全国高职高专“十二五”规划教材

应用高等数学教程

专业拓展篇

知识点丰富 | 采用模块化设计 | 新增数学建模内容

主　编　杨　勇　徐健清

副主编　郑雪娇　张祖科　任超　吕兴汉

主　审　黄贻培

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

全国高职高专“十二五”规划教材

应用高等数学教程

（专业拓展篇）

主　编　杨　勇　徐健清

副主编　郑雪娇　张祖科　任　超　吕兴汉

主　审　黄贻培

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

《应用高等数学教程》（专业拓展篇）是认真分析、总结、吸收部分高职院校高等数学课程教学改革经验，根据教育部高等教育教学课程的基本要求，以课程改革精神及人才培养目标为依据，适度降低知识难度，遵循循序渐进、融会贯通的教学原则基础上编写完成的。

《应用高等数学教程》（专业拓展篇）主要内容有：常微分方程、无穷级数、离散数学初步、线性代数初步、概率论初步、拉普拉斯变换、数学建模。

本书特色主要体现在：①保留并丰富了各章节知识点，采用模块化设计；②增加了数学建模内容；③提高学生对数学源流的认识，每章后附有数学家简介；④每章开头给出本章学习目标，有利于学生明确学习目标及重点；⑤每章后给出本章重点知识的小结，有利于学生对本章的学习进行系统的复习；⑥标注*符号的内容为选修内容。

图书在版编目（ＣＩＰ）数据

应用高等数学教程. 专业拓展篇 / 杨勇，徐健清主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2013.7
全国高职高专“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-1016-6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①杨… ②徐… Ⅲ. ①高等学校－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第146144号

策划编辑：寇文杰　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李　佳

书　　名	全国高职高专“十二五”规划教材 **应用高等数学教程（专业拓展篇）**
作　　者	主　编　杨　勇　徐健清 副主编　郑雪娇　张祖科　任　超　吕兴汉 主　审　黄贻培
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	三河市铭浩彩色印装有限公司
规　　格	184mm×240mm　16 开本　19 印张　419 千字
版　　次	2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
定　　价	33.00 元

前　言

为充分发挥高等数学在21世纪培养应用型人才的作用，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，根据教育部高职学院数学课程的基本要求与课程改革精神编写了本教材。教材编写组在分析、总结、吸收高职高专院校高等数学教学改革经验的基础上，遵循“必需，适度”的原则进行编写。在编写过程中，根据专业课所需数学知识进行内容调整，使之能与专业课有效地衔接。

本书是《应用高等数学教程》（公共基础篇）的基础上的知识拓展篇，主要针对各专业的情况选择所需要的内容进行编写。具体编写分工如下：全书由杨勇主持编写和定稿；黄贻培副教授负责全书的审稿；杨勇、徐健清等负责编写及统稿工作，并邀请了专业课老师郑雪娇和贾俊霞参加了编写工作。杨勇编写第10章，徐健清编写第8章，张祖科编写第11章，郑雪娇和贾俊霞编写第13章，刘召明和吕兴汉编写第7章，陈华峰和任超编写第9章，夏久林和吴白旺编写第12章。

在编写过程中，我们得到了兄弟院校相关专业教研室老师的大力支持，在此表示衷心感谢！由于编者水平有限及时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请专家及广大读者批评指正。

编　者

2013年5月

目　　录

前言
第 7 章　常微分方程……1
本章学习目标……1
§7.1　基本概念……1
习题 7.1……2
§7.2　一阶微分方程的解法……3
一、可分离变量方程……3
二、可化为变量分离方程的特殊类型……4
三、一阶线性微分方程……4
习题 7.2……8
§7.3　二阶常系数微分方程的解法……10
一、二阶线性微分方程解的结构……10
二、二阶常系数齐次线性微分方程……11
三、二阶常系数非齐次线性微分方程……13
习题 7.3……16
§7.4　微分方程的应用……18
一、几何问题……18
二、冷却问题……20
三、力学问题……21
本章小结……25
数学家简介——伯努利……27
第 8 章　无穷级数……28
本章学习目标……28
§8.1　常数项级数……28
一、无穷级数的概念……28
二、无穷级数的基本性质……31
三、数项级数的判别法……32
习题 8.1……37
§8.2　幂级数……39
一、幂级数的概念……39
二、幂级数和幂级数的收敛区间……39
三、幂级数的性质……42
习题 8.2……45
§8.3　函数展成幂级数……46
一、泰勒公式和泰勒级数……46
二、某些初等函数的幂级数展开式……47
习题 8.3……52
*§8.4　傅立叶级数……53
一、三角函数系和三角级数……53
二、傅立叶级数……53
三、正弦级数和余弦级数……56
习题 8.4……60
本章小结……61
数学家简介——傅立叶……65
第 9 章　离散数学初步……66
本章学习目标……66
§9.1　命题与联结词……66
一、命题的概念……66
二、复合命题与联结词……67
习题 9.1……70
§9.2　命题公式与赋值……71
一、合式公式的定义……71
二、公式的赋值……72
三、真值表……72
习题 9.2……74
§9.3　等值式与等值演算……75
一、等值式的概念……75
二、用真值表判断公式的等值……75
三、等值演算……75

习题 9.3 ······ 78
§9.4 范式 ······ 78
一、简单合取式和简单析取式 ······ 78
二、析取范式 ······ 79
三、主范式 ······ 79
习题 9.4 ······ 82
§9.5 代数结构初步 ······ 83
一、代数系统的概念 ······ 83
二、代数系统的运算及其性质 ······ 84
三、半群、含幺半群与群 ······ 88
习题 9.5 ······ 91
§9.6 图论初步 ······ 92
一、图的基本概念 ······ 92
二、顶点的度数与握手定理 ······ 94
三、图的同构、完全图与补图 ······ 95
四、通路与回路 ······ 98
五、图的矩阵表示 ······ 100
六、欧拉图、哈密尔顿图与树 ······ 104
习题 9.6 ······ 110
本章小结 ······ 112
数学家简介——艾伦·麦席森·图灵 ······ 112
第 10 章 线性代数初步 ······ 114
本章学习目标 ······ 114
§10.1 行列式 ······ 114
一、行列式的定义 ······ 115
二、行列式的性质 ······ 116
三、行列式的计算 ······ 118
四、克拉默法则 ······ 121
习题 10.1 ······ 122
§10.2 矩阵的概念及矩阵的运算 ······ 124
一、矩阵的概念 ······ 124
二、矩阵的运算 ······ 126
三、矩阵的初等变换 ······ 128
四、矩阵的秩 ······ 129
五、逆矩阵 ······ 130
习题 10.2 ······ 132
§10.3 线性方程组 ······ 133
一、线性方程组的基本概念和定理 ······ 133
二、齐次线性方程组解的结构 ······ 134
三、非齐次线性方程组的解的结构 ······ 136
习题 10.3 ······ 137
本章小结 ······ 138
数学家简介——韦达 ······ 140
第 11 章 概率论初步 ······ 142
本章学习目标 ······ 142
§11.1 随机事件和概率 ······ 142
一、随机事件 ······ 142
二、事件的关系和运算 ······ 143
三、事件的概率 ······ 145
习题 11.1 ······ 148
§11.2 概率的基本定理 ······ 149
一、加法定理 ······ 149
二、乘法定理 ······ 151
三、全概率公式和贝叶斯公式 ······ 153
习题 11.2 ······ 154
§11.3 随机变量 ······ 156
一、定义及概率分布 ······ 156
二、数学期望和方差 ······ 160
习题 11.3 ······ 166
本章小结 ······ 168
数学家简介——贝叶斯 ······ 169
第 12 章 拉普拉斯变换 ······ 170
本章学习目标 ······ 170
§12.1 拉普拉斯变换的基本概念 ······ 170
习题 12.1 ······ 174
§12.2 拉氏变换的性质 ······ 174
习题 12.2 ······ 177
§12.3 拉氏逆变换的性质 ······ 177
习题 12.3 ······ 179
§12.4 拉氏变换应用举例 ······ 179

习题 12.4 …… 181
本章小结 …… 181
数学家简介——拉普拉斯 …… 182
第 13 章　数学建模 …… 184
全国大学生数学建模竞赛章程
（2008 年修订） …… 185
§13.1　Matlab 7.0 简介 …… 187
一、Matlab 7.0 的启动与工作界面 …… 187
二、Matlab 7.0 的帮助系统 …… 187
三、基本赋值和运算 …… 190
四、符号表达式的定义 …… 191
§13.2　用 Matlab 求解高等数学问题 …… 193
一、用 Matlab 求极限 …… 193
二、用 Matlab 求导数 …… 194
三、用 Matlab 求积分 …… 196
四、用 Matlab 求级数的和 …… 197
五、用 Matlab 求函数的展开式 …… 198
六、符号方程求解 …… 199
七、微分方程求解 …… 201
§13.3　简单的优化模型 …… 201
一、存贮模型 …… 201
二、生猪的出售时机 …… 205
三、森林救火 …… 207
四、最优价格 …… 209
五、血管分支 …… 210
六、消费者均衡 …… 212
七、冰山运输 …… 214
§13.4　数学规划模型 …… 218
一、奶制品的生产与销售 …… 218
二、自来水输送与货机装运 …… 225
三、汽车生产与原油采购 …… 230
四、接力队选拔和选课策略 …… 236
五、饮料厂的生产与检修 …… 242
六、钢管和易拉罐下料 …… 246
§13.5　稳定性模型 …… 253
一、捕鱼业的持续收获 …… 253
二、军备竞赛 …… 255
三、种群的相互竞争 …… 257
四、种群的相互依存 …… 260
五、种群的弱肉强食（食饵—
捕食者模型） …… 262
附录 1　参考答案 …… 268
附录 2　基本求导法则与公式 …… 285
附录 3　常用积分公式 …… 286

第 7 章　常微分方程

高等数学研究的对象是函数，而函数关系一般是不能直接由实际问题得到的. 但根据实际问题的特性，有时可以得到表示未知函数及其导数或微分与自变量之间关系的式子，这种关系式揭示了实际问题的客观规律性，它是描述这种客观规律性的一种重要数学模型——微分方程.

本章学习目标

- 了解微分方程的定义（阶、解、通解、初始条件、特解）.
- 掌握可分离变量微分方程、齐次微分方程的解法.
- 熟练掌握一阶线性微分方程的解法.
- 了解二阶线性微分方程的解的结构.
- 掌握二阶线性常系数齐次、非齐次微分方程的解法.

§7.1　基本概念

利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题时，一般先要建立数学模型，再对数学模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论. 数学模型最常见的表达方式是包含自变量和未知函数的方程，在很多情况下未知函数的导数（或微分）也会在方程中出现，我们称这类方程为微分方程.

定义 7.1.1　含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程. 只含一个自变量的微分方程称为常微分方程，自变量多于一个的称为偏微分方程. 微分方程中导数的最高阶数称为微分方程的阶.

于是 n 阶常微分方程的一般形式是

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0 \tag{7.1.1}$$

本章只介绍常微分方程，并简称为微分方程或方程.

定义 7.1.2　如果方程中未知函数 y 和它的各阶导数 y', ..., $y^{(n)}$ 都是一次幂的，则称它为线性微分方程，否则称它为非线性微分方程.

n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）和 $f(x)$ 都是 x 的已知函数.

例 7.1.1　下面的方程都是常微分方程.

$$(y')^2 = 3x^2 + 2 \tag{7.1.2}$$

$$y' = 1 + y^2 \tag{7.1.3}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \text{（} \omega > 0 \text{ 是常数）} \tag{7.1.4}$$

它们的阶数分别为 1、1、2．方程（7.1.4）是线性的，而方程（7.1.2）和（7.1.3）是非线性的．

定义 7.1.3 代入微分方程能使方程成立的函数，称为方程的解．

例 7.1.2 函数 $y = \tan x$ 是方程（7.1.3）在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的一个解，而 $y = \tan(x - c)$ 是方程（7.1.3）在区间 $(c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$ 上的解，其中 c 为任意常数；函数 $y = 3\cos\omega x$、$y = 4\sin\omega x$ 都是方程(7.1.4)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解，而且对任意常数 c_1 和 c_2，$y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 也是方程(7.1.4)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解．

从上面的讨论可知，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数（与方程的阶数有关），而有的解不含任意常数．为了加以区别，我们给出如下定义：

定义 7.1.4 方程（7.1.1）中含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为它的通解．不含任意常数的解称为它的特解．使这些任意常数取定值的条件，称为微分方程的初始条件，我们把求满足初始条件的微分方程特解的问题称为解的初值问题．

例 7.1.3 验证函数 $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 是方程 $y'' + \omega^2 y = 0$（$\omega > 0$ 是常数）(7.1.4) 的解，其中 c_1、c_2 为任意常数．

解 $y' = -c_1\omega\sin\omega x + c_2\omega\cos\omega x$，$y'' = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x$，

将 y、y'' 的表达式代入方程（7.1.4）有

$$y'' + \omega^2 y = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x + \omega^2(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) \equiv 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

所以对任意常数 c_1、c_2，$y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 都是方程（7.1.4）的解．

类似验证 $y = A\sin(\omega x + B)$（A、B 为任意常数）也是方程（7.1.4）的解．而 $y = 3\cos\omega x$ 和 $y = 4\sin\omega x$ 是方程（7.1.4）的两个特解．

例 7.1.4 解微分方程 $y'' = x$，其中 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 0$．

解 对方程两边积分，得 $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$，再积分，得 $y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

由 $y'|_{x=0} = 0$ 得 $c_1 = 0$，由 $y|_{x=0} = 1$ 得 $c_2 = 1$，因此，所求方程的特解为：$y = \frac{1}{6}x^3 + 1$．

习题 7.1

一、选择题

1．方程 $(y')^3 + 2(y')^2 y + 2y' = 0$ 的阶数是（　　）．

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2．方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是（　）．

A. 3　　B. 4　　C. 2　　D. 5

二、解答题

1．指出方程 $y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$ 的阶数．

2．验证 $y=3x$ 是否是方程 $y'=3$ 的解．

§ 7.2　一阶微分方程的解法

本节讲述一阶微分方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题．微分方程的求解方法很多，我们这里仅就一阶微分方程介绍一些初等的解法．

一、可分离变量方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{7.2.1}$$

的方程称为可分离变量方程，其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都是连续函数．

当 $g(y)\neq 0$ 时，把（7.2.1）改写为 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$（称为变量分离），

两边积分，得通解（隐式通解）

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c \tag{7.2.2}$$

这里我们把积分常数 c 明确写出来，而把 $\int\frac{dy}{g(y)}$、$\int f(x)dx$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的一个确定的原函数．

例 7.2.1　求方程

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0 \tag{7.2.3}$$

的通解．

解　分离变量 $\frac{dy}{y}=2xdx$，两边积分得 $\ln|y|=x^2+\tilde{c}$

即 $|y|=\tilde{c}e^{x^2}$．令 $c=\pm\tilde{c}$，则 $y=ce^{x^2}$（$c\neq 0$）．

此外 $y=0$ 是方程的常数解．若允许 $c=0$，则此解也含于上式中．所以方程（7.2.3）的通解为 $y=ce^{x^2}$，其中 c 为任意常数．

例 7.2.2 求初值问题 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=0$， $y(0)=1$ 的解.

解 求通解，方程可以变形为 $y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$

分离变量得 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

两边积分得通解为 $\dfrac{y^2}{2}=-x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+c$

代入初始条件，即 $x=0$， $y=1$，得 $c=-\dfrac{1}{2}$

所以解为 $y^2=2\mathrm{e}^{x}(1-x)-1$.

二、可化为变量分离方程的特殊类型

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.4}$$

的方程称为齐次方程，其中 φ 是连续函数.

其解法是通过变量代换，可将（7.2.4）化为变量分离方程，然后按变量分离方程求解.

令 $\dfrac{y}{x}=u$ 或 $y=ux$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(ux)'=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入（7.2.4）得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}$$

这是一个变量可分离方程.

例 7.2.3 解方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

解 令 $\dfrac{y}{x}=u$ 或 $y=xu$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$. 代入方程得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\sqrt{1+u^2}$，即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$$

分离变量并积分，有 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})+\ln c_1=\ln|x|$（$c_1>0$）从而推出

$$x=c(u+\sqrt{1+u^2})\ (c=\pm c_1\neq 0)$$

将 $\dfrac{y}{x}=u$ 代回原变量得 $y=\dfrac{x^2}{2c}-\dfrac{c}{2}$，其中 $c\neq 0$ 为任意常数.

三、一阶线性微分方程

在一阶方程中，如果未知函数及其导数都是一次的，那么这类方程叫做一阶线性方程. 一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.2.5}$$

其中 P 、 Q 为连续函数．当 $Q(x)\equiv 0$ 时，（7.2.5）成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7.2.6}$$

称它为一阶线性齐次微分方程．

相应地，当 $Q(x)\neq 0$ 时，（7.2.5）称为一阶线性非齐次微分方程．

对于方程（7.2.6），它是可分离变量的微分方程，可以求出方程（7.2.6）的通解

$$y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.7}$$

其中 c 为任意常数，注意 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 仅表示 $P(x)$ 的一个原函数．

例 7.2.4　求 $\mathrm{d}y=-y\cos x\mathrm{d}x$ 的通解．

解　分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\cos x\mathrm{d}x$ ，两边积分，有

$$\ln y=-\sin x+\ln C$$

即 $y=C\mathrm{e}^{-\sin x}$ ．

例 7.2.5　求 $y'+\frac{1}{1+x}y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解．

解　分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$，两边积分，有

$$\ln y=-\ln(1+x)+\ln C$$

故通解为 $y=\frac{C}{1+x}$ ．

将 $x=1,\ y=1$ 代入得 $C=2$ ，其特解为 $y=\frac{2}{1+x}$ ．

下面我们来求非齐次方程（7.2.5）的通解．现在对方程（7.2.7）作变换

$$y=c(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.8}$$

代入（7.2.5）化简得 $c'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ ，由此两边积分，有

$$c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c$$

将它代回到（7.2.8）即得方程（7.2.5）的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right) \tag{7.2.9}$$

上述求解方法通常称为常数变易法（把（7.2.7）中 c 变易为 x 的函数 $c(x)$ ），公式（7.2.9）也称为方程（7.2.5）的常数变易公式．它是一种重要的数学方法．通常只要知道了线性齐次方程的通解，便可用常数变易法将对应的线性非齐次方程的通解求出来．

例 7.2.6 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解.

解 先求出对应的齐次微分方程$\dfrac{dy}{dx}+y=0$的通解.

分离变量得$\dfrac{dy}{y}=-dx$，两边积分再化简得

$$\ln y=-x+C$$

即

$$y=Ce^{-x}$$

设所给的一阶线性非齐次方程的通解为$y=C(x)e^{-x}$，则

$$y'=C'(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}(-1)$$

代入原方程得

$$C'(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}(-1)+C(x)e^{-x}=e^{-x}$$

整理得 $C'(x)=1$

于是 $C(x)=x+C$

所以原方程的通解为$y=e^{-x}(x+C)$.

结合上述讨论，求一阶线性非齐次微分方程通解的步骤为：

（1）先求出对应的齐次微分方程$y'+P(x)y=0$的通解Cy_1.

（2）把C看成x的函数，代入（1）式，确定$C(x)$，即得方程（1）的通解，这种方法叫做常数变易法.

例 7.2.7 求微分方程$xy'+y=\cos x$满足初始条件$y(\pi)=1$的特解.

解 使用常数变易法，原方程可写成

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cos x$$

对应的线性齐次方程为

$$y'+\frac{1}{x}y=0$$

求得该线性齐次方程的通解为

$$y=\frac{C}{x}$$

设所给的线性非齐次方程的通解为$y=C(x)\dfrac{1}{x}$，则

$$y'=C'(x)\frac{1}{x}-C(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

代入原方程整理得$C'(x)\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cos x$，即$C'(x)=\cos x$，于是

$$C(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$

故原方程的通解为

$$y=(\sin x+C)\frac{1}{x}=\frac{C}{x}+\frac{\sin x}{x}$$

将 $x=\pi$，$y=1$ 代入得 $C=\pi$，故所求的特解为

$$y=\frac{1}{x}(\pi+\sin x)$$

在上例通解中，$y=\dfrac{C}{x}$ 是对应齐次线性方程的通解，$y^*=\dfrac{\sin x}{x}$ 是非齐次线性方程的特解. 一般地，利用常数变易法求解 $y'+P(x)y=Q(x)$ 可得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是对应的方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解，$y^*=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一个特解，即一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的特解之和.

例 7.2.8　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

解　$P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}x\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C)\end{aligned}$$

例 7.2.9　设函数 $f(x)$ 一阶可导，且满足 $f(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$.

解　对等式 $f(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2$ 两端同时求导，得 $f'(x)=xf(x)+2x$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=2x$$

它是一阶线性非齐次微分方程，它所对应的齐次微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$$

分离变量得 $\frac{dy}{y}=xdx$，两边积分化简得 $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$，令 $y=C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则

$$y'=C'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+C(x)e^{\frac{x^2}{2}}x$$

代入原方程 $C'(x)=2xe^{-\frac{x^2}{2}}$，从而 $C(x)=-2e^{-\frac{x^2}{2}}$，故方程的通解为

$$f(x)=-2+Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

又因为 $f(0)=0$，代入通解得 $C=2$，所以 $f(x)=-2+2e^{\frac{x^2}{2}}$.

例 7.2.10 解方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$.

解 它是一阶线性非齐次微分方程，且 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^2$

代入公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^2e^{\int\frac{-2}{x+1}dx}dx+c\right]\\&=e^{2\ln(x+1)}\left[\int(x+1)^2e^{-2\ln(x+1)}dx+c\right]\\&=(x+1)^2(\int dx+c)=(x+1)^2(x+c)\end{aligned}$$

习题 7.2

一、选择题

1．下列函数中，（　　）是微分方程 $dy-2xdx=0$ 的解.

A．$y=2x$　　B．$y=x^2$

C．$y=-2x$　　D．$y=-x^2$

2．微分方程 $2ydy-dx=0$ 的通解是（　　）.

A．$y^2-x=c$　　B．$y-\sqrt{x}=c$

C．$y=x+c$　　D．$y=-x+c$

3．微分方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解是（　　）.

A．$y=e^x+1$　　B．$y=2e^x$

C．$y=2e^{2x}$　　D．$y=e^{2x}$

4．下列微分方程中为可分离变量方程的是（　　）.

A. $\dfrac{dx}{dt}=xt+t$　　B. $x\dfrac{dx}{dt}=e^{xt}\sin t$

C. $\dfrac{dx}{dt}=xt+t^2$　　D. $\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$

5. 微分方程 $\dfrac{dx}{y}+\dfrac{dy}{x}=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解是（　　）.

A. $x^2+y^2=25$　　B. $3x+4y=c$

C. $x^2+y^2=c$　　D. $x^2+y^2=7$

6. 下面微分方程中为一阶线性的是（　　）.

A. $xy'+y^2=x$　　B. $y'+xy=\sin x$

C. $yy'=x$　　D. $(y')^2+xy=0$

7. 微分方程 $y^2dx-(1-x)dy=0$ 是（　　）微分方程.

A. 一阶线性齐次　　B. 一阶线性非齐次

C. 可分离变量　　D. 二阶线性齐次

二、填空题

1. 通过点 $(1,1)$ 处，且斜率处处为 x 的曲线方程是________.
2. 微分方程 $y'-2y=0$ 的通解是________.
3. $y=x^2$ 所满足的一阶微分方程是________.
4. 齐次方程 $y'=\dfrac{y}{x}+1$ 的通解为________.
5. 方程 $xy'+y=3$ 的通解是________.

三、计算下列微分方程的通解（可分离变量部分）

1. $xy'-y\ln x=0$　　2. $\sin x dy+\cos y dx=0$

3. $y(x^2-1)dy-(y^2+1)dx=0$　　4. $y\ln y+xy'=0$

四、求下列微分方程的解（齐次型方程部分）

1. 求下列齐次微分方程的通解：

（1）$xy'=y(\ln y-\ln x)$

（2）$x\dfrac{dy}{dx}-y=2\sqrt{xy}$

2. 求下列齐次微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$，$y|_{x=1}=1$

（2） $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$， $y\big|_{x=1}=2$

3．化方程为可分离变量的微分方程，并求出其通解：

$(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$　　　　提示：令 $x+y=u$

五、求下列微分方程的解（一阶线性微分方程部分）

1．求下列微分方程的特解：

（1） $xy'+2y=x$， $y\big|_{x=1}=0$　　　（2） $xy'+y-\mathrm{e}^x=0$， $y\big|_{x=1}=\mathrm{e}$

（3） $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x=\mathrm{e}^{3t}$， $x\big|_{t=0}=0$

2．求下列微分方程的通解：

（1） $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$　　　（2） $y'-\frac{1}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)$

（3） $y'=-2xy+x\mathrm{e}^{-x^2}$

3．求曲线的方程，这条曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线的斜率等于 $2x+y$．

§7.3　二阶常系数微分方程的解法

定义 7.3.1　形如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{7.3.1}$$

的方程称为二阶线性非齐次微分方程．如果 $f(x)=0$，即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{7.3.2}$$

方程（7.3.2）称为二阶线性齐次微分方程．

力学中，物体在有阻力的情况下的自由振动微分方程和强迫振动微分方程，以及电学中串联电路的振动方程都是二阶线性微分方程．

一、二阶线性微分方程解的结构

定理 7.3.1（齐次线性方程解的结构）　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（7.3.2）的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{7.3.3}$$

也是方程（7.3.2）的解，其中 C_1、C_2 是任意常数．如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之比不为常数（即 $\frac{y_1}{y_2}\neq k$，k 为常数），则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\text{（}C_1\text{、}C_2\text{ 是任意常数）}$$

是方程（7.3.2）的通解．