</b>	<b>(181)</b>	练习册精选·····	(201)
<b>第一节 三重积分与线面积分·····</b>	<b>(181)</b>	练习册答案与提示·····	(202)
一、考试内容要点精讲·····	(181)	<b>附录·····</b>	<b>(203)</b>
二、常考题型的方法与技巧·····	(184)	2014年考研数学试题(高等数学)·····	(203)
题型一 计算三重积分·····	(184)	·····	(203)
题型二 更换三重积分次序·····	(185)	数学一试题·····	(203)
题型三 计算对弧长的线积分·····	(185)	数学二试题·····	(205)
题型四 计算对坐标的线积分·····	(186)	数学三试题·····	(207)
题型五 计算对面积的面积分·····	(191)	2014年考研数学试题解析(高等数学)·····	(209)
题型六 计算对坐标的面积分·····	(193)	·····	(209)
<b>第二节 多元积分应用·····</b>	<b>(196)</b>	数学一试题解析·····	(209)
		数学二试题解析·····	(215)
		数学三试题解析·····	(222)



# 第一章 函数 极限 连续

## 第一节 函 数

### 一、考试内容要点精讲

#### 1. 函数的概念

设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的数集. 如果对于每个数  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定的法则总有一个确定的数值  $y$  和它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记为  $y = f(x)$ . 常称  $x$  为自变量,  $y$  为因变量,  $D$  为函数的定义域.

**【注】** 函数概念有两个基本要素: 定义域、对应规则 (或称依赖关系). 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 它们就是同一函数.

#### 2. 函数的性态

##### 1) 单调性

定义: 单调增:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

单调不减:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

判定: (1) 定义;

(2) 导数: 设  $f(x)$  在区间  $I$  上可导, 则

a)  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  单调增;

b)  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$  单调不减;

##### 2) 奇偶性

定义: 偶函数  $f(-x) = f(x)$ ; 奇函数  $f(-x) = -f(x)$ .

判定: (1) 定义;

(2) 设  $f(x)$  可导, 则:

a)  $f(x)$  是奇函数  $\Rightarrow f'(x)$  是偶函数;

b)  $f(x)$  是偶函数  $\Rightarrow f'(x)$  是奇函数;

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数; 连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

**【注】** 设  $f(x)$  连续

(1) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是偶函数;

(2) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是奇函数.

##### 3) 周期性

定义:  $f(x+T) = f(x)$

判定:(1) 定义;

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数;

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

**【注】** 设  $f(x)$  连续且以  $T$  为周期, 则  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  是以  $T$  为周期的周期函数

$$\Leftrightarrow \int_0^T f(x) dx = 0.$$

4) 有界性

定义: 若  $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  上有界.

判定:(1) 定义;

(2)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续  $\Rightarrow f(x)$  在  $[a, b]$  上有界;

(3)  $f(x)$  在  $(a, b)$  上连续, 且  $f(a^+)$  和  $f(b^-)$  存在  $\Rightarrow f(x)$  在  $(a, b)$  上有界;

(4)  $f'(x)$  在区间  $I$  (有限) 上有界  $\Rightarrow f(x)$  在  $I$  上有界;

**【注】** (3) 中的区间  $(a, b)$  改为无穷区间  $(-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$  结论仍成立.

### 3. 复合函数与反函数

(函数分解成简单函数的复合, 分段函数的复合, 求反函数)

### 4. 基本初等函数与初等函数

**基本初等函数:**

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

了解它们的定义域、性质、图形.

**初等函数:**

由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

## 二、常考题型的方法与技巧

### 题型一 复合函数

**【例 1】** 已知  $f(x+1)$  的定义域为  $[0, a]$  ( $a > 0$ ), 则  $f(x)$  的定义域为

(A)  $[-1, a-1]$ .

(B)  $[1, a+1]$ .

(C)  $[a, a+1]$ .

(D)  $[a-1, a]$ .

**【解】** 应选(B)

由  $f(x+1)$  的定义域为  $[0, a]$  知  $0 \leq x \leq a$ , 则

$$1 \leq x+1 \leq a+1$$

故  $f(x)$  的定义域为  $[1, a+1]$ .

**【例 2】** 已知  $f(x) = e^{x^2}$ ,  $f[\varphi(x)] = 1-x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 求  $\varphi(x)$  及其定义域.

**【解】** 由

$$f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1-x,$$

知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1-x \quad (x \leq 0)$$

$$\therefore \varphi^2(x) = \ln(1-x) \quad (x \leq 0)$$

$$\therefore \varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)} \quad (x \leq 0)$$

**【例 3】** 设  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| < 1 \\ |x|-2, & 1 \leq |x| \end{cases}$

试求  $f[g(x)], g[f(x)]$ .

**【解】** 当  $|x| < 1$  时,  $g(x) = 2-x^2 > 0$ , 则  $f[g(x)] = 1$ ;  
 当  $1 \leq |x| < 2$  时,  $g(x) = |x|-2 < 0$ , 则  $f[g(x)] = 0$ ;  
 当  $2 \leq |x|$  时,  $g(x) = |x|-2 \geq 0$ , 则  $f[g(x)] = 1$ ;

$$\text{故 } f[g(x)] = \begin{cases} 0, & 1 \leq |x| < 2 \\ 1, & |x| < 1 \text{ 或 } |x| \geq 2 \end{cases}$$

当  $x < 0$  时,  $f(x) = 0, |0| < 1$ , 则  $g[f(x)] = 2-0^2 = 2$ ;  
 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 1, |1| = 1$ , 则  $g[f(x)] = |1|-2 = -1$ ;

$$\text{故 } g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

## 题型二 函数性态

**【例 1】** 已知函数  $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$  在  $(0, +\infty)$  上有界, 则  $\alpha$  的取值范围应为

(A)  $(0, +\infty)$ . (B)  $(0, 3]$ . (C)  $(0, 2)$ . (D)  $(1, 3]$ .

**【分析】** 由于  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 所以, 只要  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  都存在, 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上必有界.

**【解】** 由本题选项可知, 只需讨论  $\alpha > 0$ , 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

当  $\alpha-1 \leq 2$ , 即  $\alpha \leq 3$  时上式极限存在; 当  $\alpha > 3$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \infty$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无界.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

当  $\alpha-1 > 0$  时, 即  $1 < \alpha$  时上式极限存在且为零; 当  $\alpha \leq 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \infty$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无界.

因此, 当  $1 < \alpha \leq 3$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上必有界, 故应选(D).

**【例 2】** 以下四个命题中正确的是

- (A) 若  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.  
 (B) 若  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.  
 (C) 若  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.  
 (D) 若  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 则  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内有界.

**【解 1】** 直接法

由于  $f'(x)$  在有限区间  $(0, 1)$  内有界, 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 故选(C).

**【解 2】** 排除法

令  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , 显然  $f'(x)$  和  $f(x)$  都在  $(0, 1)$  内连续, 但  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内无界, 则(A)(B) 都不正确.

令  $f(x) = \sqrt{x}$ , 显然  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内有界, 但  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  在  $(0, 1)$  内无界, 则(D) 不正确. 故应选(C).

**【例 3】** 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得

- (A)  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内单调增加.  
 (B)  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内单调减少.  
 (C) 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$ .  
 (D) 对任意的  $x \in (-\delta, 0)$  有  $f(x) > f(0)$ .

**【解】** 本题要用到一个常用的结论:

若  $f'(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ ,

当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ;

当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) > f(x_0)$ .

若  $f'(x_0) < 0$  有相应的结论.

以上结论可利用导数定义和极限的保号性证明.

由以上结论知(C) 正确.

**【注】** 本题选(A) 是一种典型的错误, 原因是由  $f'(x_0) > 0$ , 得不到一定存在  $x_0$  的某邻域, 在此邻域内  $f(x)$  单调增. 反例如下:

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$ , 但  $f(x)$  在  $x = 0$  的任何邻域内不单调增.

事实上, 当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$

取  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ , 则  $f'(x_n) = 1 - 2 = -1 < 0$ .

由于以上的点  $x_n$  在  $x = 0$  的任何邻域内都存在, 则在  $x = 0$  的任何邻域内存在导数为负的点, 则  $f(x)$  在  $x = 0$  的任何邻域内都不单调增.

**【例 4】** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$ . 试证:

- (1) 若  $f(x)$  为偶函数, 则  $F(x)$  也是偶函数;  
 (2) 若  $f(x)$  单调不增, 则  $F(x)$  单调不减.

**【证明】(1)【证一】** 由题设知

$$F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t)f(t)dt. \text{ 令 } t = -u, \text{ 并由于 } f(-x) = f(x), \text{ 所以}$$

$$F(-x) = -\int_0^x (-x+2u)f(-u)du = \int_0^x (x-2u)f(u)du = F(x),$$

即  $F(x)$  为偶函数.

**【证二】**  $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - 2 \int_0^x tf(t)dt$

由于  $f(x)$  为偶函数, 则  $x \int_0^x f(t) dt, \int_0^x t f(t) dt$  都是偶函数, 故  $F(x)$  为偶函数.

$$\begin{aligned} (2) \text{【证】} \quad F'(x) &= \left[ x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x t f(t) dt \right]' = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - 2x f(x) \\ &= \int_0^x f(t) dt - x f(x) = x [f(\xi) - f(x)], 0 \leq \xi \leq x. \text{ (积分中值定理)} \end{aligned}$$

因  $f(x)$  单调不增, 故当  $x > 0$  时,  $f(\xi) - f(x) \geq 0$ , 从而  $F'(x) \geq 0$ . 当  $x < 0$  时,  $f(\xi) - f(x) \leq 0$ , 从而  $F'(x) \geq 0$ . 又  $F'(0) = 0$ , 综上可知  $F(x)$  为单调不减.

## 第二节 极 限

### 一、考试内容要点精讲

#### 1. 极限的概念

##### 1) 数列极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A: \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - A| < \epsilon$ .

##### 2) 函数极限

##### (1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$ , 当  $x > X$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$ , 当  $x < -X$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

##### (2) 自变量趋于有限值时函数的极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

左极限:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ ;

右极限:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ ;

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

**【注】**需要分左、右极限求极限的问题主要有三种:

(1) 分段函数在分界点处的极限, 而在该分界点两侧函数表达式不同;

(2)  $e^\infty$  型极限 (如  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} e^x, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ );

(3)  $\arctan \infty$  型极限 (如  $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ ).

#### 2. 极限的性质

1) 局部有界性: 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  某去心邻域内有界;

2) 保号性: 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则

(1) 若  $A > 0$  (或  $A < 0$ )  $\Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

(2) 若  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$  时,  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ )  $\Rightarrow A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

3) 函数值与极限值之间的关系:

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \text{其中 } \lim \alpha(x) = 0.$$

【注】数列极限有对应的以上三条性质.

### 3. 极限存在准则

1) 夹逼准则:

若存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

2) 单调有界准则:

单调有界数列必有极限.

【注】函数极限有对应的以上两条准则.

### 4. 无穷小

1) 无穷小的概念:

若  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零, 则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

2) 无穷小的比较: 设  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$ .

(1) 高阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ ; 记为  $\beta(x) = o(\alpha(x))$ ;

(2) 同阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$ ;

(3) 等价: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ ; 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

(4) 无穷小的阶: 若  $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$ , 称  $\beta(x)$  是  $\alpha(x)$  的  $k$  阶无穷小.

3) 无穷小的性质:

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小;

(3) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

### 5. 无穷大

1) 无穷大的概念:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (或  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ), 则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大.

2) 常用的一些无穷大的比较

(1) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$  (其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ ).

(2) 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln^n n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$  (其中  $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$ ).

3) 无穷大与无界变量的关系: 无穷大  $\Rightarrow$  无界变量

无穷大量一定是无界变量; 但无界变量不一定是无穷大量.

数列  $\{x_n\}$  是无穷大量:  $\forall M > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|x_n| > M$ .

数列  $\{x_n\}$  是无界变量:  $\forall M > 0, \exists N$ , 使  $|x_N| > M$ .

例: 数列  $x_n = [1 + (-1)^n]n$  是无界变量, 但不是无穷大.

4) 无穷大与无穷小的关系:

在自变量的同一变化过程中, 若  $f(x)$  是无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小; 若  $f(x)$  是无穷小,

且  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

## 二、常考题型的方法与技巧

## 题型一 极限的概念、性质及存在准则

【例 1】 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则当  $n$  充分大时有

(A)  $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ .      (B)  $|a_n| < \frac{|a|}{2}$ .      (C)  $a_n > a - \frac{1}{n}$ .      (D)  $a_n < a + \frac{1}{n}$ .

【解 1】 直接法

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > 0$ , 则当  $n$  充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

【解 2】 排除法

若取  $a_n = 2 + \frac{2}{n}$ , 显然  $a = 2$ , 且(B) 和(D) 都不正确;

若取  $a_n = 2 - \frac{2}{n}$ , 显然  $a = 2$ , 且(C) 不正确;

故应选(A).

【例 2】 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有

(A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立.      (B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立.

(C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在.      (D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在.

【解 1】 直接法

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$

故选(D).

【解 2】 排除法

由题设条件可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , 但这只能得到, 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  后有  $a_n < b_n < c_n$ , 而不能得到对任意的  $n$  有  $a_n < b_n < c_n$ .

从而(A)(B) 均不正确.

若取  $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$

从而(C) 不正确, 故应选(D).

【例 3】 设对任意的  $x$  总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于于零.      (B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.      (D) 不一定存在.

【解】 (1) 令  $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, f(x) = 1$

显然  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 此时

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

则(A) 和(C) 不正确.

(2) 若令  $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}, f(x) = x, g(x) = x + \frac{1}{x^2}$

则  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (不存在).  
从而(B)不正确, 故应选(D).

**【注】** 不难看出, 本题就是在极限的夹逼准则的基础上改造出来的. 以上是通过举反例用排除法. 事实上, 这里的反例可更简单.

在(1)中令  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$ ; 在(2)中令  $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x$ .

**【例 4】** 设数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 则下列断言正确的是

- (A) 若  $x_n$  发散, 则  $y_n$  必发散. (B) 若  $x_n$  无界, 则  $y_n$  必有界.  
(C) 若  $x_n$  有界, 则  $y_n$  必为无穷小. (D) 若  $\frac{1}{x_n}$  为无穷小, 则  $y_n$  必为无穷小.

**【解 1】** 直接法

由于  $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 \cdot 0 = 0$$

故应选(D)

**【解 2】** 排除法

若取  $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$ , 显然(A)不正确.

若取  $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数.} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数.} \\ n, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 且  $x_n$  无界, 但  $y_n$  也无界, 则(B)不正确.

若取  $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$ , 显然(C)不正确.

故应选(D)

**【例 5】** 设  $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , 则数列  $\{S_n\}$  有界是数列  $\{a_n\}$  收敛的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.  
(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

**【解】** 显然数列  $\{S_n\}$  单调增, 若  $\{S_n\}$  有界, 则  $\{S_n\}$  收敛, 又

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

则数列  $\{a_n\}$  收敛.

但当数列  $\{a_n\}$  收敛时, 数列  $\{S_n\}$  未必有界, 如  $a_n = 1$ .

故应选(B).

**【例 6】** (I) 证明: 对任意的正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$  成立.

(II) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \dots)$ , 证明数列  $\{a_n\}$  收敛.

**【证】** (I) 根据拉格朗日中值定理, 存在  $\xi \in (n, n+1)$ , 使得

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi},$$

所以  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$ .

(II) 当  $n \geq 1$  时, 由(I)知



$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

$$\begin{aligned} \text{且 } a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln(1+n) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

所以数列  $\{a_n\}$  单调下降且有下界, 故  $\{a_n\}$  收敛.

## 题型二 求极限

### 一、求极限的常用方法

#### 方法1 利用有理运算法则求极限

若  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$ , 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

推论: 1) 若  $\lim f(x) = A \neq 0$ , 则

$$\lim f(x)g(x) = A \lim g(x);$$

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} \lim g(x);$$

(即: 极限非零的因子极限可先求出来)

2) 若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim g(x) = 0$ , 则  $\lim f(x) = 0$ ;

3) 若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ , 且  $\lim f(x) = 0$ , 则  $\lim g(x) = 0$ .

#### 方法2 利用基本极限求极限

常用的基本极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

#### 方法3 利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$2) x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$$

$$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$$

3) 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则

$$\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$$

2. 等价无穷小代换的原则

1) 乘、除关系可以换;