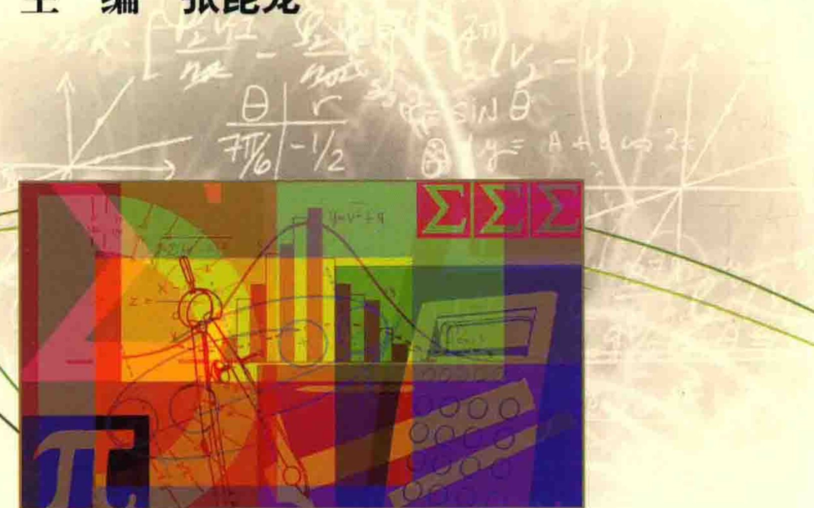
高等院校规划教材

大学数学解题技巧

DAXUE SHUXUE JIETI JIQIAO

主　编　张昆龙



煤炭工业出版社

高等院校规划教材

大学数学解题技巧

主　编　张昆龙
副主编　张海峰　刘海生　杨　戍　宋丽霞

煤炭工业出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

大学数学解题技巧/张昆龙主编．--北京:煤炭工业出版社,2013

高等院校规划教材

ISBN 978-7-5020-4392-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第299942号

煤炭工业出版社 出版

(北京市朝阳区芍药居35号 100029)

网址:www.cciph.com.cn

北京市郑庄宏伟印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787mm×1092mm 1/16 印张8 1/2

字数195千字 印数1—2 500

2013年12月第1版 2013年12月第1次印刷

社内编号7224 定价27.00元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换

内 容 提 要

为使读者学好大学数学、提高解题技巧和熟练程度，本书收录的题目比较典型，也有一定难度，总共归结为22个知识板块，每一板块分为知识要点、解题方法与技巧两部分．本书内容覆盖了理工科大学的高等数学、线性代数、概率论与数理统计3门数学课程的基本知识点和国家研究生数学入学考试的基本要求．

本书可作为理工科大学生学习大学数学的参考书，也可作为硕士研究生数学入学考试及高等数学竞赛的复习参考书．

前　　言

大学数学包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计．它们是高等理工科院校最主要的基础理论课，同时也是硕士研究生入学考试的必考科目，掌握好大学数学的基本知识、基本理论、基本运算和分析方法，是学生学习后续课程，从事理论研究或实际工作的必要基础，对学生理性思维的训练以及对他们今后的提高和发展都有着深远的影响．

学好大学数学离不开解题，通过解题加深对所学课程内容的理解，灵活地掌握运算方法，提高自己的解题技巧，培养解决问题的能力．因此如何帮助学生提高解题能力是当前大学数学课程教学改革的一项重要任务．为了帮助正在学习大学数学的学生和有志报考硕士研究生的考生，我们编写了这本《大学数学解题技巧》．本书依据理工科高等数学课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写，它可以帮助学生更深刻地理解大学数学的基本概念和基本理论，准确地抓住解题关键，清晰地辨明解题思路，不断提高学生分析问题和解决问题的能力．

本书由张昆龙任主编，张海峰、刘海生、杨戍和宋丽霞任副主编．线性代数和概率论与数理统计部分由张昆龙、宋丽霞编写，高等数学部分由刘海生、杨戍编写，张海峰审阅全稿，并通演全部习题．在编写过程中还得到了许多同行教师的支持和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢．

由于编写的时间仓促，书中难免有疏漏不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2013 年 8 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　次

第一章 高 等 数 学

第一节 函 数 与 极 限

一、知识要点

函数、函数基本性质	有界性	有界性定义:若有正数 M 存在,使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $\|f(x)\| \leqslant M$. 判断法:一般来说先将函数取绝对值,然后应用不等式放缩法求解;或借助于导数利用最值方法处理
	单调性	严格单调增加:$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;严格单调减少:$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. 若函数可导,可利用导数的符号判断函数的单调性;若函数不可导,则只能利用单调性的定义进行判断
	奇偶性	$f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上若 $f(-x)=f(x)$,$[f(-x)=-f(x)]$,则 $f(x)$ 为偶(奇)函数;偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的. 性质: (1)奇函数的代数和仍为奇函数,偶函数的代数和仍为偶函数. (2)偶数个奇(偶)函数之积为偶函数,奇数个奇函数之积为奇函数. (3)奇偶函数之积为奇函数. (4)若 $f(x)+f(-x)=0$,则 $f(x)$ 为奇函数
	周期性	对于函数 $y=f(x)$,若 $\exists T\neq 0$,对 $\forall x$ 均有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数. T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期. 性质: (1)若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $T/\|a\|$. (2)若 $f(x)$,$g(x)$ 均以 T 为周期,则 $f(x)\pm g(x)$ 也以 T 为周期. (3)若 $f(x)$,$g(x)$ 周期分别为 T_1、T_2,则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期为 T_1、T_2 的最小公倍数
	反函数	原函数和其反函数图像关于直线 $y=f(x)$ 对称
	初等函数	由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合得到,且可用一个解析式表示的函数,称为初等函数
极限	无穷小量	极限为零的量,简称为无穷小量. 性质:有限个无穷小的和、差、积还是无穷小;常数与无穷小的乘积是无穷小;有限个无穷小的乘积还是无穷小;等价无穷小可以代换

(续)

极限	两个准则	准则 1　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足下列条件: (1)$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $\forall n$. (2)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,那么数列$\{y_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. 准则 2　单调有界数列必有极限
	两个重要极限	第一个重要极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;第二个重要极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$
	洛必达法则	应用于$\dfrac{0}{0}$型,$\dfrac{\infty}{\infty}$型,$0\cdot\infty$型,$\infty-\infty$型,1^∞型,0^0型,∞^0型等未定式计算

二、解题方法与技巧

1. 函数的基本性质相关问题

注重把握概念;灵活应用性质解决问题.

【例 1】求 $I=\int_{-1}^{1} x[x^5+(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\mathrm{d}x$.

解　因$f_1(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-f_1(x)$,故$f_1(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$是奇函数,因$f_2(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln 1-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f_2(x)$,故$f_2(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数,因此$x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数. 于是$I=\int_{-1}^{1}x^6\mathrm{d}x+0=2\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\dfrac{2}{7}$.

【例 2】设 $F'(x)=f(x)$,则下列结论正确的是(　　).

(A)若$f(x)$为奇函数,则 $F(x)$为偶函数

(B)若$f(x)$为偶函数,则 $F(x)$为奇函数

(C)若$f(x)$为周期函数,则 $F(x)$为周期函数

(D)若$f(x)$为单调函数,则 $F(x)$为单调函数

解　(B)不成立,反例$f(x)=x^2$,$F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1$;(C)不成立,反例$f(x)=\cos x+1$,$F(x)=\sin x+x$;(D)不成立,反例$f(x)=2x$,$F(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内;只有(A)成立.

证　$F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$f$ 为奇函数,$F(-x)=F(0)+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=F(0)+\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=F(0)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$,所以,$F(x)$为偶函数.

【例 3】设$f(x)$,$g(x)$是恒大于零的可导函数,且$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当$a<x<b$时,下列结论成立的是(　　).

(A)$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B)$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C)$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D)$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

解　因$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{1}{g^2(x)}[f'(x)g(x)-f(x)g'(x)]<0$,故$\dfrac{f(x)}{g(x)}$单调减少,于是$x<b$,则

有$\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$,故(A)成立.

2. 反函数与复合函数相关问题

反函数、复合函数是高等数学的重点,也是难点.反函数问题主要是考察图像特征;复合函数题目主要有以下两个方面:1. 已知$f(x)$,$g(x)$求$f[g(x)]$;2. 已知$f[g(x)]$和$g(x)$,求$f(x)$.

【例4】已知$f'(e^x)=xe^{-x}$,且$f(1)=0$,求$f(x)$.

解 令$e^x=t$,则$x=\ln t$,因此$f'(e^x)=f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$,于是,$f(x)-f(1)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{t}dt=\dfrac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$.

3. 初等函数与分段函数相关问题

分段函数就是指在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同公式来表示的函数.

一般来说,分段函数不是初等函数.几个常用的分段函数:绝对值函数、符号函数、取整函数.

【例5】已知$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & x\leqslant a\\ f_2(x) & x>a\end{cases}$和$g(x)=\begin{cases}g_1(x) & x\leqslant b\\ g_2(x) & x>b\end{cases}$,求$f[g(x)]$.

解
$$f[g(x)]=\begin{cases}f_1[g_1(x)] & 当x\leqslant b,g_1(x)\leqslant a\\ f_1[g_2(x)] & 当x>b,g_2(x)\leqslant a\\ f_2[g_1(x)] & 当x\leqslant b,g_1(x)>a\\ f_2[g_2(x)] & 当x>b,g_2(x)>a\end{cases}$$

4. 无穷小量问题

【例6】求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

【例7】设当$x\to 0$时$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小,而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数n等于(   ).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$,$x\sin x^n\sim x^{n+1}$,$e^{x^2}-1\sim x^2$,由题意可知,$2<n+1<4$,即,$n+1=3$,$n=2$,选(B).

【例8】设$\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt$,$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当$x\to 0$时,$\alpha(x)$是$\beta(x)$的(   ).

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小

(C)同阶但不等价的无穷小　　(D)等价无穷小

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\,\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\cos x(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}=\dfrac{5}{e}$,选(C).

5. 极限的求法

方法一：准则法.

【例 9】设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x^n(3-x_n)}$，证明 $\lim\limits_{x\to 0}x_n$ 存在，并求其值.

解 因为 $x_1>0$，$3-x_1>0$，所以 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\dfrac{x_1+(3-x_1)}{2}=\dfrac{3}{2}$，（几何平均值≤算术平均值），由数学归纳法可知，当 $n>1$ 时，$0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，故 $\{x_n\}$ 有界. 又当 $n>1$ 时，

$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\dfrac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0$，所以 $x_{n+1}\geqslant x_n$，则 $\{x_n\}$ 单调增加. 根据准则 1，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ 存在，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $l=\sqrt{l(3-l)}$，$l^2=3l-l^2$，$l=0$（舍去），有 $l=\dfrac{3}{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

说明：递推数列求极限，单调有界要先证；两边极限一起上，方程之中把值找.

【例 10】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

解 令 $x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$，$y_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{2n}{2n+1}$，则 $0<x_n<y_n$，于是，$0<x_n^2<x_ny_n=\dfrac{1}{2n+1}$，由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n^2=0$，于是原极限为 0.

方法二：重要极限应用法.

【例 11】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解 当 $x=0$ 时　　　原式 $=1$

当 $x\neq 0$ 时

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

【例 12】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{c}{x}\right)^x}=\frac{\mathrm{e}^c}{\mathrm{e}^{-c}}=\mathrm{e}^{2c}$$

则依据拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)[x-(x-1)]=f'(\xi)$，其中 ξ 介于

$(x-1)$与 x 之间，那么$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(\xi\to\infty)}}f'(\xi)=\mathrm{e}$，于是，$\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，$2c=1$，则 $c=\dfrac{1}{2}$.

说明：函数之差化导数，拉氏定理显神通.

方法三：洛必达法则求极限法.

【例 13】求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

解
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{4}{4}\sin2x\cos2x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin4x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin4x}{12x}=\frac{4}{3}.$$

【例 14】设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq0$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^xf(x-t)\,\mathrm{d}t}$.

解
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^xf(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^xtf(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u}（分母令\ x-t=u）$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^xf(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^xf(u)\,\mathrm{d}u+xf(x)}（用积分中值定理）$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\(\xi\to0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}（\xi\ 在\ 0\ 和\ x\ 之间）=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

说明：变限积分是函数，遇到之后先求导.

公式：$\left[\int_a^xf(t)\,\mathrm{d}t\right]'=f(x)$，[当$f(x)$连续时].

【例 15】若 a,b 为常数，且 $a>0,b>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

解 先考虑$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$，它是“$1^\infty$”型. 令 $y=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$，$t=\dfrac{1}{x}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(a^t+b^t)-\ln2}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{a^t\ln a+b^t\ln b}{a^t+b^t}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

因此$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\sqrt{ab}$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

说明：离散数列“洛必达”，先要转化连续型.

方法四：分段函数求极限法.

【例 16】求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解
$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{(-x)}\right]=2-1=1,\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

说明:分段函数分段点,左右运算要先行.

方法五:导数定义求极限法.

【例 17】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切,求$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解 由题设可知 $f(0)=0, f'(0)=(\sin x)'\big|_{x=0}=1$

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0}=2f'(0)=2.$

方法六:定积分定义求极限法.

公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$, [$y=f(x)$连续].

【例 18】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

分析 假设用夹逼定理的方法来考虑 $\dfrac{n^2}{n^2+n^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+1}$,但是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n^2}=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1^2}=1$,由此可见,无法用夹逼定理考虑,改用定积分定义来做.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}.$

【例 19】求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{k}}$.

解 因为 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{k}}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\dfrac{2}{\pi}$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\right)=\dfrac{2}{\pi}$,由夹逼定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{k}}=\dfrac{2}{\pi}$.

说明:数列极限逢绝境,转化积分见光明.

6. 极限的反问题

从题目中的极限关系式出发,充分利用$\dfrac{0}{0}$式的分子分母的极限为0,以及洛必达法则.

【例 20】设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$,求 a 和 b.

解 由题设可知
$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$$
故
$$1+a+b=0$$
用洛必达法则,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+a}{2x\cos(x^2-1)}=\dfrac{2+a}{2}=3$,$a=4$,$b=-5$.

【例 21】设$f(x)$在$(0,+\infty)$可导,$f(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 且$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,求$f(x)$.

解 先用幂指函数处理方法,$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]}$,再用导数定义$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$,取 $F(x)=\ln f(x)$,$\Delta x=hx$,于是$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{x}{hx}[\ln f(x+hx)-\ln f(x)]=x[\ln f(x)]'$,这样 $\mathrm{e}^{x[\ln f(x)]'}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,所以 $x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$,$[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$,$\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}+c'$,$f(x)=c\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$,再由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,可知 $c=1$,则$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

7. 连续与间断的判定问题

> 间断点的分类:就一般情况而言,通常把间断点分成两类:如果 x_0 是函数$f(x)$的间断点,但左极限$f(x_0-0)$及右极限$f(x_0+0)$都存在,那么 x_0 称为函数$f(x)$的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点,称为第二类间断点. 在第一类间断点中,左、右极限相等者称为可去间断点,不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

【例 22】设$f(x)$,$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$为连续,且$f(x)\neq0$,$g(x)$有间断点,则下列函数中必有间断点的是( ).

(A)$g[f(x)]$ (B)$[g(x)]^2$ (C)$f[g(x)]$ (D)$\dfrac{g(x)}{f(x)}$

解 (A),(B),(C)不成立可用反例$f(x)\equiv1$,$g(x)=\begin{cases}1 & x\geq0\\ -1 & x<0\end{cases}$,(D)真,假设$\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$没有间断点,那么 $g(x)=f(x)h(x)$为两个连续函数的乘积,一定连续相互矛盾,故$\dfrac{g(x)}{f(x)}$一定有间断点.

【例 23】求$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=f(x)$的间断点,并判别其类型.

解 当 $x\neq k\pi$,有 $\ln f(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x}{\cos t}\cdot\dfrac{\sin x}{\dfrac{\sin t}{\sin x}}=\dfrac{x}{\sin x}$

得$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}(x\neq k\pi)$. 可见 $x=k\pi$ 为间断点,$x=0$ 是可去间断点,其他皆为第二类间断点.

8. 区间上连续函数的性质问题

定理1(最值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

定理2(有界性定理)　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理3(零点定理)　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)=A$及$f(b)=B$异号,即$f(a)f(b)<0$,那么在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点,即至少有一点$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=0$.

定理4(介值定理)　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在这个区间的端点取不同的函数值$f(a)=A$及$f(b)=B$,那么,对于A与B之间的任意一个数C,在开区间(a,b)内至少有一点ξ,使得$f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

【例24】设$f(x)$在$[0,1]$上连续,且$f(0)=0,f(1)=1$,证明存在$\xi\in(0,1)$,使得$f(\xi)=1-\xi$.

证　令$g(x)=f(x)+x-1$,则$g(x)$在$[0,1]$上连续,$g(0)=-1<0,g(1)=1>0$,根据介值定理推论,存在$\xi\in(0,1)$使$g(\xi)=0$,即证.

【例25】设$f(x)$在$[0,2]$上连续,且$f(0)+f(1)+f(2)=3$,证明存在$\xi\in[0,2]$,使$f(\xi)=1$.

证　因$f(x)$在$[0,2]$上连续,故有最大值M和最小值m,于是

$$m\leqslant\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\leqslant M$$

根据介值定理,存在$\xi\in[0,2]$,使$f(\xi)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]$,所以$f(\xi)=1$.

说明:函数为零欲论证,介值定理定乾坤.

第二节　一元函数微分学

一、知识要点

函数的导数	概念	导数:设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,又记为:$y'\big\|_{x=x_0},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big\|_{x=x_0},\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\|_{x=x_0}$. 左导数$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$;右导数$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. 函数在某点处可导的充分必要条件是左导数和右导数都存在且相等. 微分:设函数$y=f(x)$在x_0点可导,Δx为自变量x的改变量,则称$f'(x_0)\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在x_0点的微分,记作$\mathrm{d}f(x_0)$
	性质	算律:设$u=u(x),v=v(x)$都可导,则 (1)$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$. (2)$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. (3)$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$　$[v(x)\neq0]$. (4)$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$. (5)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

（续）

函数的导数	性质	参数方程的求导：设 y 是 x 的函数，由 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$. 隐函数的求导：设 $y=f(x)$，由 $F(x,y)=0$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$
	高阶导数	$y'=f'(x)$ 的导数叫作函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即 $y''=(y')'$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$. 二阶导数的导数称三阶导数，$n-1$ 阶导数的导数称 n 阶导数
	微分中值定理	罗尔定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在 $\varepsilon\in(a,b)$ 使 $f'(\varepsilon)=0$. 拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则至少存在 $\varepsilon\in(a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\varepsilon)$，即 $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)=(b-a)$. 柯西中值定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续，在 (a,b) 内都可导，且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在 $\varepsilon\in(a,b)$，使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$
	泰勒定理	设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，在 $[a,b]$ 上有 n 阶连续导数，则对 $x\in[a,b]$，存在 ε 在 x_0 与 x 之间，有公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

二、解题方法与技巧

1. 函数可导性的判定问题

主要方法：定义法. 做题时注意左右导数计算，洛必达法则的应用.

【例 1】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{\mathrm{e}^{n(x-1)}+1}$，问 a 和 b 为何值时，$f(x)$ 可导，并求 $f'(x)$.

解 因 $x>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(x-1)}=+\infty$，$x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n(x-1)}=0$.

故
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ (a+b+1)/2 & x=1 \\ ax+b & x<1 \end{cases}$$

由 $x=1$ 处的连续性，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1$，$f(1)=\frac{a+b+1}{2}=1$，可知 $a+b=1$；再由 $x=1$ 处的可导性，可知 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-f(1)}{x-1}$ 和 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(ax+b)-f(1)}{x-1}$ 存在，且 $f'_+(1)=f'_-(1)$，根据洛必达法则 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x}{1}=2$，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{a}{1}=a$，故 $a=2$，于是 $b=1-a=-1$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x>1\\ 1 & x=1\\ 2x-1 & x<1\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}2x & x\geqslant 1\\ 2 & x<1\end{cases}.$$

导数与微分的运算法则和计算公式

基本导数公式：		
(1) $(C)'=0$	(2) $(x^n)'=nx^{n-1}$	(3) $(\sin x)'=\cos x$
(4) $(\cos x)'=-\sin x$	(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$	(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$
(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$	(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$	(9) $(a^x)'=a^x\ln a$
(10) $(e^x)'=e^x$	(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$		

2. 函数导数的计算问题

【例 2】函数 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\dfrac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'=\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

【例 3】求方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

解 方程两边分别对 x 求导，方程两边的导数相等.

$5y^4\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dy}{dx}-1-21x^6=0$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+21x^6}{5y^4+2}$，当 $x=0$ 时，得 $y=0$，因此$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

3. 切线和法线方程的计算问题

【例 4】已知曲线的极坐标方程$\rho=1-\cos\theta$，求曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$处的切线与法线的直角坐标方程.

解 曲线的参数方程为$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$$

故切线方程 $y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=1\cdot\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}\right)$，即 $x-y-\dfrac{3}{4}\sqrt{3}+\dfrac{5}{4}=0$.

法线方程 $y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{4}}{3}=-\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{4}\right)$，即 $x+y-\dfrac{1}{4}\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}=0$.

【例 5】设$f(x)$为周期是 5 的连续函数，在 $x=0$ 的邻域内恒有$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=$

$8x+a(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(x)}{x}=0$,$f(x)$在$x=1$处可导,求曲线$f(x)$在点$[6,f(6)]$处的切线方程.

解 由题设可知$f(6)=f(1)$,$f'(6)=f'(1)$,故切线方程为$y-f(1)=f'(1)(x-6)$,所以关键是求出$f(1)$,$f'(1)$.

由$f(x)$的连续性可知,$\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=-2f(1)$,由所给条件可知$-2f(1)=0$,$f(1)=0$,再由所给条件可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{8x}{\sin x}+\dfrac{a(x)}{\sin x}\right]=8$,令$\sin x=t$,$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=8$,又因$f(1)=0$,故上式左边$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{[f(1+t)-f(1)]}{t}+3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1-t)-f(1)}{(-t)}=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$,则$4f'(1)=8$,$f'(1)=2$,所求切线方程为$y-0=2(x-6)$即$2x-y-12=0$.

4. 高阶导数的计算问题

注意寻找各阶导数间的递推关系,加强数学归纳法在解题中的应用.

1)求二阶导数

【例 6】设$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2t$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2)$.

【例 7】设$y=y(x)$由方程$x^2+y^2=1$所确定,求y''.

解 $2x+2yy'=0$,得$y'=-\dfrac{x}{y}$;$y''=-\dfrac{1\cdot y-xy'}{y^2}=-\dfrac{y+\dfrac{x}{y}}{y^2}=-\dfrac{y^2+x^2}{y^3}=-\dfrac{1}{y^3}$

2)求n阶导数

【例 8】设$y=\dfrac{x^3}{x^2-3x-4}$,求$y^{(n)}$(n为正整数).

解 先用多项式除法,得$y=(x+3)+\dfrac{13x+12}{(x-4)(x+1)}$,然后把真分式再化为最简公式,

令$\dfrac{13x+12}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+1}$,得$13x+12=A(x+1)+B(x-4)$,令$x=4$,得$5A=64$,$A=\dfrac{64}{5}x=4$;令$x=-1$,得$-5B=-1$,$B=\dfrac{1}{5}x=-1$.

$$y=(x+3)+\frac{64}{5}(x-4)^{-1}+\frac{1}{5}(x+1)^{-1}$$

$$y'=1-\frac{64}{5}(x-4)^{-2}-\frac{1}{5}(x+1)^{-2}$$

$$y''=(-1)(-2)\frac{64}{5}(x-4)^{-3}+\frac{1}{5}(x+1)^{-3}$$

$$\cdots$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com