金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2016

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

高等数学辅导讲义

主编◎武忠祥

适合大多数考生的高等数学复习用书

★本书的最大特点★

容实用 全面的考试内容，清晰的逻辑结构，让考生真正做到心中有数

参考性强 经典例题，全新练习，指导学习精髓，让你弄清原理心里有底

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2016 李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

高等数学辅导讲义

主编 ◎ 武忠祥

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲义/武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5605-6651-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196662 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

高等数学辅导讲义

主　　编:武忠祥
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:14.75
字　　数:290 千字
版　　次:2014 年 9 月
印　　次:2014 年 9 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5605-6651-1/O·481
定　　价:39.80 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)51906740

前　言

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成。全书共分九章和两个附录,每章均由**考试内容要点精讲**和**常考题型的方法与技巧**及**练习题精选**三部分组成。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学梳理解题思路,掌握常用解题方法和解题技巧。

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面。其中数学二只要求前六章,数学三只要求前七章,数学一全要。希望本讲义能对考研同学有较大帮助。由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正。

祝同学们考研路上一路顺利!

编者

2014 年 7 月

目 录

第一章 函数 极限 连续

第一节 函 数

一、考试内容要点精讲

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y = f(x)$. 常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为函数的**定义域**.

【注】函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则（或称依赖关系）. 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，它们就是同一函数.

2. 函数的性态

1）单调性

定义：单调增： $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

单调不减： $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

判定：(1) 定义；

(2) 导数：设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则

$a)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增；

$b)$ $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减；

2）奇偶性

定义：偶函数 $f(-x) = f(x)$；奇函数 $f(-x) = -f(x)$.

判定：(1) 定义；

(2) 设 $f(x)$ 可导，则：

$a)$ $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数；

$b)$ $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数；

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数；连续的偶函数其原函数之一是奇函数.

【注】设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是奇函数.

3）周期性

定义：$f(x+T) = f(x)$

判定：(1) 定义；

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数；

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

【注】设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

4) 有界性

定义：若 $\exists M>0,\forall x\in I,|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

判定：(1) 定义；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界；

(4) $f'(x)$ 在区间 I(有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界；

【注】(3) 中的区间 (a,b) 改为无穷区间 $(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$ 结论仍成立.

3. 复合函数与反函数

(函数分解成简单函数的复合，分段函数的复合，求反函数)

4. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数：

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

了解它们的定义域、性质、图形.

初等函数：

由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 复合函数

【例 1】已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1,a-1]$.　　(B) $[1,a+1]$.

(C) $[a,a+1]$.　　(D) $[a-1,a]$.

【解】 应选(B)

由 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$ 知 $0\leqslant x\leqslant a$，则

$$1\leqslant x+1\leqslant a+1$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[1,a+1]$.

【例 2】已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 由

$$f(x)=\mathrm{e}^{x^2},f[\varphi(x)]=1-x,$$

知

$$\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=1-x \qquad (x\leqslant 0)$$

$$\therefore \varphi^2(x)=\ln(1-x) \qquad (x\leqslant 0)$$

$$\therefore \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)} \qquad (x\leqslant 0)$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leqslant|x|\end{cases}$

试求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

【解】 当 $|x|<1$ 时, $g(x)=2-x^2>0$, 则 $f[g(x)]=1$;

当 $1\leqslant|x|<2$ 时, $g(x)=|x|-2<0$, 则 $f[g(x)]=0$;

当 $2\leqslant|x|$ 时, $g(x)=|x|-2\geqslant 0$, 则 $f[g(x)]=1$;

$$\text{故}\quad f[g(x)]=\begin{cases}0, 1\leqslant|x|<2\\ 1, |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant 2\end{cases}.$$

当 $x<0$ 时, $f(x)=0$, $|0|<1$, 则 $g[f(x)]=2-0^2=2$;

当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=1$, $|1|=1$, 则 $g[f(x)]=|1|-2=-1$;

$$\text{故}\quad g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

题型二　函数性态

【例 1】已知函数 $f(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围应为

(A) $(0,+\infty)$.　(B) $(0,3]$.　(C) $(0,2)$.　(D) $(1,3]$.

【分析】 由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 所以, 只要 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上必有界.

【解】 由本题选项可知, 只需讨论 $\alpha>0$, 此时

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

当 $\alpha-1\leqslant 2$, 即 $\alpha\leqslant 3$ 时上式极限存在; 当 $\alpha>3$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\infty$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

$$\text{又}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

当 $\alpha-1>0$ 时, 即 $1<\alpha$ 时上式极限存在且为零; 当 $\alpha\leqslant 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\infty$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

因此, 当 $1<\alpha\leqslant 3$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上必有界, 故应选(D).

【例 2】以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

【解 1】 **直接法**

由于 $f'(x)$ 在有限区间 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 故选(C).

【解 2】 **排除法**

令 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,显然 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在(0,1) 内连续,但 $f(x)$ 在(0,1) 内无界,则(A)(B) 都不正确.

令 $f(x)=\sqrt{x}$,显然 $f(x)$ 在(0,1) 内有界,但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在(0,1) 内无界,则(D) 不正确.故应选(C).

【例 3】设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

【解】 本题要用到一个常用的结论:

若 $f'(x_0)>0$,则存在 $\delta>0$,

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f(x)<f(x_0)$;

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f(x)>f(x_0)$.

若 $f'(x_0)<0$ 有相应的结论.

以上结论可利用导数定义和极限的保号性证明.

由以上结论知(C) 正确.

【注】本题选(A) 是一种典型的错误,原因是由 $f'(x_0)>0$,得不到一定存在 x_0 的某邻域,在此邻域内 $f(x)$ 单调增.反例如下:

令 $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

显然 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=1>0$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内不单调增.

事实上,当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}$

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$,则 $f'(x_n)=1-2=-1<0$.

由于以上的点 x_n 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在,则在 $x=0$ 的任何邻域内存在导数为负的点,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$.试证:

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)$ 也是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 单调不增,则 $F(x)$ 单调不减.

【证明】(1)**【证一】** 由题设知

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t$.令 $t=-u$,并由于 $f(-x)=f(x)$,所以

$$F(-x)=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

【证二】 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$

由于 $f(x)$ 为偶函数,则 $x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 都是偶函数,故 $F(x)$ 为偶函数.

(2)【证】 $F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$

$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)],0\leqslant\xi\leqslant x$.(积分中值定理)

因 $f(x)$ 单调不增,故当 $x>0$ 时,$f(\xi)-f(x)\geqslant 0$,从而 $F'(x)\geqslant 0$. 当 $x<0$ 时,$f(\xi)-f(x)\leqslant 0$,从而 $F'(x)\geqslant 0$. 又 $F'(0)=0$,综上可知 $F(x)$ 为单调不减.

第二节　极　限

一、考试内容要点精讲

1. 极限的概念

1) 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$:$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)>0$,当 $n>N$ 时,有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

2) 函数极限

(1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$:$\forall\varepsilon>0,\exists X(\varepsilon)>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$:$\forall\varepsilon>0,\exists X(\varepsilon)>0$,当 $x>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$:$\forall\varepsilon>0,\exists X(\varepsilon)>0$,当 $x<-X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(2) 自变量趋于有限值时函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$:$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$;

右极限:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

【注】 需要分左、右极限求极限的问题主要有三种:

(1) 分段函数在分界点处的极限,而在该分界点两侧函数表达式不同;

(2) e^{∞} 型极限(如 $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x},\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}$);

(3) $\arctan\infty$ 型极限(如 $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x},\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$).

2. 极限的性质

1) 局部有界性:若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界;

2) 保号性:设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则

(1) 若 $A>0$(或 $A<0$)$\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(2) 若 $\exists\delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)$\Rightarrow A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

3）函数值与极限值之间的关系：

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，　其中 $\lim \alpha(x)=0$.

【注】数列极限有对应的以上三条性质.

3. 极限存在准则

1）夹逼准则：

若存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

2）单调有界准则：

单调有界数列必有极限.

【注】函数极限有对应的以上两条准则.

4. 无穷小

1）无穷小的概念：

若 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

2）无穷小的比较：设 $\lim \alpha(x)=0$，$\lim \beta(x)=0$.

（1）高阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$；记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$；

（2）同阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\neq 0$；

（3）等价：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$；记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

（4）无穷小的阶：若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k}=C\neq 0$，称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

3）无穷小的性质：

（1）有限个无穷小的和仍是无穷小；

（2）有限个无穷小的积仍是无穷小；

（3）无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

5. 无穷大

1）无穷大的概念：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$），则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

2）常用的一些无穷大的比较

（1）当 $x\to+\infty$ 时，$\ln^\alpha x << x^\beta << a^x$（其中 $\alpha>0,\beta>0,a>1$）.

（2）当 $n\to\infty$ 时，$\ln^\alpha n << n^\beta << a^n << n! << n^n$（其中 $\alpha>0,\beta>0,a>1$）.

3）无穷大与无界变量的关系：无穷大 $\Rightarrow$ 无界变量

无穷大量一定是无界变量；但无界变量不一定是无穷大量.

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：$\forall M>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：$\forall M>0$，$\exists N$，使 $|x_N|>M$.

例：数列 $x_n=[1+(-1)^n]n$ 是无界变量，但不是无穷大.

4）无穷大与无穷小的关系：

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

二、常考题型的方法与技巧

题型一　极限的概念、性质及存在准则

【例 1】 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

【解 1】 直接法

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a \neq 0$ 知$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a| > 0$，则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

【解 2】 排除法

若取 $a_n = 2 + \dfrac{2}{n}$，显然 $a = 2$，且(B) 和(D) 都不正确；

若取 $a_n = 2 - \dfrac{2}{n}$，显然 $a = 2$，且(C) 不正确；

故应选(A).

【例 2】 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【解 1】 直接法

由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$ 知$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n = \infty$

故选(D).

【解 2】 排除法

由题设条件可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n < \lim\limits_{n\to\infty}b_n < \lim\limits_{n\to\infty}c_n$，但这只能得到，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 后有 $a_n < b_n < c_n$，而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$.

从而(A)(B) 均不正确.

若取 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$c_n = n$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2} = 0$

从而(C) 不正确，故应选(D).

【例 3】 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于于零.　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　(D) 不一定存在.

【解】 (1) 令 $\varphi(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$，$g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$，$f(x) = 1$

显然 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，此时

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = 1$$

则(A) 和(C) 不正确.

(2) 若令 $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$，$f(x) = x$，$g(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

则 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$（不存在）.

从而(B) 不正确，故应选(D).

【注】 不难看出，本题就是在极限的夹逼准则的基础上改造出来的. 以上是通过举反例用排除法. 事实上，这里的反例可更简单.

在(1) 中令 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=1$；在(2) 中令 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$.

【例 4】 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

【解 1】 直接法

由于 $y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0\cdot0=0$$

故应选(D)

【解 2】 排除法

若取 $x_n=n, y_n=\dfrac{1}{n^2}$，显然(A) 不正确.

若取 $x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数.}\\0, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数.}\\n, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，且 x_n 无界，但 y_n 也无界，则(B) 不正确.

若取 $x_n=\dfrac{1}{n^2}, y_n=n$，显然(C) 不正确.

故应选(D)

【例 5】 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【解】 显然数列 $\{S_n\}$ 单调增，若 $\{S_n\}$ 有界，则 $\{S_n\}$ 收敛，又

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

但当数列 $\{a_n\}$ 收敛时，数列 $\{S_n\}$ 未必有界，如 $a_n=1$.

故应选(B).

【例 6】 (Ⅰ) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证】 (Ⅰ) 根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

所以 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{n}$.

(Ⅱ) 当 $n\geqslant1$ 时，由(I) 知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0,$$

且 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln(1+n)-\ln n>0,$

所以数列$\{a_n\}$单调下降且有下界，故$\{a_n\}$收敛.

题型二　求极限

一、求极限的常用方法

方法 1　利用有理运算法则求极限

若$\lim f(x)=A$，　$\lim g(x)=B$. 则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

推论：1）若$\lim f(x)=A\neq 0$，则

$\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$;

$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}\lim g(x)$;

（即：极限非零的因子极限可先求出来）

2）若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$;

3）若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且 $\lim f(x)=0$，则 $\lim g(x)=0$.

方法 2　利用基本极限求极限

常用的基本极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad(a>0)$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

方法 3　利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小　　当 $x\to 0$ 时，

1）$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim \mathrm{e}^x-1$;

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$a^x-1\sim x\ln a$，

2）$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，　　$\arcsin x-x\sim\frac{x^3}{6}$

$\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}$，　　$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$

3）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

2. 等价无穷小代换的原则

1）乘、除关系可以换；