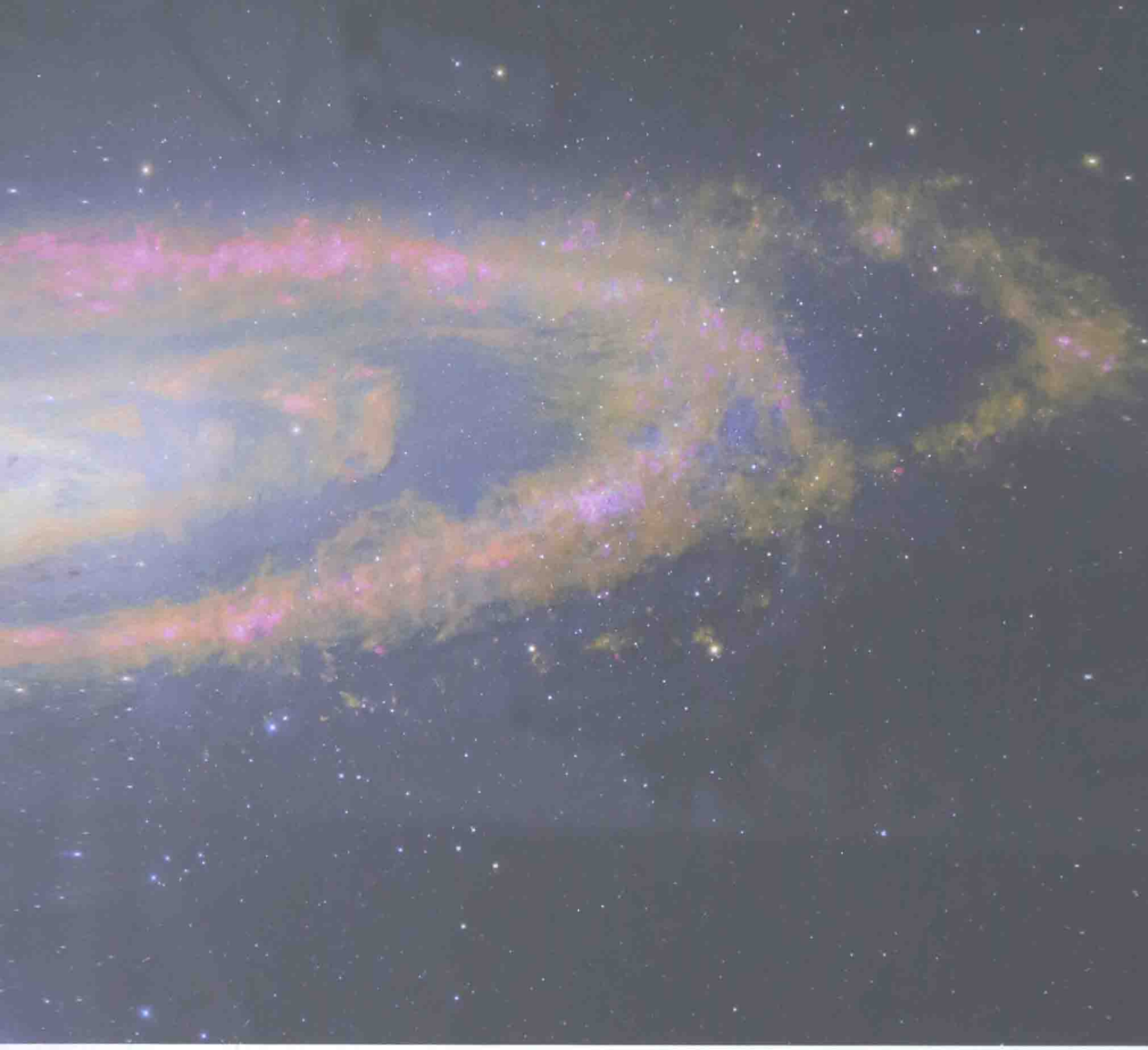

University Physics
大学物理（上册）

主编 吴亚非

高等教育出版社

Daxue Wuli

大学物理

（上册）

主编 吴亚非

编者（按音序排列）

顾洪恩 李增智 梁麦林 刘新典

孟湛祥 吴亚非 杨红波

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为大学物理基础教材，是参照教育部物理基础课程教学指导分委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2010年版）的要求，本着“概念准确、叙述简练、易教易学”的宗旨，对传统教材的内容进行了必要调整和整合后编写而成的。

本书分为上、下两册，并配有相应的学习指导书。上册内容包括：力学、气体动理论及电磁学；下册内容包括：振动、波动、几何光学、波动光学、狭义相对论基础、物质的波粒二象性、量子力学基础、固体的量子理论及原子核和粒子物理。

本书可作为高等学校非物理专业大学物理课程的教材，也可供社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理．上册／吴亚非主编．－－北京：高等教育出版社，2015.3

ISBN 978－7－04－041857－6

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①吴…　Ⅲ．①物理学－高等学校－教材　Ⅳ．①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第014666号

策划编辑　缪可可　　责任编辑　张海雁　　封面设计　张　楠　　版式设计　杜微言
插图绘制　杜晓丹　　责任校对　王　雨　　责任印制　尤　静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×1092 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	16.75	版　　次	2015年3月第1版
字　　数	360千字	印　　次	2015年3月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	29.80元

物 料 号　41857－00

○ 前　　言

“大学物理”不仅是高等院校中许多专业的基础课程，而且是一门启迪智慧、培养科学思维方法的重要课程。

物理学对客观事物的运动规律有着独特的科学分析方法，它善于从错综复杂的客观世界中，找出事物运动发展中最关键的要素，提炼出简洁而又代表其本质的物理模型，从总结其客观规律的“知其然”开始，向着“知其所以然”一路追踪下去，使整个宇宙在人们的眼前变成一幅越来越清晰的图像，为各种“创新”提供了思想的原动力。从而，物理学也形成了自己独特的、严谨的、科学的思维模式。

长期以来，天津大学先后编写出版了多套适合多种学时的大学物理教材，这为今天新教材的编写奠定了良好的基础。为了适应当今科学技术的迅速发展，也为了配合高中课程改革的需要，编者们严格遵照物理基础课程教学指导分委员会提出的“教学基本要求”，结合天津大学多年来积累的大学物理教学经验与体会，并参考了兄弟院校的类似教材，对我校原有教材进行了重新整合、修改，力图做到：概念准确、叙述简练、教师易教、学生易学。

本教材的编写工作得到我校教务处、理学院和物理系领导的关怀和支持，更有许多教师为本教材的编写做了大量的工作，在此对其一并表示真诚的感谢和崇高的敬意。

在本教材的编写工作中，孟湛祥负责第一章质点力学、第二章刚体力学的编写；刘新典负责第三章气体动理论、第四章热力学基础的编写；吴亚非负责第五章静电场、第六章恒定磁场、第七章电磁感应、第八章麦克斯韦方程组的编写；李增智负责第九章简谐振动、第十章波动、第十二章波动光学的编写；杨红波负责第十一章几何光学基础的编写；顾洪恩负责第十三章狭义相对论基础的编写；梁麦林负责第十四章物质的波粒二象性、第十五章量子力学基础、第十六章固体的量子理论、第十七章原子核和粒子物理的编写。

由于水平有限，书中难免有不当之处，衷心希望广大的老师和学生们对我们提出批评指正。

编者

2014 年 8 月

○ 目　　录

第一章
质点力学

物理学是研究物质的结构、相互作用以及它们的运动规律的科学。物体的运动形式多种多样，其中最简单、最基本的运动形式是机械运动，它指的是物体位置的变化。研究物体机械运动规律的分支学科称为力学，它是物理学的基础。

一般来说，可将力学分为运动学、动力学和静力学三个方面。运动学只研究物体作机械运动过程中位置随时间的变化规律，确定物体的运动特征，例如速度、加速度及运动轨迹等，它不涉及引起运动的原因；动力学则研究物体运动状态变化的原因，即物体的运动与物体间相互作用的内在规律；静力学则研究物体在相互作用下的平衡问题。从理论体系上讲，静力学只是动力学的一种特殊情况，一般不将其单列标题阐述。不过因为静力学问题在生产实际中广泛存在而且较为重要，所以在与实际工程相关的力学领域中往往对其独立地加以研究。

1.1 质点运动学

研究物体的运动时，对于一个具体问题，需要根据一定的条件和要求，突出主要因素，忽略次要因素，以便抓住问题的实质。这里一方面需要把研究对象简化成理想模型，另一方面还要适当采用一些理想化方法。力学中主要涉及两种理想化模型：质点和刚体。关于刚体的问题将在下面的章节中予以讨论，这里先讨论质点。所谓质点，是指具有一定的质量，而无大小和形状的一个点。有两种情形可以将物体简化为质点：一是物体运动时，物体上各个点的运动情况完全相同，任意一点的运动都能代表物体整体的运动；二是物体本身的尺度远小于物体运动的范围。

1.1.1 参考系与坐标系

1. 参考系

宇宙万物都处于永恒的运动之中，绝对静止的物体是不存在的，这是运动的绝对性。然而物体运动又有其相对性，一个物体的运动总是相对另一物体而言的。为了描述一个物体的运动，必须另选一个物体（或物体系）作为参考，然后研究这一物体相对于被选作参考的物体的运动。这个被选作参考的物体称为参考系。一般来讲，对于同一物体的运动，选择不同的参考系，运动的描述也是不同的。例如，在一条笔直的道路上有一辆匀速行驶的汽车，车上一人向上抛出一个小球。选择汽车作为参考系，小球作竖直上抛运动，运动轨迹是直线；而如选择地面作为参考系，则小球作斜抛运动，运动轨迹是抛物线。

研究物体的运动学问题，参考系的选择是任意的，主要看问题的性质和研究是否方便。必须明确，参考系一经选定，物体运动的描述也就确定。在下面的讨论中，若无特别声明，通常均以地面为参考系。

2. 坐标系

为了定量地描述物体的运动，还需要在参考系上建立一个适当的坐标系，将坐标系的原点和轴线固定在参考系上。坐标系可以有不同的选择，一般有直角坐标系、球坐标系、柱坐标系，还有平面极坐标系、自然坐标系等。对于一个具体问题，选择恰当的坐标系，可以给研究带来方便，否则将使问题变得繁杂。研究者的首要任务就是针对具体要研究的问题，选择一个合适的坐标系。

当我们研究一个物体相对某一坐标系的运动时，参考系常常并不出现，原因是坐标系和参考系是固定在一起的，此时的坐标系实质上充当了参考系的化身，是参考系的几何抽象。

1.1.2 描述质点运动的物理量

描述质点运动的物理量主要有：位置矢量、位移、速度与加速度等。下面首先采用矢量法对上述物理量予以定义，后面一节再将它们落实到不同坐标系中，给出各物理量在不同坐标系中的具体表达式。

1. 位置矢量

如图 1-1 所示，若质点某时刻位于 P 点处，则质点在空间的位置可用自坐标原点 O 至 P 点的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示。矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为质点的位置矢量，简称位矢，也称径矢。它的大小为该质点到坐标原点的距离 r，方向由 O 指向 P。显然，质点在运动过程中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小与方向不断变化，可将位矢 $\boldsymbol{r}$ 随时间的变化关系表示为时间函数的形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.1}$$

式（1.1.1）给出了质点在任意时刻 t 的空间位置，称为质点的运动方程矢量式。

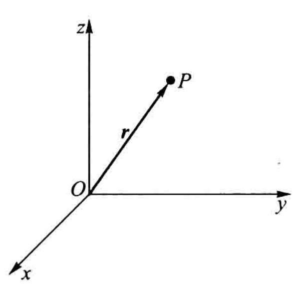

图 1-1 质点的位矢

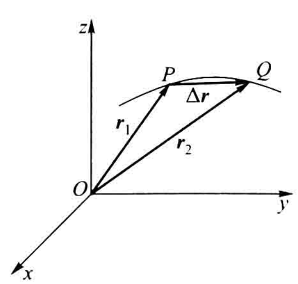

图 1-2 质点的位移

2. 位移

设质点沿图 1-2 所示的曲线轨道运动，时刻 t 质点位于 P 点处，相应位矢为 $\boldsymbol{r}_1$，经过 Δt 时间，质点运动到 Q 点处，相应位矢为 $\boldsymbol{r}_2$，在 Δt 时间内质点位置的

改变可以用其位置矢量的增量来表示，称为质点在 Δt 时间内的位移，记为

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \tag{1.1.2}$$

显然，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 是矢量，它的大小等于 P、Q 两点间的距离，方向由 P 指向 Q。

在国际单位制中，位移的单位为米（m）。

必须注意，位移与路程是两个不同的物理量。位移是矢量，具有大小和方向，它表示质点在 Δt 时间内始末位置的变化，在图 1-2 中，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的大小等于曲线上 P、Q 两点间的直线距离，即弦长；路程是标量，它表示质点在 Δt 时间内运动路径的长度，在图 1-2 中，路程等于 P、Q 两点间的弧长，可将其记为 Δs。除了质点作单向直线运动以外，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与路程 Δs 一般并不相等，只有当 Δt 趋于零时，才有 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s=\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta \boldsymbol{r}|$ 或 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。另外，还要注意 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr 的区别，$|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$ 表示位移矢量的大小；$\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$ 则表示末态与初态位矢大小之差。

3. 速度

速度是描述质点运动的快慢及方向的物理量。

质点在 Δt 时间内位矢的平均变化率称为平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$，表示为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.1.3}$$

平均速度是矢量，其方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 一致，大小为 $|\overline{\boldsymbol{v}}|=\left|\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$。由于质点运动的快慢和方向随时间不断变化，因而平均速度不能反映质点运动的细节。为了精确反映质点运动的细节，可取式（1.1.3）当 $\Delta t\to 0$ 时的极限值，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 称为质点在 t 时刻的瞬时速度，简称速度，它等于位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一阶导数。

速度是矢量，其方向是 $\Delta t\to 0$ 时的，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向。在图 1-2 中，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向就是过 P 点的切线方向并指向质点前进的一侧。

描述质点运动的快慢，还有一个称为速率的物理量。在 Δt 时间内质点运动的路程 Δs 与 Δt 的比值称为质点在 Δt 时间内的平均速率，表示为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.1.5}$$

对比式（1.1.3）和（1.1.5）可知，平均速度是矢量，而平均速率是标量，由于 Δs 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 一般不相等，所以平均速率与平均速度的大小一般不相等。

但是，当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速率的极限值称为质点在 t 时刻的瞬时速率，简称速率，表示为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=|\boldsymbol{v}| \tag{1.1.6}$$

其中用到了前面讨论过的 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 以及考虑到 $\mathrm{d}t$ 应恒为正值的实际情况。由式

（1.1.6）可见，速率是标量，速率等于速度矢量的大小。

在国际单位制中，速度和速率的单位是米每秒（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$）。

4. 加速度

加速度是描述质点运动速度变化快慢的物理量。

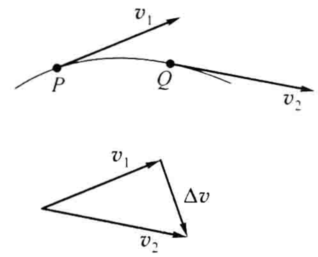

图 1-3　质点的速度增量

如图 1-3 所示。设质点在 t 时刻位于 P 点，速度为 $\boldsymbol{v}_1$，经过 Δt 时间，质点运动到达 Q 点，速度变为 $\boldsymbol{v}_2$，在 Δt 时间内，质点速度的增量为 $\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$，则在 Δt 时间内质点的平均加速度定义为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均加速度的极限值称为质点在 t 时刻的瞬时加速度，简称加速度，表示为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.7}$$

可见，质点的加速度等于速度对时间的一阶导数，或等于位矢对时间的二阶导数。

加速度是矢量，其方向是 $\Delta t \to 0$ 时速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向。由于 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}$ 的方向一般情况下并不一致，所以加速度的方向与速度的方向一般也不一致。例如，质点作曲线运动时，速度的方向沿曲线的切线方向，而加速度的方向总是指向曲线的凹侧。

在国际单位制中，加速度的单位是米每二次方秒（$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$）。

1.1.3　直角坐标系中质点运动的描述

以上我们采用矢量法讨论了描述质点运动的主要物理量，所涉及的位矢、位移、速度与加速度都是矢量。采用矢量法给出的定义公式简洁、概念清晰，有助于对问题实质的思考和解决。但是在具体计算尤其是进行矢量叠加计算时，矢量法有时略显麻烦，而如果将矢量放在坐标系中进行讨论和计算，将会带来很多方便。

下面主要讨论直角坐标系、平面极坐标系和自然坐标系。

直角坐标系是最简单的坐标系。取固定于参考系的一点为原点，通过原点作三根两两正交的直线并规定出每根直线的正方向，分别称之为 x、y、z 坐标轴。这就组成了直角坐标系。为了与矢量运算的法则相一致，通常采用的直角坐标系是右旋系：先将右手并拢的四指指向 x 轴，然后弯曲四指转向 y 轴，则拇指的方向指向 z 轴的正方向。

1. 位矢与运动方程、轨道方程

在直角坐标系中，质点 P 的位矢 $\boldsymbol{r}$（图 1-4）可以表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.1.8}$$

其中的 x、y、z 分别为位矢 $\boldsymbol{r}$ 投影到三个坐标轴上所得的分量，注意三个分量本

身带正负号；而 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 轴的单位矢量。所谓单位矢量是指：其大小（或称为模）等于 1 并具有确定指向的矢量。位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小也就是质点 P 所在位置与 O 点之间的距离表示为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.1.9}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向可用三个方向余弦表示为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r} \tag{1.1.10}$$

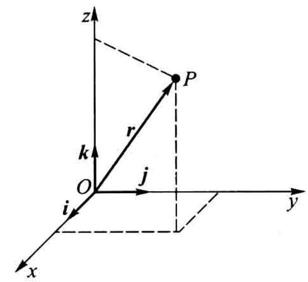

图 1-4 直角坐标系中质点的位矢

其中的 α、β、γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 轴正向间的夹角，称为方位角。由于三个方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1.1.11}$$

所以三个方位角中只有两个是独立的。

质点在运动过程中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 随时间变化，x、y、z 三个分量亦随时间变化，可将其表示为时间的函数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1.1.12}$$

式（1.1.12）称为质点的运动方程分量式，它与式（1.1.1）等价。

质点运动时途经的点连接形成的空间曲线称为轨道。将运动方程分量式（1.1.12）中的时间 t 消去，可得到关于 x、y、z 的函数关系式

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{1.1.13}$$

此式称为质点运动的轨道方程。

2. 位移

位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ 在直角坐标系中可以表示为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1.1.14}$$

式中

$$\Delta x=x_2-x_1,\ \Delta y=y_2-y_1,\ \Delta z=z_2-z_1 \tag{1.1.15}$$

Δx、Δy、Δz 是位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴的分量，仿照对位矢 $\boldsymbol{r}$ 的处理，可分别求出 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小和方向。其实，这个问题的实质在于，上面求位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向的方法是数学上求任意一个矢量大小和方向的一般方法，无论对上面的位矢、位移，还是对下面的速度、加速度都是普遍适用的。

3. 速度

速度在直角坐标系中可以表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.16}$$

式中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.17}$$

是速度 $\boldsymbol{v}$ 沿三个坐标轴的分量。这里应该注意，在直角坐标系中求速率的正确方法为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.1.18}$$

如果写成 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$则是错误的，因为$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$表示位矢的大小随时间的变化率，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}\neq\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$，将式（1.1.9）和式（1.1.16）—（1.1.18）对比便可一目了然。

4. 加速度

加速度在直角坐标系中可以表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.19}$$

式中

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.20}$$

a_x、a_y、a_z 是加速度沿三个坐标轴的分量。

以上讨论了位矢、位移、速度及加速度矢量在直角坐标系中的表达式，从中可以看出，任一曲线运动都可以分解成沿 x、y、z 三个方向各自独立的直线运动的叠加，这就是运动的叠加原理。例如，抛体运动可以看成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的匀加速直线运动的叠加。当然，运动的分解方式不是唯一的。同一运动，在不同的坐标系中，可以分解为不同方向运动的叠加。

1.1.4　运动学的两类问题

由以上讨论可知，如果知道了质点的运动方程，也就知道了质点任意时刻所处的位置，通过逐次对时间求导数就可得到质点任意时刻的速度和加速度，从而能够了解质点运动的全部情况。但这只是问题的一个方面，问题的另一方面，是上述问题的反问题，即如何由加速度或速度求解质点的运动方程。下面就来讨论质点运动学中的这两类问题。

1. 已知运动方程，求速度和加速度

这类问题只需依照上面所列的速度、加速度公式逐次对时间求导数即可得解。

例题 1-1　已知质点作平面运动，运动方程为 $\boldsymbol{r}=2\cos\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{i}+2\sin\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$。求：

（1）轨道方程；

（2）从 $t=1$ s 到 $t=2$ s 之间质点的平均速度与平均速率；

（3）$t=1$ s 时质点的速度与速率；

（4）$t=1$ s 时质点的加速度。

解：（1）质点运动方程的分量式为 $x=2\cos\dfrac{\pi}{2}t$，$y=2\sin\dfrac{\pi}{2}t$，取其平方之和，

消去时间 t，得到轨道方程为 $x^2+y^2=2^2$。此式表明，质点作圆周运动，圆心位于原点，半径 $R=2$ m。

（2）$t=1$ s 时质点的位矢 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{j}$ m；$t=2$ s 时质点的位矢 $\boldsymbol{r}_2=-2\boldsymbol{i}$ m。位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$ m，而 $\Delta t=(2-1)$ s $=1$ s，平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=(-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$ m · s^{-1} 又由 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 可知，经过 $\Delta t=1$ s，质点走过 1/4 圆弧，其路程为 $\Delta s=2\pi R/4=\pi$ m，于是平均速率 $v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\pi$ m · s^{-1}。

（3）速度函数 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\pi\sin\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{i}+\pi\cos\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{j}$，$t=1$ s 时质点的速度 $\boldsymbol{v}_1=-\pi\boldsymbol{i}$ m · s^{-1}，速率 $v=|\boldsymbol{v}_1|=\pi$ m · s^{-1}。

（4）加速度函数 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\pi^2}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{i}-\dfrac{\pi^2}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}t\boldsymbol{j}$，$t=1$ s 时质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_1=-\frac{\pi^2}{2}\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

例题 1-2 如图 1-5 所示，河中有一条小船，一根绳子一端系于小船，另一端跨过岸边滑轮并由一人以匀速率 v_0 收绳，滑轮高出水面 h，求小船的运动速度、加速度与小船到岸边距离的关系。

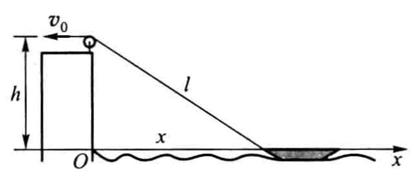

图 1-5 河中小船的运动

解：如图所示建立坐标系，设某时刻小船到岸边的距离为 x，绳长为 l，则有几何关系 $l^2=h^2+x^2$，两边对时间求导数，得 $l\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，考虑到随时间增加，绳长 l 减小，应有 $\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0$，于是小船的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0=-v_0\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}$$

加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{l}{x}\right)=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

可见，当小船趋近岸边时，距离 x 减小，速度和加速度均增加，小船作变加速运动，其中负号表示 v 和 a 均与 x 轴反向。

2. 已知加速度或速度求运动方程

这类问题从数学上讲是上一类问题的逆运算，需要采用积分的方法来求解。由于积分运算的特点，求解此类问题还需要知道质点的初始条件，即 $t=0$ 时刻质点的初始速度和初始位置。根据加速度与不同变量之间的关系，这类问题又可细分为三种情况：① $a=a(t)$，② $a=a(v)$，③ $a=a(x)$。下面以具体的实例来说明各种情况的处理方法。

例题 1-3 一质点作平面运动，加速度 $\boldsymbol{a}=4t\boldsymbol{i}$（$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$），式中 t 为时间，$t=0$ 时质点正以速度 $\boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$通过坐标原点，求质点的运动方程。

解： 本题应按 x、y 两个方向，先分别求速度再求坐标。由于加速度是时间的函数，积分较简单。

根据题意，x 方向有$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=a_x=4t$，分离变量 $\mathrm{d}v_x=4t\mathrm{d}t$；当 $t=0$ 时，$v_x=0$；t 时刻，速度为 v_x；两边积分 $\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t 4t\mathrm{d}t$，得 $v_x=2t^2=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；再分离变量 $\mathrm{d}x=2t^2\mathrm{d}t$；当 $t=0$ 时，$x=0$；t 时刻，坐标为 x；两边积分 $\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$，得 $x=\dfrac{2}{3}t^3$。

y 方向有$\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=a_y=0$，$v_y=$常量；由于 $t=0$ 时 y 方向初速度为 $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，所以有 $v_y=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$；分离变量 $\mathrm{d}y=2\mathrm{d}t$；当 $t=0$ 时，$y=0$；t 时刻，坐标为 y；两边积分 $\int_0^y\mathrm{d}y=\int_0^t 2\mathrm{d}t$，得 $y=2t$。

合并以上结果，得质点运动方程为

$$\boldsymbol{r}=x\ \boldsymbol{i}+y\ \boldsymbol{j}=\frac{2}{3}t^3\boldsymbol{i}+2t\ \boldsymbol{j}\ (\mathrm{m})$$

例题 1-4 质量为 m 的摩托艇在水面上以速度 v_0 沿直线运动，在关闭发动机后，由于阻力作用，摩托艇的加速度 a 与速度 v 的关系为 $a=-\dfrac{k}{m}v$，其中 k 为大于零的常量。从关闭发动机时开始计时，求：（1）t 时刻摩托艇的速度；（2）时间 t 内摩托艇前进的距离。

解：（1）取摩托艇前进方向为 x 轴正向，由题意，有$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a=-\dfrac{k}{m}v$，这里应注意，分离变量时不能简单写成 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 然后两边积分，因为这里 a 是 v 的函数。正确做法是将 a 中含 v 的部分与 $\mathrm{d}v$ 写在一起，使得等式中一边只含有 v，另一边只含有 t，即$\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t$。当 $t=0$ 时，速度为 v_0；设 t 时刻，速度为 v；两边积分 $\int_{v_0}^{v}\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=-\int_0^t\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t$，得 $v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$。

（2）由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，分离变量 $\mathrm{d}x=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t$；取 $t=0$ 时，$x=0$；t 时刻，坐标为 x，两边积分 $\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t$，得 $x=\dfrac{m}{k}v_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$。

例题 1-5 一质点沿 x 轴正向运动，其加速度 a 与坐标 x 之间的关系为 $a=x$，已知 $t=0$ 时，质点位于 x_0（$x_0>0$）处且速度 $v_0=0$，求质点速度 v 与坐标 x 的关系。

解：按加速度定义，$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=x$，这里遇到的问题是，等式中含有三个变量 v、x 与 t，若直接分离变量无法做到等式两边各只含一个变量。解决方法是设法先消去一个变量，对于本问题，具体做法是：$a=x=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，这样消去时间 t 后，即可正常分离变量 $v\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，根据初始条件，两边积分 $\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^x x\mathrm{d}x$，得到 $v=\sqrt{x^2-x_0^2}$。

通过以上实例可以看到，如果加速度表达式中含有三个变量，则需要通过变量代换消去其中的一个变量，使得表达式中只含有两个变量；进一步，为了两边同时积分求得速度，需要分离变量，使得等号两边各自只含有一个变量，才能进行积分。这里尤其要注意，不能出现在等式一边含有两个变量的情况下只对其中一个变量积分的错误。至于由速度求坐标，则只会出现表达式中含有两个变量的情况，处理问题的数学方法与上面相同，同样要注意分离变量问题。

1.1.5 平面极坐标系中质点运动的描述

在所研究的平面内取固定于参考系的一点为原点 O，极坐标系中称为极点。然后，在该平面内取固定于参考系并由极点向外的一条射线，称为极轴。这就组成了平面极坐标系，如图 1-6 所示。平面上任意一点 P（不在极点）的位置，可由两个量来确定：一是 P 点到 O 点的距离 r，二是 OP 与极轴间的夹角 θ（以逆时针为正向），两者组成极坐标（r，θ），r 称为极径，θ 称为极角。取值范围：$r>0$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。平面极坐标系中单位矢量的定义如下：由 P 点出发沿 OP 向外延伸作单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，称为径向单位矢量；过 P 点垂直 $\boldsymbol{e}_r$ 向 θ 角增加的方向作单位矢量 $\boldsymbol{e}_\theta$，称为横向单位矢量。显然，尽管 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的大小不变，恒等于 1；但 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向是随 P 点的位置变化的，换言之，是随时间变化的，二者不是常矢量。而直角坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是恒定不变的常矢量，这是两者的重要区别。

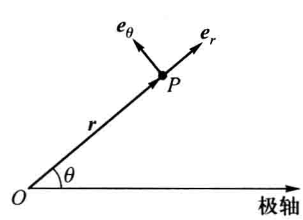

图 1-6 平面极坐标系

1. 位矢与运动方程

在平面极坐标系中，质点的位矢表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.21}$$

式中，$r(t)$ 为位矢的大小；位矢的方向与径向单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 一致。质点 P 在平面上运动时，坐标 r 与 θ 均随时间变化，其运动方程分量式表示为

$$\begin{cases}r=r(t)\\ \theta=\theta(t)\end{cases} \tag{1.1.22}$$

式中，$r(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别表示位矢的大小与方向随时间的变化关系。将式（1.1.22）中的时间 t 消去，得到 r 与 θ 的关系式即为轨道方程。