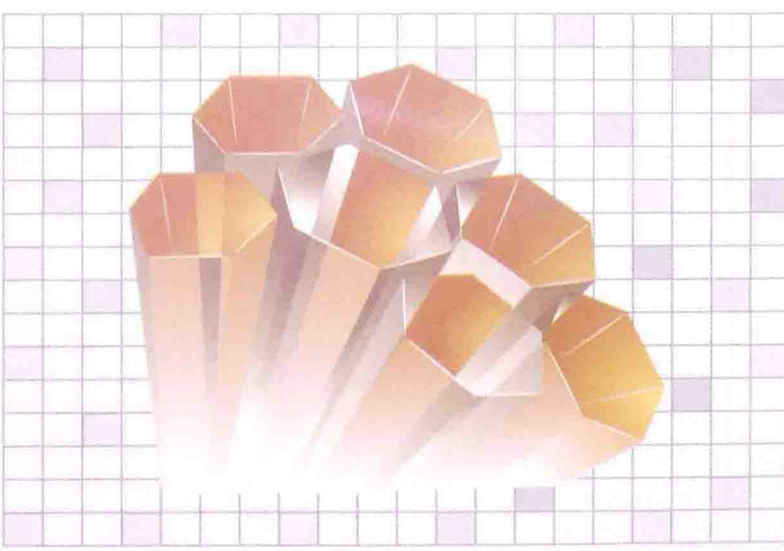
信息环境下大学数学课程改革系列教材
高等学校应用型创新型人才培养系列教材

实用大众线性代数
（MATLAB版）

陈怀琛 著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

实用大众线性代数(MATLAB版)

陈怀琛　著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了线性代数的基本理论，主要包括用消元法解高阶方程组(包括适定、超定和欠定)，用向量空间理解线性代数，以及线性变换的实际应用三个方面。通过近50个应用实例，介绍了它们的建模方法和解题程序。

本书的特色：(1) 实用化：本书以工科的后续课程及实际工程问题的解题需要选择内容，包含十几个应用例题；(2) 大众化：简化理论，使具有高中毕业程度的读者用较少的学习时间(约30学时)就能基本掌握；(3) 现代化：用计算机软件(MATLAB)来解决问题，不依靠笔算。

本书的读者对象为在职工程师(继续教育读物)、应用型技能型专业的学生(以本书为线性代数教材)以及普通高校本科学生(以本书为参考书)。

图书在版编目(CIP)数据

实用大众线性代数：MATLAB版/陈怀琛著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2014.8

ISBN 978-7-5606-3462-3

Ⅰ. ① 实…　Ⅱ. ① 陈…　Ⅲ. ① 线性代数—计算机辅助计—Matlab软件　Ⅳ. ① O151.2-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第170694号

策　　划　毛红兵
责任编辑　毛红兵　王　毅
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　10.5
字　　数　237千字
印　　数　1～3000册
定　　价　20.00元

ISBN　978-7-5606-3462-3/O

XDUP　3754001-1

如有印装问题可调换

作 者 简 介

陈怀琛，西安电子科技大学教授。1953 年起，先后在力学、控制和电子等领域执教，发表论文数十篇，曾任副校长。1994 年卸任后一直致力于推动本科课程和教学的计算机化，其目标是使用计算机代替计算器来解决各课程的问题，达到“面向现代化，面向世界，面向未来”的方向。为此，他编写了七本以 MATLAB 为基础的新型教材。其中《MATLAB 及其在理工课程中的应用指南》发行近四万册,《MATLAB 及在电子信息课程中的应用》发行近十万册。

2005 年起，他重点推广在线性代数中应用 MATLAB，编写了《线性代数实践及 MATLAB 入门》及《工程线性代数(MATLAB 版)》两本书，得到了教育部数学基础课程教学指导分委员会的支持。2009 年高教司设立了“用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数”的专项课题，陈教授被任命为项目负责人，组织了 19 所大学共同实施，着重点是课程的计算机化。

十年来，他从工科的角度，对线性代数理论的实用化和大众化提出了不少创新的建议。此外，他发表了多篇文章，论述了“科学计算能力”的重要性及其培养的途径。

陈教授的主页网址：http://chen.matlabedu.cn

通信地址：(710071)西安太白南路 2 号西安电子科技大学 334 信箱

电话：(029)88202988

电子邮箱：hchchen1934@vip.163.com, hchchen@xidian.edu.cn

前　　言

一、本书的特色和概貌

线性代数是一门应用性很强，但又在理论上进行了高度抽象的数学学科。它的重要性主要体现在其应用扩大到了愈来愈多的新领域，这种“需求牵引”使它的重要性大大提高；而几十年来计算机软硬件的飞速发展，作为“技术推动”，给以应用作为改革方向的线性代数提供了空前的机遇。美国在 1990 年提出了线性代数改革的五条建议：(i) 线性代数课程要面向应用，满足非数学专业的需要；(ii) 它应该是面向矩阵的；(iii) 它应该是根据学生的水平和需要来组织的；(iv) 它应该利用新的计算技术；(v) 抽象内容应另设后续课程来讲。1992—1997 年他们在大学教师中实施了“用软件工具加强线性代数教学”的 ATLAST 计划，MIT 的 G.Strang 教授提出了“让线性代数向世界开放”的口号，听他的视频讲座的人数已超过一百万。在中国科技和经济高速发展的今天，普及线性代数也具备了更好的条件。本书就是为从事应用层面的技术人员和高校学生所编写的。

本书的书名反映了它的特色——“实用化”、“现代化”和“大众化”。“实用化”指的是本书以工科的后续课程及未来工程的需求为标准安排内容，附录 B 和 C 中列出的 60 个应用实例表明了本书的实用价值；“现代化”指的是用 MATLAB 来解决问题，不依靠笔算；“大众化”指的是书中采用了最少、最浅而又足够的理论，使推理能力不太强的学生和有实践经验但多年不接触数学的工程师都能接受，便于向大众普及。

二、改革方向和内容

作者不是数学教师，从 1953 年起，在机械、控制、电子领域执教了六十多年。1994 年退居二线以后，致力于在大学本科教学中推动 MATLAB 的机算应用。到 2004 年，作者编写了多本教材[12-14]，涉及本科十多门课程数百道例题。作者发现其中三分之一以上是用矩阵模型求解的线性代数问题，而学生对此类模型不熟悉，原因就是线性代数没学好。于是从 2005 年开始，作者对现有的国内外线性代数大纲和教材进行分析，提出了改革的思路。

传统线性代数的最大弱点是“片面强调理论，脱离机算实践”，作者 2005 年编写的《线性代数实践及 MATLAB 入门》[5]，主要就是针对这一点进行改革，读者对象是教师。2007 年作者与高淑萍、杨威合编了《工程线性代数(MATLAB 版)》[6]，读者对象是学生。虽然以强化建模和实践为主，但是考虑到学生考研，理论一点也不敢动。2009 年高教司指定由作者牵头，19 所大学参与，实施了“用 MATLAB 及建模实践改造工科线性代数”子项，上述两本书就是项目思想的载体。两年中，共有 200 多名教师、45 000 名学生在这项改革

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

中受益，虽然在线性代数中使用计算机已是师生的共识，但传统大纲中的理论占了很多学时，使学生实践受到很大限制，一些学时少的学校的线性代数课处于半取消状态。

为了达到本书编写的目的，在现代化方面主要引进 MATLAB 软件并贯穿于全书；在实用化方面采用了约 50 个能覆盖各种应用的实例；在大众化方面做了简化理论的工作，这是最难和最具争议的部分。

想简化理论，就要弄清哪些理论是工科学生必学的。线性代数理论博大精深，一个工科教师犹如井底之蛙，不可能从顶向下地梳理清楚，但可以采用逆向思考的方法，把见过的后续课程和工程中的问题加以归纳，找到其最低限度所需要的理论。凡是后续课程需要的，就讲透；凡是找不到直接需求的，即予删除；凡是能找到简明证法的，均予采纳；有些牵扯太广的就不证了，毕竟工科(特别是应用型、技能型)人才是用数学的，与研究数学的要有区别。

从这些命题中归纳出对理论的需求，反映在本书中，为四方面的重大改革：

(1) 关于行列式的讲法。我们发现，在所有的应用命题中，除了求面积、体积和求特征方程的问题外，没有一个要计算行列式的，这是因为在用消元法解方程时，已经在不知不觉中使用了行列式。用主元连乘法同样可以容易地证明行列式的各种有用的性质，也是软件编程的依据。因此，本书对行列式的其他定义，只用低阶矩阵简述，摆脱了逆序数、代数余子式、伴随矩阵、行列式按行展开等繁琐的数学术语和推导，大大压缩了篇幅，避开了许多“拦路虎”。不讲这些概念，水平就低吗？那要看用不用。对于搞理论的，也许可以练练推公式，但对于搞应用的，水平和创新要体现在建模上。还可以举出两个佐证：一是国际领先的矩阵软件 MATLAB 中就没有这些术语及其子程序，全世界有几百万用户却都在用它求解大规模、高难度的线性代数问题，说明应用中确实不需要这些概念；二是美国 MIT 的教材[3]也只通过二、三阶矩阵对此作了简介，深度与本书相当。

(2) 向量空间要讲透三维，减缩 n 维。帮助大学低年级学生建立立体概念是大学教学计划中的重要一环，为此有制图、画法几何、多变量微积分、物理中场的演示、数学中的场论、电工中的复信号、电机中的旋转磁场等多门课程。线性代数本应该有责任帮助学生建立空间概念，但现有教法却弱化三维，过分强调 n 维空间。全是公式，没法画图，不利于学生接受。国外的各种面向工科的线性代数的优秀教材，都是以三维空间为主，并且有大量的立体图辅助。本书强调二、三维，使例子形象化，并使图形作为建立概念的重要工具。不是说 n 维不重要，而是要循序渐进，先感性积累，后理性抽象，一年级学 n 维太早了。

(3) 弱化欠定，加强超定。欠定方程组是由于命题条件不足造成的，工程师可以拒绝处理，在强调解的唯一性的数学入门阶段，拿不出基础解的工程实例，学生很难理解其意义，也许只有研究生的数学规划课程才有用，在此让大学新生花很多学时是太超前了。超定方程则是工程上常见的问题，它来源于实践中不可避免的干扰和测量误差，而且正是数学家高斯提出的极漂亮的最小二乘解法，其证明又可加强向量空间概念，国外的教材都讲，

只有我国的教材不讲，这是我国线性代数教学脱离工程的表现之一。

(4) 特征根和特征向量对大一学生就有些超前，只有两阶的好懂些，所以只讲到两阶为止，但实数和复数根都要讲。实际上三阶及以上的特征根，手工解是不行的，只有依靠计算机。高阶实二次型不但计算有难度，而且找不到工程应用。而复数特征根却是工程中很有用的，它是理解振动问题的基础，也是学生在日常经验中能够接受的。

用最小的学习成本获得最大的应用效果，这是本书取材的准则。这四项改革是针对以机电信控专业应用为目标的非数学系大学生和工程师提出的理论上的最低要求，不包括线性代数在更深层次和更高水平上的应用。此外，本书力图用工程语言来叙述概念，从具体到抽象，尽量少用数学定义，多用图形等来证明，不过分强调严密。微积分教材有两百年了，有不少适合工科的版本；线性代数历史短，与工科远未磨合好，教材基本上都还是数学系的模式，很难适应非数学系的需求和口味。

钱学森先生在 1989 年写道：“今后对一个问题求解可以全部让电子计算机去干，不需要人去一点一点算。而直到今天，工科理科大学一二年级的数学课是构筑在人自己去算这一要求上的。……所以理工科的数学课必须改革，数学课不是为了学生学会自己去求解，而是为了学生学会让电子计算机去求解，学会理解电子计算机给出的答案……”。线性代数是数值计算的基础，是最该率先使用计算机的，本书也在朝这个方面努力。希望与读者互动，在学习本书时最好手边有装了 MATLAB 的计算机。

三、不同类型读者该如何使用本书

(1) 本书的对象首先是在职工程师。三十年前的大学是没有线性代数课的，近三十年来虽然开了课，因不用计算机，多数毕业生没有用过线性代数。对于这上千万的不知道如何用线性代数的庞大群体，需要的是从实用出发来补修。读者可以先翻翻第 6 章，看看和自己的领域相近的问题，线性代数是怎么用计算机来解决的，觉得有意思了，再下决心把本书从头看起。因为书中讲理论只有前 5 章，篇幅和难度都不大。

(2) 不以考研为目标的普通大学本科生可以拿本书作为教材，连附录 A 中“MATLAB 的矩阵代数和作图初步”，30 学时应该可以拿下来，注意多加一些上机实践。对于学时更少的高专、高职专业，第 4、5 两章的部分内容也可省略，重点学会用计算机解线性方程组和坐标变换，就能解决后续课及工程中大量的常见实际问题。我国高等教育正面临向职业教育转型的问题，要更多培养应用型、技能型的人才，其关键是课程改革问题，本书希望能为这一转型铺路。

(3) 由于传统考研的命题方向中许多正是本书删节的，而本书所强化的反而是不考的题目，本书不宜作为考研学生的基本教材。对于使用传统线性代数教材的读者，不妨将本书作为参考书。因为书中各章讲法与传统书有很多不同，理论上有不少互补的观点，特别是实践上能提供大量的感性概念和工程问题的计算机解法，有助于学生对理论理解的深化和实践能力的提高。

本书的程序集名为“实用大众线性代数程序集”，现放在西安电子科技大学出版社的网

站(http://www.xduph.com)和作者的主页(http://chen.matlabedu.cn)中，供读者自行下载。

本书的第 7 章是“线性代数在工程中的应用实例”，它提供了难度更高的十多个例题。考虑到一般读者的共性需求没有那样高，不宜把书弄得太厚、太贵，我们决定把这一章的电子稿放在网上，供读者按各自的需求自行下载。

在本书成稿的过程中，秦裕瑗、游宏、张学山、陈利霞、高淑萍、刘炜等老师曾经阅读初稿，并提出了宝贵的建议，西安电子科技大学出版社的毛红兵等编辑给本书提供了很多帮助，中国教育数学学会对作者的线性代数大众化工作给予了长期的支持，在此谨表谢意。

我的电子邮箱是 hchchen1934@vip.163.com，欢迎使用本书的教师和同学提出宝贵的建议。我年事已高，不能参加第一线的教学活动。在此期待有青年教师接力，常和我联系，把这本书修改得更符合工科应用人才的需要！

陈怀琛
于西安电子科技大学
2014 年 7 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　线性方程组与矩阵

1.1　概　　述

线性方程组在数学的各个分支，以及自然科学、工程技术、生产实际中经常遇到。由于现代科学、工程和经济规模愈来愈大，对系统的研究也愈来愈细，所以整个系统的模型往往有很多变量。这些变量间的关系错综复杂，人们通常把它们近似为最简单的线性关系，这就使得线性代数成为大学本科最基础的数学课程之一。

例 1.1　食品配方的应用问题。某食品厂收到某种食品的订单，要求这种食品由甲、乙、丙、丁四种原料做成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为 15%、5% 和 12%。而甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表 1-1 给出。那么，如何用这四种原料配置出满足要求的食品呢？

表 1-1　食品配方表

	甲	乙	丙	丁
蛋白质/%	20	16	10	15
脂肪/%	3	8	2	5
碳水化合物/%	10	25	20	5

解　(1) 建立数学模型。

设所需要的甲、乙、丙、丁四种原料占该食品的百分比分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，则根据题意可以得到四元方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 20\%x_1+16\%x_2+10\%x_3+15\%x_4=15\% \\ 3\%x_1+8\%x_2+2\%x_3+5\%x_4=5\% \\ 10\%x_1+25\%x_2+20\%x_3+5\%x_4=12\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 20x_1+16x_2+10x_3+15x_4=15 \\ 3x_1+8x_2+2x_3+5x_4=5 \\ 10x_1+25x_2+20x_3+5x_4=12 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

方程组(1.1.1)左边后三个方程中的各项原来都带百分号，为了计算方便，将它们都乘以 100，就得到了右边简洁的具有同样解的方程组。每一个方程中，左端是变量 x_1、x_2、x_3、x_4 乘以常数后的叠加，也称为 x_1、x_2、x_3、x_4 的线性组合，右端是常数。这样的方程组称为线性方程组。对于本问题，所找到的方程组的解，必须满足 $x_i>0(i=1, 2, 3, 4)$。

(2) 分析方程组的解。

对于上述食品配置问题，我们需要研究线性方程组的下列几个问题：

① 方程组是否有解？有解时，解的个数是多少？如何解？也就是解的存在性和唯一性

问题。

② 有多解时，这些解之间的关系如何？所得的解针对实际问题是否合理？

③ 无解时，如何找出最接近实际问题的近似解？

对于一般的线性方程组，可以通过如图 1-1 所示的方框图来表述线性代数研究的问题。从工程角度看，在有解的情况下要找到合理的唯一解，在无精确的数学解时要找到近似解。

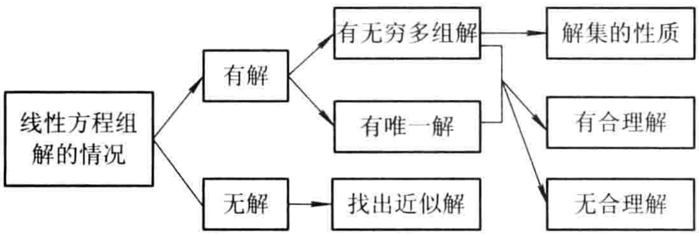


图 1-1　线性方程组的解的情况

1.2　二元和三元线性方程组解的几何意义

本节将讨论二元和三元线性方程组解的几何意义。

例 1.2　求解下列四个线性方程组：

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$；　　(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$；

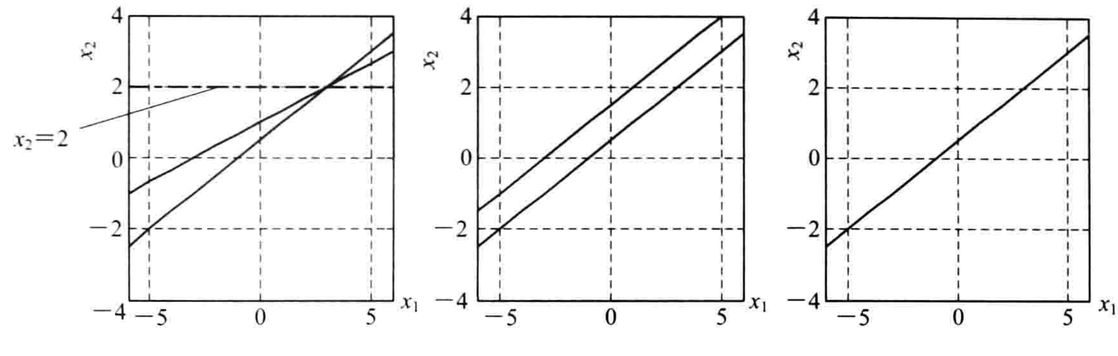
(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$；　　(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$。

解　方程组(a)～(c)都是由两个二元一次方程组成的，方程数等于变量数，容易用消元法求解。先解方程组(a)，将第二个方程加第一个方程，消去 x_1，得到 $x_2=2$，即原方程组变为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ \qquad\; x_2 = 2 \end{cases}$，这是消元法的第一步，其结果是形成一个阶梯形的方程组。对于这样的方程组，可以从下而上求解：由第二个方程得知 $x_2=2$，把它代入第一个方程，得到 $x_1 = 2x_2 - 1 = 3$。这一过程称为回代。本例虽然是一个最简单的二元方程，但是这样规范的方法却可以用来解任意多未知元的方程组，并且可以编成程序，便于用户直接调用。

现在用图解法来理解线性方程组解的几何意义。方程组(a)的解为 $x_1 = 3$，$x_2 = 2$，它是由原始方程组表示的两条直线的交点，如图 1-2(a)所示。由两个方程恰好解出两个变量，这样的线性方程组称为适定方程组。消元过程把第二个方程变为 $x_2 = 2$，图形上成为一条水平线，但交点不变。

采用同样的步骤求解方程组(b)，将第二个方程加上第一个方程，得到的方程是

$0x_1+0x_2=2$，这是一个矛盾的无解方程组，也称为不相容的方程组。可以在平面上画出代表两个方程的两条直线，它们平行且不重合，因此没有交点，如图 1-2(b)所示。



(a) 有解　　(b) 无解　　(c) 有无穷多组解

图 1-2　例 1.2 中方程组(a)～(c)解的情况

方程组(c)消元后的结果是 $0x_1+0x_2=0$，满足第一个方程的解必然也满足第二个方程。即这两个方程中的一个可由另一个导出，我们称它是不独立的。独立方程只有一个，少于变量数，这样的方程组称为欠定方程组，它有无穷多组解。从几何图形看，这两个方程所对应的直线重合，此直线上处处都是解，如图 1-2(c)所示。

方程组(d)有三个独立方程，只有两个变量。它们所对应的三条直线没有公共交点，因而无解，如图 1-3 所示。独立方程数目多于变量数目的方程组称为超定方程组，它是无解的。这里的无解应理解为没有精确地满足数学方程的解。因为工程实践上往往容许误差存在，所以寻找超定方程组的近似解也是实用线性代数必不可少的任务之一。第 4 章会求出点(0.71，−1.43)是方程组(d)的一个近似解。

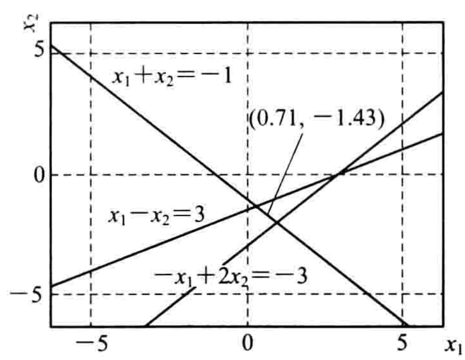


图 1-3　例 1.2 中方程组(d)解的图形

例 1.3　求解三元线性方程组：

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-2z=1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

解　从第二个方程中减去第一个方程的 2 倍，得到 x 系数为零的新的第二方程；再从

第三个方程中减去第一个方程的 −5 倍，得到 x 系数为零的新的第三个方程。此时，方程组(1.2.1)的后两式就化为消去了变元 x 的二元联立方程：

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ 7y - 7z = 21 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

再将第二个方程乘 7/5 与第三个方程相加，消去 y，于是又形成了阶梯形的结构：

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ -2.8z = 14 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

接着开始回代。先由方程组(1.2.3)中的第三个方程知 $z = -5$，将其代入第二个方程，解得 $y = -2$；再将 z、y 代入第一个方程，解得 $x = 1$。

方程组(1.2.1)的三个方程对应于三维空间的三个平面，若这三个平面有公共交点，则该交点就是方程组的解，如图 1-4 所示。

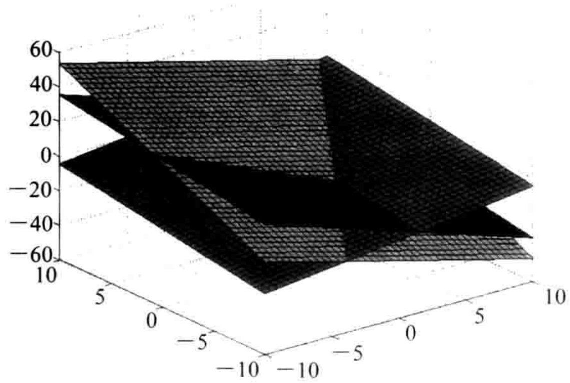


图 1-4　三阶线性方程组求解的图形

如果把方程组(1.2.1)中的第三个方程改为 $4x - y - z = 11$，则消元变换的过程如下(其中的 r_i 表示第 i 个方程，如 $r_2 - 2r_1$ 表示第二个方程减去第一个方程的 2 倍)：

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x - y - z = 11 \end{cases} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ -5y + 3z = -5 \end{cases} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

可见，原来的三个方程只有两个是独立的，方程数少于变量数，因此无法求得它们的唯一解。画出这三个方程的图形(见图 1-5)，可以看出，三个平面交于同一条直线而不是交于一个点，所以得不出唯一的解。这个方程组是欠定方程组，它有无穷多组解，这些解的集合是一条直线。

除了三个平面相交于同一条直线外，如有两个平面重合，也会出现解为一条直线的方程组。当两个平面平行，或者两个平面的交线与第三个平面平行时，三个平面也没有公共交点。图 1-6 给出了一些三个平面没有公共交点的例子，这些方程组都是无解或无唯一解的。

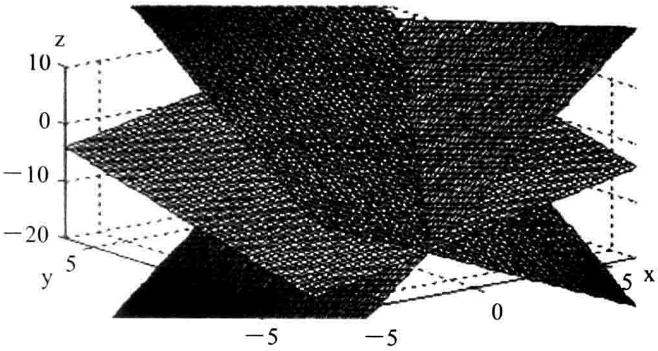
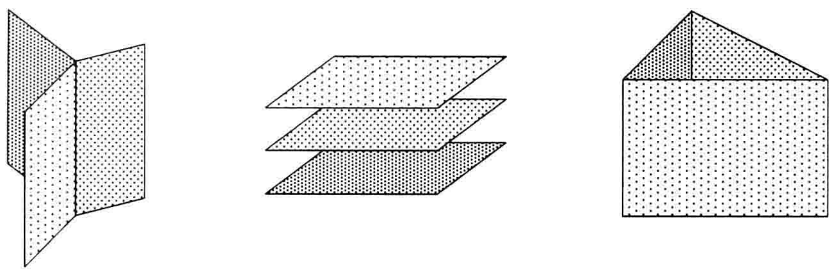


图 1-5　三个平面交于同一条直线的欠定情况



(a)　　(b)　　(c)

图 1-6　三阶方程组多解和无解时的几何解释

对于更多元的线性方程组，不可能想象出其空间的几何图形，但关于适定、不相容、欠定方程组的基本概念是一脉相承的。

1.3　高斯消元法与阶梯形方程组

本节将把对二元、三元一次方程组求解的方法，推广到 m 个方程、n 个变量的高阶多元线性方程组。原理上，它和中学的消元法或代入法本质上并无差别，但为了便于向高阶系统推广，一是系数的位置要清晰；二是计算的步骤要规范；三是能够编成由计算机执行的程序。这就要借助于 1.4 节引入的矩阵，用计算机解决高阶联立方程问题，这是线性代数与初等代数的最大区别。

线性方程组的一般形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

式(1.3.1)称为 n 元线性方程组。其中：x_1，x_2，⋯，x_n 是 n 个变量；m 是方程的个数；a_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$)是方程组的系数；b_j ($j = 1, 2, \cdots, m$)是方程组的常数项。系数 a_{ij} 表示第 i 个方程是变量 x_j 的系数。一般情况下，变量的个数 n 与方程的个数 m 不一定相等。

线性方程组(1.3.1)中解的全体称为它的解集合。解方程组就是求其全部解，亦即求出其解集合。如果两个方程组有相同的解集合，就称它们为同解方程组。存在解(包括一个解

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com