21世纪高等院校创新教材

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编◎李振华　齐宗会

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAILüLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主　编◎李振华　齐宗会

副主编◎周振宁　樊园杰

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李振华，齐宗会主编. —北京：中国人民大学出版社，2014.11
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-20215-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李…②齐… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 243118 号

21 世纪高等院校创新教材
概率论与数理统计
主　编　李振华　齐宗会
副主编　周振宁　樊园杰
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2015 年 1 月第 1 版
印　　张	11.5 插页 1	**印　　次**	2015 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	268 000	**定　　价**	23.00 元

内容简介

本书根据高等院校经管类专业概率论与数理统计课程的最新教学大纲编写而成，注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学的思想和方法，紧密联系实际，服务专业课程，精选了许多实际应用案例并配备了相应的应用习题，供读者学习时选用.

本书内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析简介等知识.

本书可作为普通高等院校、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相应专业的概率论与数理统计教材.

前　言

概率论与数理统计是近代数学的一个分支，是研究现实生活中一类不确定现象(随机现象)及其规律性的一门学科，在工业生产、科技、医药、国防、经济等各个方面都有广泛的应用. 随着我国现代化的进程，概率论与数理统计在我国日益受到人们的重视，高校的许多专业都把这门课列入教学计划，甚至在高中和中专的教材中也出现了概率论和数理统计的初步知识. 故掌握概率论和数理统计的基本思想和方法是每一个数学教师的迫切任务.

本书根据高等院校经管类专业概率论与数理统计课程的最新教学大纲编写而成，注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学的思想和方法，紧密联系实际，服务专业课程，精选了许多实际应用案例并配备了相应的应用习题，供读者学习时选用.

本书内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析简介等知识.

本书可作为普通高等院校、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相应专业的概率论与数理统计的教材.

在本书的编写过程中，天津师范大学的刘立凯教授提出了许多宝贵意见；宝德学院的领导和老师也给予了热情的帮助，在此，向他们表示衷心的感谢.

目　录

第一章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象(随机现象)及其规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来，它已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、医药卫生等各个领域. 特别是近几年，其思想方法在经济、管理、金融、保险等方面的应用使得这些领域的研究方法取得了实质性的进展. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最重要、最基本的概念之一.

§1.1 随机事件及其关系和运算

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在的现象大致可以分为两类：确定性现象和随机现象.

在一定的条件下进行试验，必然会出现某一结果的现象，称为**确定性现象**，亦称为**必然现象**.

例如，(1)在标准大气压下，把纯水加热到 100℃，水必沸腾；(2)盒子里有 10 个白球，任取一个必为白球.

在一定的条件下进行试验，于试验结束之前不能准确预言其结果的现象，称为**随机现象**.

例如，(1)掷一枚均匀的硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面；(2)袋中有 3 个白球 2 个红球，有放回地每次任取一个，则球的颜色不完全一样，可能取到白球也可能取到红球；(3)观察一小时内电话交换台接到的呼唤次数，可能多也可能少.

那随机现象到底有没有规律可循？下面就这一问题进行简单的介绍.

根据随机现象性质的不同，有些随机现象可以通过重复出现来体现一定的规律性，而有些随机现象则不具有这样的特征. 所以随机现象又可以大致分成两类：个别随机现象和大量随机现象.

一般把不能在相同条件下重复出现且带有偶然性的现象，称为**个别随机现象**. 例如，“牛顿于 1727 年 3 月 31 日去世”，还有很多带偶然性特点的历史事件，都可以归属于个别

随机现象.

在一定的条件下可以(至少原则上可以)重复出现的现象，称为**大量随机现象**，例如，掷硬币观察其正反面出现的情况，等等. 概率论主要研究的是大量随机现象的规律性，一般不研究个别随机现象. 以后若无特别说明，随机现象都指大量随机现象.

大量随机现象所体现的规律性又称为**统计规律性**，其特点是在多次重复出现时表现出来的一种规律性. 例如，一名优秀的短跑运动员，一两次短跑成绩不足以反映其真实水平，而应该通过多次测试其真实水平才能表现出来. 概率论的任务，就是通过随机现象的随机性揭示其统计规律性.

二、随机试验与样本空间

1. 随机试验

对于随机现象的结果，初看似乎毫无规律. 然而人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象具有其固有的规律性. 也就是上面所说的随机现象的**统计规律性**. 概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科.

例如，掷一枚均匀的硬币结果出现正面还是反面有规律吗？这种规律性又如何表现出来呢？历史上有一些著名的试验，表 1—1—1 为我们提供了背景.

表 1—1—1 **抛硬币试验记录**

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	正面频率
De Morgan	2 048	1 061	0.518 07
Buffon	4 040	2 048	0.506 93
Pearson	12 000	6 019	0.501 58
Pearson	24 000	12 012	0.500 50

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**随机试验**，并简称为试验，记为 E. 而并不是任何试验都是随机试验，概率论研究的主要是大量随机现象，这就对试验有一定的要求.

我们称一个试验 E 为随机试验，如果它满足：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验总出现这些可能结果中的一个，但试验之前不能确定会出现哪个结果.

【例 1】 判断下面试验是否为随机试验.

(1) 从某厂生产的灯泡中任取一只观察其最长使用时间；

(2) 观察两同性电荷是否会相斥.

解 根据随机试验的条件判断(1)为随机试验，(2)不属于随机试验，不满足第二个和第三个条件.

2. 样本空间

对于试验 E，它的每一个可能结果称为一个**样本点**，记为 ω_i 或 e_i ($i=1,\cdots,n,\cdots$)；全体样本点所构成的集合称为**样本空间**，记为 Ω(或 S).

【例 2】 从标号为 $1,2,\cdots,10$ 的十个球中任取一个，观察取到球的标号.

解 样本点：$\omega_i=$｛取到第 i 号球｝，$i=1,\cdots,10$；样本空间：$\Omega=\{\omega_i:i=1,\cdots,10\}=\{1,2,\cdots,10\}$.

【例 3】 观察某市 120 急救电话交换台在一昼夜内接到的呼叫次数.

解 样本点：$\omega_i=$｛接到 i 次呼叫｝，$i=0,1,2,\cdots$；样本空间：$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

对于一个试验 E 而言，其样本点可能是有限个，也可能是无限个.

三、随机事件

1. 随机事件的概念

在概率论中，只包含一个样本点的事件称为**基本事件**，包含两个或两个以上样本点的事件称为**复合事件**. 基本事件与复合事件统称为**随机事件**，简称**事件**. 习惯上，用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$表示；有时也用{……}或"……"表示(大括号或引号内用式子或文字表示事件的内容).

例如，掷硬币"出现正面"；掷色子"出现偶数点"；抽样检验"抽到不合格品"等都是事件；若以 n 表示 10 次射击命中的次数，则 $\{5\leqslant n<9\}$ 也是事件.

在一定的条件下必然发生的事件称为**必然事件**，用 Ω（或 S）表示. 例如，在标准大气压下，把水加热到 100℃，则{水沸腾}是一个必然事件. 在一定的条件下必然不发生的事件称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 例如，在标准大气压下，把水加热到 100℃，则{水结冰}是一个不可能事件. 必然事件和不可能事件都是确定性事件，为了方便讨论，今后我们将它们都看作两个特殊的随机事件.

2. 随机事件的集合表示

由定义，样本空间 Ω 是随机试验的所有可能结果(样本点)的集合，每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以一个事件对应于 Ω 中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 Ω 的一个子集. 于是，任何一个事件都可以用 Ω 的某个子集来表示.

例如，在例 2 的随机试验中 $A=$｛抽到偶数号球｝，则可将 A 表示成 $A=\{2,4,6,8,10\}$.

基本事件 ω 只包含它自身，用单元素集 $\{\omega\}$ 来表示；必然事件包含全体事件，用样本空间 Ω 来表示；不可能事件不含任何事件，用空集 $\varnothing$ 来表示.

四、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系和运算来处理.

(1) 包含：若事件 A 发生必导致事件 B 发生(即 A 中的每个样本点都在 B 中)，则称事件 A **包含于事件** B，或事件 B **包含事件** A，记 $A\subset B$.

(2) 相等(等价)：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$（即 A 与 B 包含完全相同的样本点)，则称事件 A 与事件 B **相等**，记 $A=B$.

(3) 和(并)："事件 A 与事件 B 至少有一个发生"作为一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**和或并**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$；"有限个 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$

之中至少有一个发生”作为一个事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(或并)，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) 积(交)：“事件 A 与事件 B 同时发生”作为一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**交或积**，记作 $A\cap B$ 或 AB；“有限个 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”作为一个事件，称为这些事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交(或积)，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(5) 差：“事件 A 发生但事件 B 不发生”作为一个事件，称为“事件 A 与事件 B 的**差**”或“A 减 B”，记作 $A-B$.

(6) 互不相容(互斥)：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**，或者**互斥**. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互不相容，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

(7) 对立(互逆)：事件“A 不发生”称为事件 A 的**对立事件**，记作 $\overline{A}$. 显然，A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件：$\overline{\overline{A}}=A$，即 A 和 $\overline{A}$ 互为对立事件. 在每次试验中，两个相互对立的事件 A 和 $\overline{A}$ 必有一个出现，但不可能同时出现. 所以两个相互对立的事件一定是互不相容事件，但是两个互不相容事件一般未必是对立事件.

由于事件的运算法则与集合的运算法则相同，所以我们可以利用图形(维恩图，Venn，1834—1888，英国逻辑学家)来表示事件之间的关系 (见图 1—1—1).

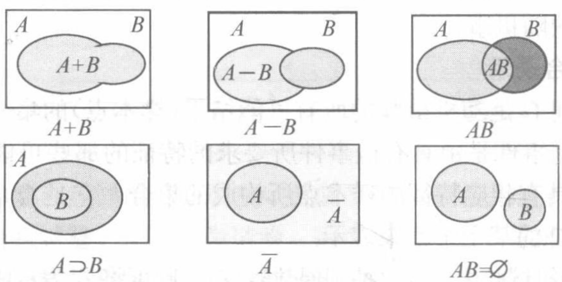

图 1—1—1 维恩图

易见事件的运算满足如下基本关系：

(1) $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{A}=\Omega-A$.

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$.

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB$，$A\cup B=A\cup(B-A)$.

利用事件的关系与运算可以得出如下概念：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是有限或可数个事件，如果其满足：

(1) 事件两两互不相容：$A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j)$；

(2) 它们之和是必然事件：$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\Omega$. 即事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 在每次试验中必出现一个且只出现一个；

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组.

显然 A 与 $\overline{A}$ 是一个完备事件组.

【例 4】 某射手连续射击 10 次，记录其命中次数，则样本空间为 $\Omega=\{0,1,\cdots,10\}$；以 n 表示 10 次射击命中的次数，事件 $A=\{n\geqslant 6\}$，$B=\{n<6\}$，$C=\{n\geqslant 7\}$，$D=\{5\leqslant n\leqslant 8\}$，则事件作为样本空间的子集，有如下关系式：

$$\overline{A}=B, A+B=\Omega=\{0,1,\cdots,10\}, A-B=A,$$
$$A+C=A, A-C=\{6\}, A+D=\{5,6,\cdots,10\}, A-D=\{9,10\};$$
$$A\cap C=C, B\cap C=\varnothing, A\cap D=\{6,7,8\}, B\cap D=\{5\}.$$

五、事件的运算规律

对于任意事件 A,B,C，满足交换律、结合律、分配律、自反律和对偶律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 自反律　$\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注　以上各运算都可以推广到有限个或可数个事件的情形.

【例 5】 甲、乙、丙三人进行射击训练，记 A 表示“甲击中目标”，B 表示“乙击中目标”，C 表示“丙击中目标”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1)“乙未击中目标”：$\overline{B}$；

(2)“甲击中而乙未击中”：$A\overline{B}$；

(3)“三人中只有丙未击中”：$AB\overline{C}$；

(4)“三人中恰好有一人击中”：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(5)“三人中至少有一人击中”：$A\cup B\cup C$；

(6)“三人中至少有一人未击中”：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(7)“三人中恰有两人击中”：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(8)“三人中至少两人击中”：$AB\cup AC\cup BC$；

(9)“三人均未击中”：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(10)“三人中至多一人击中”：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(11)“三人中至多两人击中”：$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

习题 1—1

1. (1) 一枚硬币连抛 2 次，观察正面 H、反面 T 出现的情形，样本空间是：$\Omega=$ ______；(2) 一枚硬币连抛 3 次，观察出现正面的次数，样本空间是：$\Omega=$ ______；(3) 一枚硬币连抛 2 次，A：第一次出现正面，则 $A=$ ______；B：两次出现同一面，则 $B=$ ______；C：至少有一次出现正面，则 $C=$ ______.

2. 掷一颗骰子. A：出现奇数点，则 $A=$ ______；B：数点大于 2，则 $B=$ ______.

3. A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件：

(1) “A、B、C 都不发生”表示为：________.

(2) “A 与 B 都发生，而 C 不发生”表示为：______.

(3) “A 与 B 都不发生，而 C 发生”表示为：______.

(4) “A、B、C 中最多两个发生”表示为：______.

(5) “A、B、C 中至少两个发生”表示为：______.

(6) “A、B、C 中不多于一个发生”表示为：______.

4. 设某人向靶子射击 3 次，用 A_2 表示“i 次射击击中靶子”($i=1,2,3$)，试用语言描述下列事件：(1) $A_1\cup A_2\cup A_3$；(2) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；(3) $\overline{A_1\cup A_2}$.

5. 举例说明两个事件互不相容与两个事件对立的区别.

§1.2 随机事件的概率

一、随机事件的频率与概率

1. 事件的频率

在相同的条件下将试验 E 重复 n 次，设在这 n 次试验中事件 A 发生了 $r_n(A)$ 次，则称比值

$$f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$$

为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**.

注：易证，频率有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；　(2) $f_n(\varnothing)=0$；　(3) $f_n(\Omega)=1$；

(4) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_n(A_i)$.

实践证明频率具有稳定性：当试验次数 n 很大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 总是稳定于某个常数，频率的这一特性称为**频率的稳定性**.

由表 1—2—1 可以看出，随着试验次数的不断增大，正面出现的频率越来越“稳定”在数值 0.5 附近，而与 0.5 有较大偏差的情形越不易发生，于是我们就用 0.5 来刻画正面出现的可能性的大小，称 0.5 为正面出现的“概率”. 一般地，我们有如下概率的统计定义.

表 1—2—1　　**抛掷硬币统计频数和频率的试验**

抛掷硬币次数 n	10	100	1 000	4 040	12 000	24 000	30 000
出现正面次数 $f_n(A)$	6	45	490	2 048	6 019	12 012	14 994
出现正面频率 $\frac{f_n(A)}{n}$	0.6	0.45	0.490	0.506 9	0.501 6	0.500 5	0.499 8

2. 概率的统计定义

在一定条件下，将试验 E 重复进行 n 次，当试验次数 n 很大时，如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，并且随着试验次数 n 的不断增大，$f_n(A)$ 与 p 有较大偏差的情形越少发生，则称数值 p 为事件 A 发生的概率. 记为 $P(A)=p$.

频率的稳定性，是指当 n 很大时，$f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 经常地在 $P(A)$ 附近，$f_n(A)$ 与 $P(A)$ 有显著差异的情形十分罕见，但不是绝对不可能的. 所以，增加了试验次数，频率接近于概率，不是绝对必然的，而是极大可能的. 因此"频率的极限是概率"的说法是不准确的.

二、概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$. 若 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) 非负性：对每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 完备性(规范性)：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：对任意可数个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$；

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

三、概率的性质

除了概率的公理化定义中的三条外，概率还有下列性质：

性质 1 $P(\varnothing)=0$；

性质 2 (有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$)，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

性质 3 $P(\bar{A})=1-P(A)$；

性质 4 (减法公式) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；若 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

性质 5 (单调性) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

性质 6 (加法公式)对于任意事件 A,B,C，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$
$$P(A+B+C)=[P(A)+P(B)+P(C)]-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

【例 1】 已知 $P(\bar{A})=0.5$，$P(\bar{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，求(1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(A\cup B)$；(4) $P(\bar{A}\bar{B})$.

解 (1) 因为 $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$，所以 $P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.2$；

(2) 因为 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$;

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.3$.

【例 2】 产品有一、二等品及废品 3 种,若一、二等品率分别为 0.63 及 0.35,求产品的合格率与废品率.

解 令 $A=\{$任取一产品为合格品$\}$,$A_1=\{$任取一产品为一等品$\}$,$A_2=\{$任取一产品为二等品$\}$,则 A_1,A_2 互不相容,且 $A=A_1+A_2$,故

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.63+0.35=0.98,$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=0.02.$$

四、古典概型

1. 古典概率与计算

如果一个随机试验 E 具有下述两个特征:

(1) 样本空间 Ω 中只有有限个基本事件(样本点)$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$;

(2) 每个基本事件 $\omega_i(1=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性都相同;

则称这种随机试验为古典型随机试验,而相应的数学模型称为古典概型.

【例 3】 判断下列试验是否为古典概型.

E_1:掷一枚均匀硬币,观察出现哪一面;

E_2:从 m 件正品、n 件次品中任取一件,观察取到的是正品还是次品;

E_3:同时掷两枚相同的硬币,观察出现哪一面;

E_4:对靶射击一次,观察弹着点到靶心的距离.

解 E_1,E_2 是古典概型,而 E_3,E_4 就不是.

对于古典概型事件概率的计算有公式可循,设古典型随机试验的样本空间中共有 n 个基本事件(样本点),A 为古典概型中的事件. 而事件 A 由 m 个基本事件组成(A 包含的样本点个数),则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{组成 } A \text{ 的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}. \tag{1.1}$$

这个计算公式称为**概率的古典定义**,这就把求古典概率的问题转化为基本事件的计数问题.

2. 基本计数原理

(1) 乘法原理.

如果完成某件事需分 n 个步骤:完成第 1 步有 m_1 种方法;完成第 2 步有 m_2 种方法;…;完成第 n 步有 m_n 种方法,则完成这件事一共有 $m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种方法.

(2) 加法原理.

如果完成某件事有 n 种方式,第 1 种方式有 m_1 种方法;第 2 种方式有 m_2 种方法;…;第 n 种方式有 m_n 种方法,则完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

这两个基本原理在排列组合中，无论是推导公式还是解答问题都经常引用，应熟练掌握.

3. 排列组合方法

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素，依一定的顺序摆成一排，叫做从 n 个不同元素中取 r 个元素的**排列**. 这种排列的总数为

$$\mathrm{P}_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

当 $r<n$ 时，称为**选排列**；当 $r=n$ 时，称为**全排列**，此时 $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_n^n=n!$.

从 n 个不同的元素中取出 r 个元素，不考虑它们的顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中取 r 个元素的**组合**. 这种组合的总数为

$$\mathrm{C}_n^r=\frac{\mathrm{P}_n^r}{\mathrm{P}_r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

【例 4】 有 m 个男同学与 n 个女同学，

(1) 女同学必须排在一起，有多少种排法?

(2) 首尾必须是男同学，有多少种排法?

解 (1) 由排列方法和乘法原理排法为 $\mathrm{P}_{m+1}\cdot\mathrm{P}_n$；(2) 由乘法原理可得 $\mathrm{P}_m^2\cdot\mathrm{P}_{m+n-2}$.

【例 5】 袋中有 7 个球,4 白 3 黑. 从中任取 3 个球,计算至少有两个白球的概率.

解 令 $A=\{$至少有两个白球$\}$.

从 7 个球中任取 3 个，共有 C_7^3 种取法，它们都是等可能的；而其中至少有 2 个白球的取法有下面两种情况：①2 个白球 1 个黑球有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1$ 种取法；②3 个都是白球有 C_4^3 种取法. 故使 A 发生的取法共有 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_4^3$ 种，于是有 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}=\dfrac{22}{35}$.

【例 6】 在 6 张同样的卡片上分别写有字母 C，C，I，I，R，T，现在将 6 张卡片随意排成一列，求恰好排成英文单词 CRITIC(评论家)的概率 p.

解 6 张卡片的全排列有 $N=6!=720$ 种,其中恰好排成英文单词 CRITIC 的排法总共有 $M=2\times2=4$ 种：两个字母 C 交换位置计 2 种，两个字母 I 交换位置计 2 种. 因此，

$$p=\frac{4}{720}=\frac{1}{180}.$$

【例 7】 从一批共 1 000 台机床中抽取 10 台作质量检验，已知 1 000 台中有 990 台是正品，其余 10 台是次品，试求：

(1) 现从 1 000 台中任取 10 台，共有多少种取法；

(2) 10 台都是正品的取法有多少种；

(3) 10 台中有 1 台次品的取法有多少种；

(4) 抽得的 10 台机床都是正品的概率；

(5) 抽得 9 台正品 1 台次品的概率.

解 设 $A=\{$抽得的 10 台机床都是正品$\}$，$B=\{$抽得 9 台正品 1 台次品$\}$.

(1) 从 1 000 台机床中抽取 10 台共有 $C_{1\,000}^{10}$ 种方法.

(2) 10 台机床都为正品的情况数为 C_{990}^{10}.

(3) 抽得 10 台中 9 台正品 1 台次品的取法为 $C_{990}^{9}C_{10}^{1}$ 种.

(4) 由公式可得 $P(A)=\frac{C_{990}^{10}}{C_{1\,000}^{10}}=0.904$；$P(B)=\frac{C_{990}^{9}C_{10}^{1}}{C_{1\,000}^{10}}=0.092\,1$.

【例 8】 将 n 个球任意放到 N 个箱子中($N\geqslant n$)，其中每个球都等可能地放入任意一个箱子，求下列各事件的概率：

(1) 指定的 n 个箱子各放一球； (2) 每个箱子最多放入一球；

(3) 某指定的箱子不空； (4) 某指定的箱子恰好放入 $k(k\leqslant n)$ 个球.

解 将 n 个球任意放到 N 个箱子中，共有 N^n 种放法，即基本事件总数是 N^n，它们是等可能的. 记(1)，(2)，(3)，(4)的事件分别为 A，B，C，D，根据古典概率公式，可得(1) $P(A)=\frac{n!}{N^n}$；(2) $P(B)=\frac{P_N^n}{N^n}$；(3) $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}$；(4) $P(D)=\frac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}$.

习题 1—2

1. 已知 $P(A\cup B)=0.8$，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，则 (1) $P(AB)$ ________，(2) $P(\overline{A}\overline{B})=$ ________，(3) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$ ________.

2. 已知 $P(A)=0.7$，$P(AB)=0.3$，则 $P(A\overline{B})=$ ________.

3. 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.25$，$P(B)=0.5$，$P(AB)=0.125$，求 $P(A\cup B)$，$P(\overline{A}B)$，$P(\overline{AB})$.

4. 在 100，101，…，999 这 900 个 3 位数中，任取一个 3 位数，求不包含数字 1 的概率.

5. 在仅由数字 0，1，2，3，4，5 组成且每个数字至多出现一次的全体三位数中，任取一个三位数. 求：(1) 该数是奇数的概率；(2) 该数大于 330 的概率.

6. 袋中有 5 只白球，4 只红球，3 只黑球，在其中任取 4 只，求下列事件的概率.

(1) 4 只中恰有 2 只白球，1 个红球，1 只黑球.

(2) 4 只中至少有 2 只红球.

(3) 4 只中没有白球.

7. 将 3 个球(1～3 号)随机地放入 3 个盒子(1～3 号)中，一个盒子装一个球. 若一个球装入与球同号的盒子，称为一个配对.

(1) 求 3 个球至少有 1 个配对的概率.

(2) 求没有配对的概率.

8. 某班有 30 名同学，其中 8 名女同学，随机地选 10 个，求：(1) 正好有 2 名女同学的概率；(2) 最多有 2 名女同学的概率；(3) 至少有 2 名女同学的概率.

9. 将 3 个不同的球随机地投放到 4 个盒子中，求有三个盒子各一球的概率.