数学的乐园

王元

——庆祝中国科学院数学研究所成立60周年

席南华 尚在久 孙笑涛 编

科学出版社

华罗庚-吴文俊数学出版基金资[redacted]

数学的乐园

——庆祝中国科学院数学研究所成立60周年

席南华　尚在久　孙笑涛　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为中国科学院数学研究所成立60周年而作，内容包括研究现状、研究人员简介、数学所简介、人才培养、往事的追忆等。

读者对象是关心数学研究所和对数学研究所感兴趣的人士，包括数学界专业人士和有意前往数学研究所深造的学生。

图书在版编目(CIP)数据

数学的乐园：庆祝中国科学院数学研究所成立60周年/席南华，尚在久，孙笑涛编. —北京：科学出版社，2013

ISBN 978-7-03-039090-5

I. ①数… II. ①席… ②尚… ③孙… III. ①中国科学院-数学-研究所-概况 IV. ①O1-242

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第265095号

责任编辑：赵彦超／责任校对：韩 杨

责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2014年1月第二次印刷 印张：14

字数：272 000

定价：58.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

60 这个数字在人们的日常生活和中国文化中都有独特的意味。2012 年，时值中国科学院数学研究所成立 60 周年，为此举行了一系列的庆祝活动，包括座谈会、学术报告、庆祝会议等。

数学所的学术成就、精神和文化在学术界和社会上都有非凡的声誉。在建所 60 年之际，编辑一本书展示数学所最近的研究工作、精神、魅力，是一件有意义的事情。

本书内容包括数学所的研究现状、简介 (含现况与简史)、人才培养、一些回忆和感怀。其中研究现状部分由数学所的研究人员参与编写，十分感谢他们在繁重的本职工作之余挤出时间撰写相应部分。除编者外，参与组织编写的主要人员有田野、段海豹、李嘉禹、崔贵珍、周向宇、张平、丁彦恒、张晓、陆汝钤等，在此谢谢他们辛勤出色的工作。

感谢杨乐、陆启铿两位前辈为本书所写的文章。杨乐先生的文章简洁精炼，读后不仅让人了解很多，也启迪后人，促人思考。陆启铿先生的文章生动地再现了数学所早期的一些事情，让人感慨良多。感谢王元先生，他为本书题写了书名。

李文林教授写了数学所简史部分，邵欣女士写了人才培养部分，李福安教授整理了他在座谈会上的发言，王友德教授主笔回忆了他和几位同学在数学所做研究生的时光，张晓轶教授回顾了她在数学所做博士后的经历与感悟，聂思安博士写了他在数学所读研究生的一些心得，感谢他们的支持。结语取自编者之一 —— 席南华在数学所成立 60 周年庆祝会上的讲话稿。

由于时间仓促和工作繁忙，本书的不足之处很多，希望能得到读者的指正，以便再版时做得更好。

席南华　尚在久　孙笑涛

2012 年 11 月

目　　录

研究现状

数学所是专门从事数学研究的机构，她过去的一些成就如典型域上的调和分析、关于示性类的工作、关于哥德巴赫猜想的工作、关于亚纯函数的 Borel 方向与亏值的工作等人们比较熟悉，数学所的研究现状是怎样的则可能是一个让人好奇的问题。本篇介绍数学所 2000 年以来的部分研究工作和主要研究方向，包括数论、代数、代数几何、几何与拓扑、几何分析、单复变函数论、多复变函数论、偏微分方程、泛函分析、数学物理、计算机科学等十一个部分，希望通过这些介绍能让人对数学所的研究现状如研究水平、研究力量和研究领域等有大致的了解。

一、数　论

(一) 2000 年以来的部分研究工作

数论一直是数学所重要的研究领域，前三十年的工作主要在解析数论方面，20 世纪 80 年代后开始发展代数数论和与之密切相关的算术代数几何。目前在代数数论和算术代数几何方面的主要研究方向是椭圆曲线的算术、p-adic 伽罗华表示和 p-adic 模形式、ℓ-adic 上同调、自守形式与自守表示、整点问题等；解析数论方面则主要研究一些与素数有关的问题。研究人员现有田野、李文威、田一超、郑维喆、魏达盛、王元、贾朝华等。

椭圆曲线的算术方面主要的工作有 (田野完成)：一个正整数称为同余数，如果它是一个三边长均为有理数的直角三角形的面积。田野证明了对任意给定的正整数 k，存在无穷多个无平方因子的同余数，其奇素因子个数恰为 k (*PNAS*，2012)。

自守形式与自守表示方面的主要工作有 (李文威完成)：对辛群二重覆盖建立了基本引理 (*Canadian J. of Math.*，2012) 及迹公式理论 (*Crelle* 2012 在线发表，*Ann. Scie. de I'ENS* 2012；*Math. Ann.*，2012 在线发表)。

p-adic 伽罗华表示以及 p-adic 模形式方面的主要工作有 (田一超完成)：对有正特征剩余域的完备离散赋值环上的平坦群概型，证明了 Abbes-Saito 滤过界由群概型的阶的线性函数给出 (*Algebra and Number Theory*，2012)。

ℓ- 进上同调方面的主要工作有 (郑维喆和合作者完成)：有限群作用和迹的若干问题 (*Int. Math. Res. Not.*，2013)；一般代数叠上平展上同

调的六则运算和基变换定理。

二次型和齐性空间上的整点方面的主要工作有 (徐飞完成，部分与他人合作)：建立了具有二次特征标的 Siegel 权公式；利用带有二次特征的权公式，可计算出真正的主项与圆法主项之间的比值；证明了这个常数可取到 0 与 2 之间无限多个有理数，从而回答了 Borovoi 提出的一个问题 (*Duke Math. J.*，2001)；与 Colliot-Thelene 合作，首次研究齐性空间的整点问题，并证明对于非紧的单连通，半单代数群的齐性空间的整点存在性完全由 Brauer-Manin 障碍确定 (*Compositio Math.*，2009)；另外，和王源华合作建立了特征 2 的二次型的 Spinor genus 理论 (*Memoirs of AMS*, 2008，194)(徐飞于 2010 年调离)。

解析数论方面：王元与他人合作对三个素变量的线性方程进行了研究。设 a_1, a_2, a_3 为整数, 不全同号, 且 $a_1a_2a_3 \neq 0$, $\gcd(a_1, a_2, a_3) = 1$, 又设 b 为整数, 满足 $b \equiv a_1 + a_2 + a_3 \pmod 2$，且对于 $1 \leqslant i < j \leqslant 3$，均有 $\gcd(a_i, a_j, b) = 1$，则方程 $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = b$ 有素数解 p_1, p_2, p_3，满足

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3} |a_j|p_j \leqslant \max\{3|b|, C(\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\})^{144}\},$$

其中 C 是一个可以有效计算的正的常数 (*Asian J. Math.*，2000)。

贾朝华证明了对于任一无理数 $\varphi(0 < \varphi < 1)$，总有无穷多个素数 p 不能表示为 $p = 2n + 2[n\varphi] + 1$，这里 n 为正整数，从而解决了龙以明的一个猜想 (*Acta Arith.*，2006). 贾朝华与他人合作证明了：设 α 为任意给定的无理数，$\|\cdot\|$ 表示到整数的最近距离，则有无穷多个素数 p，使得 $\|\alpha p\| < p^{-\frac{16}{49}+\varepsilon}$ (*Proc. London Math. Soc.*，2002)。

设 n 为正整数，对于 $i = 1$ 或 2，令 $f_i(n)$ 为方程

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}, \quad n_i \text{ 均为正整数}$$

的那些解 (n_1, n_2, n_3) 的个数，在这些解里 n_1, n_2, n_3 恰有 i 个可以被 n

整除。贾朝华证明了上界估计

$$\sum_{p\leqslant x} f_1(p) = O(x(\ln x)^5(\ln\ln x)^2) \quad 和 \quad \sum_{p\leqslant x} f_2(p) = O(x(\ln x)^2 \ln\ln x),$$

其中 p 表示素数 (*Sci. China Math.*, 2012)。

(二) 研究方向简介

数论研究整数和有理数及衍生出来的问题，包括代数数和超越数，素数和丢番图方程 (有理系数多项式方程) 都是其基本的研究对象。因方法和工具的不同，数论又细分为解析数论、代数数论、组合数论、数的几何等分支。数论中的很多问题容易明白，但难以求解，如哥德巴赫猜想，它断言一个大于 4 的偶数是两个素数 (即质数) 的和，虽至今不能证明，但对解析数论的发展起了很大的推动作用。最有名的丢番图方程应是 Fermat 方程 $x^n + y^n = z^n$ ($n \geqslant 3$)，对它的研究导致代数数论这一分支的产生，问题本身则在 20 世纪末被解决 (Fermat 大定理)：如果 x, y, z 是整数且满足 Fermat 方程，则必有 $xyz = 0$。现代数论中，L 函数、椭圆曲线和伽罗华群的表示都是很重要的。

1. 椭圆曲线和同余数问题

椭圆曲线的方程很简单：$y^2 = x^3 + ax + b$，其中系数 a, b 满足条件 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$。对椭圆曲线，有著名的 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想 (BSD 猜想)，它揭示了 L 函数与椭圆曲线的群结构的深刻联系。椭圆曲线还与一个古老的问题 —— 同余数 (或称和谐数) 问题密切相关。

同余数问题：给定一个正整数 n，判定是否存在一个三边长均为有理数的直角三角形以 n 为面积。若存在 (这时称 n 为同余数或和谐数)，找出对应的直角三角形。

同数论中许多其他问题一样，这个问题的叙述非常简洁优美，对它的研究却运用到许多深刻的工具，而对它的研究反过来又为许多深刻理

论的产生和发展提供了很强的动力。

首先，由勾股定理及欧几里得公式可知，任何有理边长的直角三角形的边长都形如

$$s(p^2-q^2),\quad 2spq,\quad s(p^2+q^2)$$

这里 $s>0$ 是一个非零有理数，$p>q$ 是两个互素的正整数。注意到，一个同余数乘以一个正有理数的平方也是一个同余数。如果面积是整数，从而 $pq(p^2-q^2)$ 以及它的无平方因子部分就是同余数。由此不难看出，任意连续三个正整数的乘积是同余数。进而可以找到无穷多个形如 $8n+r$ 的无平方因子的同余数，这里的 r 是 $1,2,3,5,6,7$ 中任意一个取定的数，n 是正整数。这些相对初等的讨论是人们对同余数问题的初步认识。

关于同余数的第一个重要的理论结果是 Fermat 建立的，他在 17 世纪发现了无穷下降法，并用来证明 1 不是同余数。Fermat 的发现，以及之后关于同余数的每一个主要进展都导致了对丢番图方程研究中某些最深刻问题的重大进展。20 世纪 60 年代初提出的 BSD 猜想增进了人们对于同余数问题的兴趣，并最终认识到同余数问题才是这个猜想的最古老也是最实际的例子。特别地，BSD 猜想预言每个模 8 余 5，6 或 7 的整数都应该是同余数。但关于整数的这个断言，其证明似乎仍然超越了当今数论的认知范围。继 Fermat 之后的一个重要进展是德国数学家 Heegner 在他的那篇发表于 1952 年的著名文章中证明了每个模 8 余 5，6，7 的素数或素数的两倍均为同余数。他对相应直角三角形的构造涉及了近代数论中模形式、椭圆曲线等深刻的理论。157 是一个模 8 余 5 的简单素数，但是用 Heegner 的方法我们知道，以 157 为面积的最简单的有理直角三角形其斜边长也相当复杂，为

$$\frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}。$$

现在，我们用当代语言来简述 Heegner 为研究同余数问题所发展的理论。由勾股定理，同余数问题可以叙述如下：给定正整数 n，求方程组

$$a^2+b^2=c^2,\quad \frac{1}{2}ab=n$$

的有理解。若 n 为同余数，经初等运算，上述方程的有理数解 (a,b,c) 给出曲线

$$E^{(n)}:\ y^2=x^3-n^2x$$

上坐标为有理数的点 $(c^2/4,\pm c(a^2-b^2)/8)$，其 y 坐标显然非零。事实上，若曲线 $E^{(n)}$ 上有 y 坐标非零的有理点，则 n 必为同余数。曲线 $E^{(n)}$(射影化后) 是带有有理点的亏格为 1 的光滑曲线。Mordell 推广了 Fermat 的无穷下降法，证明了有理数域上椭圆曲线的有理点集是一个有限生成的 Abel 群。这个优美的结果是现代算术几何的起点。可以证明曲线 $E^{(n)}$ 上 y 坐标非零的有理点恰是这个群中的阶为无限的点，并且，n 是同余数当且仅当对应的这个群的秩大于零。Heegner 的方法则是用了这些椭圆曲线 $E^{(n)}$ 的模函数参数化，这些模函数在一些特殊点处的取值为代数数，而这些代数数的性态已为人们所了解。虽然人们在较早就知道 $E^{(n)}$ 的模函数参数化在 Heegner 的工作中至关重要，但对一般的定义在有理数域上的椭圆曲线，同样的结论 (模性定理) 则是由 Wiles 等在 1994 年才建立起来的。Wiles 用他建立的模性定理推出了 Fermat 大定理的证明，这也是现在被称为 Langlands 纲领的一个重要特例，这项工作是 20 世纪数学的一个辉煌篇章。

继 Heegner 之后的又一个重要进展是 Tunnell 在同余数问题存在性上的工作。对椭圆曲线，可以定义一个类似于 Riemann zeta 函数的复变函数，称为该椭圆曲线的 L 函数。BSD 猜想断言椭圆曲线上的有理点构成的有限生成 Abel 群的秩等于其 L 函数在点 1 处的阶。若假设 BSD 猜想为真，则 n 为同余数当且仅当对应的 L 函数在点 1 处取零值。Tunnell 利用 Shimura 和 Waldspurger 等在模形式及自守表示上建立起来的工具得到：若 n 是一个无平方因子的正奇数，则 $E^{(n)}$ 的 L 函数在点 1 处取零值当且仅当方程

$$2x^2+y^2+8z^2=n$$

的整数解中 z 为奇数的解与为偶数的解个数一样 (在偶数情形也有类似结论)。而 Coates-Wiles 证明了如下在 BSD 猜想上的第一个突破性结果：若 $E^{(n)}$ 的 L 函数在点 1 处的值不为零，则其上有理点群秩为 0。从而 Tunnell 的工作给出了判断同余数的必要条件。

基于 Heegner 的工作，在 BSD 猜想上 Gross-Zagier，Kolyvagin 又发展了更为深刻的理论，分别是关于 Heegner 的构造 (及其推广) 与椭圆曲线的 L 函数导数值的关系以及与整个椭圆曲线有理点群的关系。如今，在模 8 余 5，6，7 的每个剩余类里，对任意给定的正整数 k，田野构造了无穷多个无平方因子的同余数恰有 k 个奇素因子，这一结论的建立涉及了前面提到的诸多理论和工具。

从上述例子可以看到丢番图方程等数论中的基本问题的研究需要现代数论中的深刻工具，而由 Grothedieck 为代表发展的现代代数几何和由 Langlands 为代表发展的自守形式和自守表示及其与伽罗华表示之间的联系成为现代数论最为活跃的部分。

2. 伽罗华表示与 Langlands 纲领

一个域的伽罗华群是由法国数学家伽罗华于 19 世纪引入的，它对一个域的所有有限可分扩张实行了分类。现代数论的核心问题之一就是了解有理数域 $\mathbb{Q}$ 的伽罗华群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的结构。所谓一个伽罗华表示是指 (拓扑) 群 $G_{\mathbb{Q}}$ 在一个 k 上的有限维线性空间 V 上的作用，也就是一个从 $G_{\mathbb{Q}}$ 到 V 的 k 线性自同构群 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个 (连续) 群同态

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(k),$$

这里域 k 通常叫做这个伽罗华表示的系数域，n 是 V 在 k 上的维数。

我们先考虑系数域 k 为复数域 $\mathbb{C}$ 的情形。这时，称 ρ 是 $G_{\mathbb{Q}}$ 的一个复表示。运用简单的拓扑知识即可看出，ρ 的像必定是一个有限群。根据有限群的表示理论，ρ 总可以分解成一些不可约复表示的直和。德国数学家 E. Artin 于 20 世纪初定义了一个复伽罗华表示 ρ 的 L 函

数 $L(\rho,s)$。当 ρ 是一些不可约表示 ρ_i 的直和时，$L(\rho,s)$ 可以相应地写为 $L(\rho_i,s)$ 的乘积。因此，不失一般性，我们总假设 ρ 是 $G_{\mathbb{Q}}$ 的一个不可约复表示。比如，当 ρ 为 $G_{\mathbb{Q}}$ 的平凡表示时，$L(\rho,s)$ 即等于著名的黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$。当 ρ 为 $G_{\mathbb{Q}}$ 的一个某个非平凡复表示 $\rho: G_{\mathbb{Q}}\to\mathbb{C}^{\times}$ 时，由类域论可知，一定存在某个正整数 N 使得 ρ 分解为一个满射 $G_{\mathbb{Q}}\to(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ 和一个 Dirichlet 特征 $\chi\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}$ 的复合。这时，Artin 的 L 函数 $L(\rho,s)$ 即为经典的 Dirichlet 的级数

$$L(\chi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

因此，Artin 的 L 函数 $L(\rho,s)$ 可以视为是黎曼 $\zeta(s)$ 函数以及 Dirichlet L 函数的推广。Artin 证明了对于任意一个不可约复表示 ρ，$L(\rho,s)$ 总可以延拓为复平面上关于 s 的一个亚纯函数，并且满足一个类似于黎曼 $\zeta(s)$ 函数关于 $s=1/2$ 对称的函数方程。Artin 进一步猜想，如果不可约复表示 ρ 是非平凡的，那么 $L(\rho,s)$ 一定是一个定义在整个 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数，即亚纯函数 $L(\rho,s)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有极点。这便是著名的 Artin 全纯猜想，被认为是数论中最深刻最困难的几个猜想之一。它在 ρ 为一维表示的情形是 Dirichlet 的一个经典结果。对于高维的情况，目前所知道的证明这个猜想的唯一方法是，先证明一个 n 维复表示 ρ 的 L 函数“恰好”和 GL_n 上的某个自守表示的 L 函数相等，然后由自守表示的 L 函数的解析性质推出关于 ρ 的 Artin 的全纯猜想。当 ρ 的像是一个可解群时，Langlands 和 Tunnell 在 20 世纪 80 年代按照这一方法证明了 Artin 全纯猜想，他们的结果在 Wiles 对 Fermat 大定理的证明中发挥了极其重要的作用。但是即使当 $n=2$ 时，仍然有很多 Langlands-Tunnell 的结果并不能解决的情形。对于二维不可约奇复表示，Artin 全纯猜想最终在 2009 年被 Khare，Kisin 和 Wintenberger 等解决，他们的这一成果用到并且大大推广了 Wiles 在证明 Fermat 大定理时的许多重要思想和方法。对于二维不可约的偶复表示以及更高维的情况，Artin 猜想仍然远远

没有解决。

现在取 k 为 p-adic 数域 $\mathbb{Q}_p$，这时称 ρ 为一个 p-adic 伽罗华表示。譬如，若 E 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线，则 $G_{\mathbb{Q}}$ 在 E 所有 p^n 挠点

$$E[p^\infty] = \bigcup_n E[p^n]$$

上的作用定义了一个 $G_{\mathbb{Q}}$ 的二维伽罗华表示。更一般地，如果 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一个代数簇，则 $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ 的“n 次平展上同调群”给出了一个 $G_{\mathbb{Q}}$ 的一个 p-adic 伽罗华表示，这也是构造 p-adic 伽罗华表示最重要的方法之一。与 $G_{\mathbb{Q}}$ 的复表示不同，$G_{\mathbb{Q}}$ 的 p-adic 伽罗华表示的像几乎都是无穷的。法国数学家 Fontaine 于 20 世纪 80 年代发展了 p-adic 霍奇 (Hodge) 理论，并和美国数学 Mazur 共同引入了“几何 p-adic 伽罗华表示”的概念。比如上面的两个例子均是几何 p-adic 表示的例子。Fontaine 和 Mazur 进一步猜想，所有几何 p-adic 伽罗华表示都同构于某个 $\mathbb{Q}$ 上的代数簇 X 的平展上同调的直和项。几何 p-adic 伽罗华表示以及如上所述的 Fontaine-Mazur 猜想，与 20 世纪 70~80 年代逐渐兴起的所谓 Langlands 纲领有着极其密切的关系，是现代数论的核心课题之一。

对于每一个几何的 p-adic 表示 ρ，正如复伽罗华表示的情形一样，可以定义它的 L 函数 $L(\rho, s)$。但是对于这样的 L 函数 $L(\rho, s)$，类比于 Artin 猜想，我们同样猜想它们应具有良好的解析性质，譬如能够解析延拓成复平面上的一个全纯或是亚纯函数，并且满足相应的函数方程。但是这个猜想也仅仅在某些非常特殊的情形下得到了解决，例如当 ρ 是由一条 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线的挠点所定义时，我们已经知道 $L(\rho, s)$ 的确是定义在复平面 $s \in \mathbb{C}$ 上的全纯函数，并且满足一个关于直线 $s = 1$ 对称的函数方程。这个深刻的定理是著名的 Taniyama-Shimura 猜想的一个推论，由 Wiles，Taylor，Diamond，Conrad，Breuil 等于 2001 年完全证明。

从 Langlands 纲领的角度看，以上的 Fontaine-Mazur 猜想和以及 p-