高等财经院校“十二五”精品系列教材

JINGPIN XILIE JIAOCAI

概率论与数理统计

陈晓兰　马玉林　主编

Probability Theory and Mathematical Statistics

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校“十二五”精品系列教材

JINGPIN XILIE JIAOCAI

概率论与数理统计

陈晓兰　马玉林　主编　　王晓杰　张　慧　副主编

Probability Theory and Mathematical Statistics

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陈晓兰，马玉林主编.—北京：经济科学出版社，2013.2
高等财经院校“十二五”精品系列教材
ISBN 978-7-5141-2973-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈…②马… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第016608号

责任编辑：柳 敏 李晓杰
责任校对：杨晓莹
版式设计：齐 杰
责任印制：李 鹏

概率论与数理统计
陈晓兰 马玉林 主 编
王晓杰 张 慧 副主编
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号 邮编：100142
总编部电话：88191217 发行部电话：88191537
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京市季蜂印刷有限公司印装
710×1000 16开 23.75印张 450000字
2013年1月第1版 2013年1月第1次印刷
印数：00001—10000册
ISBN 978-7-5141-2973-1 定价：32.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：88191502）

总　序

大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。* 大学的本质在于把一群优秀的年轻人聚集一起，让他们的创新得以实现、才智得以施展、心灵得以涤荡，产生使他们终身受益的智慧。

大学要以人才培养和科学研究为己任，大学教育的意义在于它能够给人们一种精神资源，这一资源可以帮助学子们应对各种挑战，并发展和完善学子们的人格与才智，使他们经过大学的熏陶，学会思考、学会反省、学会做人。一所大学要培养出具有健全人格、自我发展能力、国际视野和竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，不可能有高质量的人才培养，不可能产生一流或特色鲜明的大学。大学教材应该是对学生学习的引领、探索的导向、心智的启迪。一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。

目前，中国的大学教育已从“精英型教育”走向“平民化教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提升？教材建设的功能愈显重要。

为了全面提高教育教学质量，培养社会需要的、具有人文精神和科学素养的本科人才，山东财经大学启动了“十二五”精品教材建设工程。本工程以重点学科（专业）为基础，以精品课程教材建设为目标，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十二五”精品系

---

* 雅斯贝尔斯著，邹进译：《什么是教育》，生活·读书·新知三联书店1991年版，第150页。

列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。本系列教材从选题、立项，到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关口，突出财经特色，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务，两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材汇集各领域最新教学与科研成果，对其进行提炼、吸收，体现了教学、科研相结合，有助于培养具有创新精神的大学生。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，本系列教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示当今社会发展的新理论、新方法、新成果。

本系列教材是山东财经大学教学质量与教学改革建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授、专家多年教学的经验和心血，是大家共同合作的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

山东财经大学教材建设委员会

2012 年 6 月

前　言

随机现象的普遍性以及现代经济分析方法的定量化趋势，使得概率论与数理统计的应用日渐广泛，也使得概率论与数理统计课程成为高等财经类院校各专业学生的一门重要的必修课程。该课程不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践探索的必要基础，而且对培养学生的综合能力、提高学生的数学素养、提高科研能力和创新能力都具有重要的作用。

本书是我们在山东财经大学多年教授概率论与数理统计课程的基础上编写而成。也是山东财经大学精品课程《概率论与数理统计》的一项重要的建设成果。针对财经类专业的特点，本书在以下几个方面作了一些尝试：

第一，在编写过程中，除注重概率论与数理统计本身的科学性、系统性和严密性外，还特别注重了通俗性、思想性和直观性，力求以较为通俗的语言将高度抽象的课程内容介绍给读者。同时，考虑到财经类专业文理兼收的生源特点，在编写过程中，还特别注重介绍了定理和方法的思想性和图示的直观性，使学生更易于理解和接受。

第二，在编写本教材时，充分体现了内容与实际要求的协调统一。适当地引入历年研究生考试试题作为例题与习题，使学生在学习基础知识的过程中接受或接触综合性的知识考查形式。同时，加强了习题与正文内容的协调性与针对性。教材针对课堂教学的渐进性不仅为各小节配备了习题，每一章也配备了 A、B 两部分不同类型、不同难度的习题，A 部分的习题可以满足本课程教学大纲的基本要求，适度加大了 B 部分的题目数量和难度，主要为适应部分渴望进一步提高的学生的学习需求。部分章节中打“*”号的内容，是为保证教材体系的完整性和对数学基础要求较高的专业或学生编写的，供使用本教材的教师在授课时选用，也供学有余力的学生课外阅读。

第三，我们选编了部分综合运用概率论与数理统计知识并且具有简单的经济背景的题目，用以培养学生数学建模的思想和用数学知识分析问题解决问题的能

力。为学生学习后续专业课程和从事经济研究奠定必要的基础。在附录中介绍了概率论与数理统计发展简史，目的是使学生体会到科学的发展是需要科学家不懈的努力和探索，引导他们对该课程的学习兴趣。

本书是山东财经大学“十二五”精品系列教材建设项目，由陈晓兰教授、马玉林教授主编，具体编写分工如下：第1章、第2章由陈晓兰教授编写；第3章、第4章由张慧副教授编写，第5章由郭洪峰副教授编写，第7章、第8章由马玉林教授编写，第6章、第9章由王晓杰副教授编写，陈晓兰教授负责全书的统稿和审定工作。

在本书的编写过程中我们参阅并借鉴了相关的文献资料，并得到了同行专家的指导与帮助，在此表示衷心的感谢。特别感谢经济科学出版社的编辑们和山东财经大学教务处给予的大力支持。

由于水平所限，错漏之处在所难免，望读者不吝指正。

编　者

2013年1月于济南

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

引　　言

现实世界存在着两类现象：一类是所谓确定性现象，即在一定条件下必然会发生（或必然不会发生）的现象，例如：

（1）在标准大气压下，纯水加热到 100℃必然沸腾；

（2）在标准大气压下，温度高于 4℃的纯水不会结冰。

这类现象，我们可以事先准确地断定其未来的结果，称之为**确定性现象**。研究这类现象所使用的数学工具是我们已经学过的微积分、代数与几何等。另一类是所谓**非确定性现象**，即在一定条件下具有多种可能的结果，究竟哪种结果发生事先无法确定的现象。例如：

（1）掷一颗骰子，出现的点数可能是 1，2，3，4，5，6 中的某一个；

（2）某保险公司的年赔偿金额；

（3）从某厂生产的一批产品中，任意抽取 4 件进行检验，抽到的次品数可能是 0，1，2，3 或 4。

这类现象，在相同的可控制条件下进行一系列重复的观察或实验，每次出现的可能结果不止一个，而在每次实验或观察之前无法预知确切的结果，呈现出偶然性即不确定性，我们称之为**随机现象**。

恩格斯曾经说过："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"（《马克思恩格斯选集》第四卷）人们经过长期实践和深入研究之后，也发现随机现象是偶然性与必然性的辩证统一。其偶然性表现在每次实验或观察之前，不能准确地预言发生哪种结果；其必然性表现在大量重复实验或观察中，它的结果呈现出某种量的规律性。例如，抛掷一枚形状对称、质地均匀的硬币一次，其结果可能是正面

（徽花面）朝上，也可能是反面（数字面）朝上，正面出现与否，抛掷之前是无法确切地预言的。但多次重复地抛掷这枚硬币，正面出现的次数大约占抛掷总次数的一半（见1.3中表1－2）。这种在大量重复实验或观察中呈现出的量的规律性，我们称之为**随机现象的统计规律性**。概率论与数理统计就是以随机现象的统计规律性为研究对象的一门重要的、有特色的数学分支。一般认为数理统计是概率论的一种应用，而概率论则是数理统计的理论基础。由于我们所处的客观世界，无处不有偶然性在起作用，所以概率论与数理统计的理论与方法已经广泛应用于自然科学和社会科学等诸多领域。

"欲涉远必自迩，欲登高必自卑。"我们要对一门科学进行学习和研究，就必须从钻研它的一些基本概念和方法入手。因为任何一门科学，总包含着它所依据的一系列基本概念和方法。为此，我们首先回顾概率论与数理统计所必需的预备知识。

1.1 预备知识

1.1.1 两个基本原理

1. 加法原理

若完成一件事有 m 种不同的方式，第 i 种方式中有 $n_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 种不同的方法，其中任何一种方法都可以一次完成这件事，则完成这件事共有 $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i$ 种不同的方法。

加法原理又称分类加法计数原理，主要针对的是"分类问题"，其中各种方法相对独立，用其中任何一种方法都可以完成这件事情。

2. 乘法原理

若一件事需要经过先后 m 个不同步骤才能最后完成，其中第 i 个步骤有 $n_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 种不同方法，则完成该件事共有 $\prod\limits_{i=1}^{m} n_i$ 种不同方法。

乘法原理又称分步乘法计数原理，主要针对的是"分步问题"，各个步骤中

的方法相互依存，只有各个步骤都完成才算完成这件事情。

例 1.1.1　飞行在北京—天津—上海—广州航空线上的民航飞机，要准备多少种不同的飞机票？

解　由乘法原理知，需要 $4\times3=12$ 种不同的飞机票。

运用两个原理解决计数问题时，首先要仔细分析以确定需要分类还是分步。对“分类问题”做到“不重不漏”；对“分步问题”做到“步骤完整”；对较为复杂的问题，可同时运用两个基本计数原理或借助于列表、作图等方法分析解决。加法原理和乘法原理是学习排列组合的基础。

1.1.2　排列组合

1. 不重复排列

从 n 个不同的元素中每次取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的**排列**。若 $m<n$，称之为**选排列**。若 $m=n$，称之为**全排列**。

选排列和全排列的种数分别用符号 P_n^m 和 P_n^n 表示，由乘法原理知其计算公式分别为

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

$$P_n^n=n!$$

2. 可重复排列

从 n 个不同的元素中有放回地（可重复）取 m 个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个的**可重复排列**。

由乘法原理知其排列种数为 n^m。

3. 组合

从 n 个不同的元素中每次取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同的元素，不管顺序如何组成一组，称为从 n 个不同元素中每次取 m 个不同元素的组合。其组合总数用符号 C_n^m 表示，由乘法原理知其计算公式为

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定 $0!=1$。

注 1.1.1　由上述计算公式不难验证组合有如下性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；　(2) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$；

(3) $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{m-k}=C_{n_1+n_2}^m$；　(4) $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m=2^n$。

例 1.1.2　从 6 个毕业生中，任选 4 个人到某行业内 4 个分支机构工作，每个机构 1 人，有多少种分配方法?

解　有 $P_6^4=360$ 种分配法。

例 1.1.3　某城市电话号码是八位数字，并且首位不能为零，该城市最多可以安装多少台不同号码的电话机?

解　这是一个从 0，1，2，…，9 十个数码中选取八个数字的可重复的排列问题。由乘法原理知最多可以安装 9×10^7 台电话机。

例 1.1.4　在一次考试中，某学生应做 9 道考题中的任意 6 道，问他有多少种选法? 如果还要求他至少解答前 5 道题中的 3 道题，有多少种选法?

解　本题与顺序无关，属于组合问题。在 9 道考题中选 6 道，有 $C_9^6=84$ 种选法；若至少要回答前 5 道题中的 3 道，包括下列三种情况：

(1) 在前 5 题中选 3 个，后 4 题中选 3 个。由乘法原理，有 $C_5^3\cdot C_4^3=40$ 种选法；

(2) 在前 5 题中选 4 个，后 4 题中选 2 个，有 $C_5^4\cdot C_4^2=30$ 种选法；

(3) 前 5 题全选，后 4 题中选 1 个，有 $C_5^5\cdot C_4^1=4$ 种选法。

由加法原理，共有 $C_5^3\cdot C_4^3+C_5^4\cdot C_4^2+C_5^5\cdot C_4^1=74$ 种选法。

习题 1-1

1. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四种不同的工作，若其中甲、乙两名志愿者不能从事翻译工作，共有多少种不同的选派方案?

2. 从编号为 1，2，3，…，10，11 的 11 个球中任取 5 个球，使这 5 个球的编号之和为奇数，共有多少种不同的取法?

3. 将标号为 1，2，…，10 的 10 个球放入标号为 1，2，…，10 的 10 个盒子内，每个盒内放一个球，则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的方法有多少种?

1.2 随机事件和样本空间

1.2.1 随机事件

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科。为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察或实验。这里所说的观察或实验是广义的，可以是各类科学实验，也可以是对某些事物的某些特征的观察。例如，观察某种商品的日销量，各种福利彩票的摇奖等。在概率论与数理统计中，我们把对随机现象的观察或实验统称为**随机试验**，简称**试验**。概率论中所研究的随机试验具有以下特点：

（1）在可控条件相同的前提下，试验可以（或原则上可以）重复进行，即**重复性**；

（2）每次试验的结果具有多种可能性，但是试验之前可以明确试验的所有可能结果，即**明确性**；

（3）在每次试验之前不能准确地预言该次试验将会出现哪一种结果，即**随机性**。

例 1.2.1 掷一颗骰子，观察出现的点数就是一个随机试验。

例 1.2.2 抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况也是一个随机试验。

在概率论与数理统计中，将随机试验的结果称为**随机事件**，简称**事件**。换言之，随机事件是指每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件，通常用大写字母 A、B、……表示。例如，在例 1.2.1 掷骰子的试验中，“出现 2 点”、“出现偶数点”，在例 1.2.2 抛硬币的试验中，“正面朝上”等都是随机事件。在随机事件中，有的可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其他事件的组合。我们将不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件称为**基本事件**。例如，例 1.2.1 中“出现 2 点”、“出现 5 点”等都是基本事件，“出现偶数点”也是随机事件，但它不是基本事件，而是由“出现 2 点”、“出现 4 点”和“出现 6 点”这三个基本事件组成的。我们将这种能够分解为两个或多个基本事件的随机事件称为**复合事件**。

1.2.2 样本空间

对于随机试验中的随机事件及其相互关系或运算，如果应用集合概念和集合

图示法，则较为直观且易于理解。为此，我们引入样本空间的概念，从集合论的角度来描述和研究随机事件。

对于一个特定的随机试验，它的每一个基本结果（基本事件）称为一个**样本点**，用小写字母 ω 表示。全体样本点的集合，称为该试验的**样本空间**，通常用 Ω 表示。

显然，一个特定随机试验的样本空间 Ω 的子集就是该试验的一个随机事件，若这个子集是单点集，则它对应该试验的一个基本事件。随机事件在某一随机试验中发生，当且仅当其所包含的某一样本点在试验中出现。由于每次试验中一定有样本空间 Ω 中的某一个样本点出现，因此，又称样本空间 Ω 为**必然事件**，即每次试验中一定发生的事件，称空集 Φ 为**不可能事件**，即每次试验中一定不发生的事件。

应该指出的是：必然事件和不可能事件是每次试验之前都可以准确预言的，从本质上讲它们都不是随机事件，但为了讨论问题方便，我们还是把它们作为两个极端情况处理。必然事件与不可能事件有着紧密的联系，并且不论必然事件、不可能事件还是随机事件，都是相对于一定的试验条件而言，如果试验的条件变了，事件的性质也将可能发生变化。例如，在掷骰子的试验中，掷一颗骰子时，“点数小于 7”是必然事件，掷两颗骰子时，“点数之和小于 7”是随机事件，而掷 7 颗骰子时“点数之和小于 7”就是不可能事件了。

例 1.2.3　将一枚硬币连抛 3 次，观察正反面出现的情况，试写出该随机试验的样本空间。

解　用“H”表示出现“正面”，“T”表示出现反面。于是，由题设，基本事件是从两个相异元素 H、T 中，允许重复地取出 3 个元素的排列，而所有这种排列共有 $2^3=8$ 种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),\\(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

注 1.2.1　随机试验的样本空间是由试验的所有基本事件所对应的样本点组成的集合。只要根据题设条件，分析基本事件的特征，即可写出相应于随机试验的样本空间为

$$\Omega=\{e \mid e \text{ 是试验的基本事件}\}$$

基本事件和样本空间是概率论与数理统计中的两个十分重要的概念，样本空间可以是有限集，也可以是无限集。如观察“某射击手在击中目标之前的射击次数”的样本空间是

$$\Omega=\{k \mid k=0,1,2,\cdots\}$$