

高 等 学 校 教 材

数学分析 (下册)

主 编 丁宣浩 陈义安

副主编 赵文强 江晓涛 陈尚杰

高等教育出版社

高等学校教材

数 学 分 析

Shuxue Fenxi

(下册)

主 编 丁宣浩 陈义安
副主编 赵文强 江晓涛 陈尚杰

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册,上册主要包括实数与数列、函数与极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学等;下册主要包括多元函数积分学、无穷级数、微分方程与差分方程、再论极限、再论连续、再论微分、再论级数、再论积分等。

本书可作为高等学校本科数学专业数学分析课程的教材,也可供非数学专业对微积分教学要求较高的专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/丁宣浩,陈义安主编. --北京:
高等教育出版社,2015.2

ISBN 978-7-04-041664-0

I. ①数… II. ①丁…②陈… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 296645 号

策划编辑 兰莹莹
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 兰莹莹
责任校对 王 雨

封面设计 于文燕
责任印制 田 甜

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 廊坊市科通印业有限公司
开 本 787mm × 960mm 1/16
印 张 24.25
字 数 440 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2015 年 2 月第 1 版
印 次 2015 年 2 月第 1 次印刷
定 价 35.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 41664-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第十章 多元函数积分学	1
§ 10.1 二重积分	1
一、二重积分的概念和性质	1
二、二重积分的计算	5
§ 10.2 三重积分	15
一、三重积分的概念	15
二、利用直角坐标计算三重积分	16
三、三重积分变换	21
§ 10.3 重积分的应用	24
一、曲面的面积	24
二、重心	26
三、转动惯量	28
四、引力	30
§ 10.4 对弧长的曲线积分	31
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	31
二、对弧长的曲线积分的计算法	33
§ 10.5 对坐标的曲线积分	35
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	35
二、对坐标的曲线积分的计算法	37
§ 10.6 格林公式及其应用	40
一、格林公式	40
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	43
三、二元函数的全微分求积	45
§ 10.7 对面积的曲面积分	47
一、对面积的曲面积分的概念与性质	47
二、对面积的曲面积分的计算	48
§ 10.8 对坐标的曲面积分	50
一、对坐标的曲面积分的概念与性质	50

二、对坐标的曲面积分的计算法	53
§ 10.9 高斯公式与斯托克斯公式	56
一、高斯公式	56
二、斯托克斯公式	59
习题十	60
第十一章 无穷级数	69
§ 11.1 数项级数	69
一、数项级数的基本概念	69
二、正项级数的审敛法	74
三、级数的绝对收敛与条件收敛	81
§ 11.2 幂级数	84
一、函数项级数的概念	84
二、幂级数及其收敛性	85
三、幂级数的和函数	90
四、函数的泰勒公式与幂级数展开	93
§ 11.3 傅里叶级数	100
一、三角级数	100
二、以 2π 为周期的函数的傅里叶级数	101
三、收敛定理	103
四、函数的傅里叶级数展开的例	105
五、正弦级数和余弦级数	107
六、一般周期函数的傅里叶级数	109
习题十一	112
第十二章 微分方程与差分方程	120
§ 12.1 微分方程·可分离变量的方程	120
一、微分方程的基本概念	120
二、可分离变量的一阶微分方程	123
§ 12.2 齐次方程与全微分方程	125
一、齐次微分方程	125
二、全微分方程	128
§ 12.3 一阶线性方程	130
一、一阶线性齐次方程的解法	131

二、一阶线性非齐次方程的解法	131
三、伯努利方程	134
§ 12.4 可降阶的二阶微分方程	135
一、可直接积分求解的微分方程	135
二、不显含未知函数 y 的微分方程	135
三、不显含自变量 x 的二阶微分方程	136
§ 12.5 高阶线性微分方程	136
一、二阶常系数线性齐次方程的通解	137
二、二阶常系数线性非齐次方程	138
§ 12.6 差分方程初步	142
一、基本概念	142
二、一阶常系数线性差分方程	145
三、非齐次方程的通解与特解	146
习题十二	149
第十三章 再论极限	154
§ 13.1 极限概念的回顾	154
§ 13.2 确界定理	155
一、有界集	155
二、确界原理	156
§ 13.3 单调有界定理	158
§ 13.4 致密性定理与上、下极限	162
一、致密性定理	162
二、上、下极限	163
§ 13.5 函数极限的归结原则	166
§ 13.6 柯西收敛准则	168
一、数列极限的柯西收敛准则	168
二、函数极限的柯西收敛准则	170
三、完备的距离空间	171
§ 13.7 区间套定理	172
§ 13.8 有限覆盖定理	174
一、有限覆盖定理	174
二、实数连续基本定理的等价性	175
习题十三	176

第十四章 再论连续	181
§ 14.1 连续函数的局部性质	181
一、函数在一点连续的意义	181
二、连续函数的局部保号性	183
§ 14.2 闭区间上的连续函数的性质	184
一、有界性	184
二、介值性	185
§ 14.3 一致连续函数	186
一、一致连续的概念	186
二、一致连续函数的性质	187
三、一致连续定理	188
§ 14.4 非闭区间上的连续函数的性质	189
§ 14.5 紧集上的连续函数的性质	191
§ 14.6 实数连续性定理的应用	194
习题十四	195
第十五章 再论微分	199
§ 15.1 一阶微分中值定理	199
一、导数概念及费马定理	199
二、微分中值定理及导函数性质	200
三、多元函数微分中值定理	206
§ 15.2 高阶微分中值定理	208
一、一元函数泰勒公式	208
二、二元函数泰勒公式	214
§ 15.3 凸函数	216
§ 15.4 隐函数存在定理	222
一、单个隐函数	222
二、隐函数组	227
三、逆映射定理	230
四、空间参数方程曲面的法线	235
习题十五	236

第十六章 再论级数	241
§ 16.1 数项级数的收敛性	241
一、正项级数判别法	241
二、一般项级数	245
* 三、收敛级数的若干性质	249
§ 16.2 函数列与函数项级数的一致收敛性	255
一、函数列的一致收敛性	255
二、函数项级数一致收敛的概念	262
三、利用一般项判断函数项级数一致收敛	264
§ 16.3 一致收敛的极限函数的性质	268
一、函数列的极限函数	268
二、函数项级数的和函数	272
§ 16.4 幂级数的性质	276
一、幂级数的内闭一致收敛性	276
二、幂级数和函数的性质	277
§ 16.5 傅里叶级数的收敛判别法	280
一、狄利克雷积分	281
二、Riemann-Lebesgue 引理及推论	282
三、傅里叶级数的收敛定理	284
习题十六	291
第十七章 再论积分	297
§ 17.1 定积分与重积分的定义	297
§ 17.2 达布上和与达布下和	299
§ 17.3 函数可积的条件	302
§ 17.4 含参变量积分	305
一、连续性(积分号下取极限)	305
二、可微性(积分号下求导)	307
三、可积性(交换积分顺序)	309
§ 17.5 反常积分的收敛性	311
一、无穷积分的性质	311
二、比较判别法	312
三、狄利克雷判别法与阿贝尔判别法	314

四、瑕积分	316
五、含参变量反常积分	318
六、欧拉积分	321
§ 17.6 重积分的换元法	324
§ 17.7 场论初步	329
一、场的概念	329
二、各种积分间的联系	331
三、第二型曲面积分的计算小结	334
四、麦克斯韦方程	339
习题十七	344
部分习题参考答案	351

第十章 多元函数积分学

这一章将介绍六种多元函数积分,如何计算这些积分是这一章的重点.这些积分的计算最终都要化为定积分,因此必须复习第六章与第七章的不定积分与定积分的知识.而第一节介绍的二重积分是计算三重积分与两种曲面积分的基础.

§ 10.1 二重积分

一、二重积分的概念和性质

1. 曲顶柱体的体积

“曲顶柱体”是指以 Oxy 面上的闭区域 D 为底,曲面 $z=f(x,y)$ 为顶(这里 $f(x,y)\geq 0$ 且在 D 上连续), D 的边界为准线,母线平行于 z 轴的柱面为侧面所围成的立体,如图 10-1.

对于平顶柱体,我们已知其体积公式为

平顶柱体体积 = 底面积 $\times$ 高.

对于曲顶柱体,由于柱体的高是变化不定的,不能直接利用上述平顶柱体的体积公式计算其体积,这与我们计算曲边梯形面积时遇到的问题类似.因此,可仿照计算曲边梯形面积的方法计算曲顶柱体的体积.

将区域 D 任意划分为 n 个可求面积的小区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积 ($i=1, 2, \dots, n$), 如图 10-2 所示. 分别以这些小闭区域的边界曲线为准线,作母线平行于 z 轴的柱面,这些柱面将原来的曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体. 用 d_i ($i=1, 2, \dots, n$) 表示第 i 个小区域内任意两点间距离的最大值,称为该小区域的直径,并记

$$\lambda = \max \{d_1, d_2, \dots, d_n\}.$$

在划分很细密、 λ 充分小时,可将小曲顶柱体近似地看成平顶柱体(因 $f(x,y)$ 连续). 这时,在第 i 个小区域内任取一点 (ξ_i, η_i) , 并以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 表示第 i

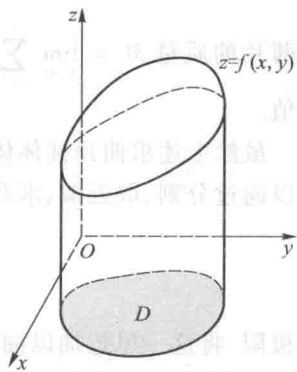


图 10-1

个小平顶柱体的高. 则第 i 个小曲顶柱体的体积 ΔV_i 可近似地表示为

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

整个曲顶柱体的体积

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

当区域 D 的划分充分细密, 即 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 Oxy 平面上的闭区域 D , 它在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$, 这里 $\rho(x, y) \geq 0$ 且在 D 上连续. 现在要计算该薄片的质量 M .

用一组曲线网把区域 D 任意划分为 n 个可求面积的小区域: $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$, 并以 $\Delta \sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积 ($i = 1, 2, \dots, n$). 把各小块的质量近似地看作均匀薄片的质量: $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ ($(\xi_i, \eta_i) \in \Delta \sigma_i$), 各小块质量的和作为平面薄片质量的近似值: $M \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$. 将分割加细, 取极限, 得到平面薄片的质量 $M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$, 其中 λ 是各个小区域的直径中的最大值.

虽然上述求曲顶柱体体积和平面薄片质量问题的实际背景大不相同, 但都可以通过分割、取近似、求和、取极限, 将问题化为求同一种特殊和式

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

的极限. 将这一思想加以抽象, 就可引入二重积分的概念.

定义 10.1 设 $f(x, y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数. 将 D 任意分为 n 个可求面积的小区域 $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$, 并以 $\Delta \sigma_i$ 和 d_i 分别表示第 i 个小区域的面积和直径, $\lambda = \max \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. 在每个小区域 $\Delta \sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. 若当 $\lambda \rightarrow 0$ (此时 n 无限增大) 时, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

存在, 且与区域的划分方法及 (ξ_i, η_i) 的选取均无关, 则称该极限为函数 $f(x, y)$

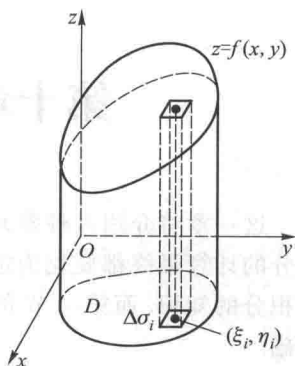


图 10-2

在区域 D 上的二重积分, 记为 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, x, y 称为积分变量, $d\sigma$ 称为面积元素, D 称为积分区域, 并称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积.

根据定义, 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 是一个仅与积分区域 D 和被积函数 $f(x, y)$ 有关, 而与区域 D 的划分方法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关的数值. 因此, 在实际计算二重积分时, 为了方便, 常采用特殊的划分和选点方法.

在直角坐标系下, 如果用平行于坐标轴的直线网来划分 D , 如图 10-3 所示, 那么除了包含边界点的一些小闭区域外, 其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_i 和 Δy_i , 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$, 因此在直角坐标系中, 有时也把面积元素 $d\sigma$ 记作 $dx dy$, 而把二重积分记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中 $dx dy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

可以证明, 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界; 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

由二重积分的定义可知, 曲顶柱体的体积是函数 $f(x, y)$ 在底 D 上的二重积分

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

这就是二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的几何意义. 特别地, $\iint_D d\sigma$ 等于以区域 D 为底, 高为 1 的直柱体的体积, 在数值上, $\iint_D d\sigma$ 等于 D 的面积.

平面薄片的质量是它的面密度 $\rho(x, y)$ 在薄片所占闭区域 D 上的二重积分

$$M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$

这就是二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的一种典型的物理意义.

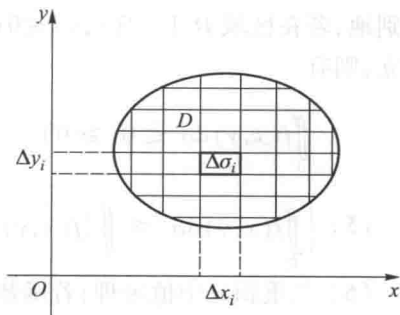


图 10-3

设二元函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则二重积分有下列性质:

$$(1) \iint_D af(x, y) d\sigma = a \iint_D f(x, y) d\sigma, \quad a \text{ 为常数.}$$

$$(2) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(3) 如果积分区域 D 被分成 D_1 和 D_2 两个区域, 且 D_1 和 D_2 除分界线外无公共点, 如图 10-4 所示, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

(4) 若在区域 D 上, $f(x, y) \leq g(x, y)$ 恒成立, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

特别地, 若在区域 D 上, $f(x, y) \leq 0$ (≥ 0) 恒成立, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq 0 \quad (\geq 0).$$

$$(5) \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

(6) 二重积分中值定理: 若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_D.$$

其中 S_D 为区域 D 的面积.

性质(1)~(5)的证明不难, 读者可以自己完成. 下面证明性质(6):

因 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 故 $f(x, y)$ 在 D 上取到最大值 M 和最小值 m . 于是, 对任意的 $(x, y) \in D$, 有

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

由性质(4), 有

$$mS_D = \iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = MS_D,$$

即有

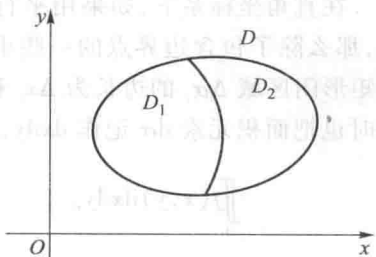


图 10-4

$$m \leq \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M.$$

由二元连续函数的介值定理可知,至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (\text{称其为函数 } f(x, y) \text{ 在区域 } D \text{ 上的平均值}),$$

即有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_D.$$

二、二重积分的计算

与定积分类似,直接按定义计算二重积分是很难的,甚至是不可能的. 解决的办法是将计算二重积分的问题转化为计算两次定积分的问题.

1. 利用直角坐标计算二重积分

设 $f(x, y)$ 为区域 D 上的连续函数 (不妨假设 $f(x, y) \geq 0$), 区域 D 如图 10-5 所示, 即

$$D = \{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \}, \quad (1)$$

称区域 D 为 X -型区域.

由二重积分的几何意义知,当 $f(x, y) \geq 0$ 时,二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 表示以 D 为底、曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 V . 当 D 为 X -型区域时, V 可如下计算:

对任意取定的 $x_0 \in [a, b]$, 过点 $(x_0, 0, 0)$ 作垂直于 x 轴的平面 $x=x_0$, 该平面与曲顶柱体相交所得的截面是以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底, 以 $z=f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形 (如图 10-6 中阴影部分). 根据定积分的几何意义可知, 此曲边梯形的面积为

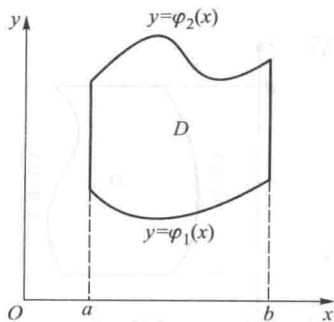


图 10-5 X -型区域

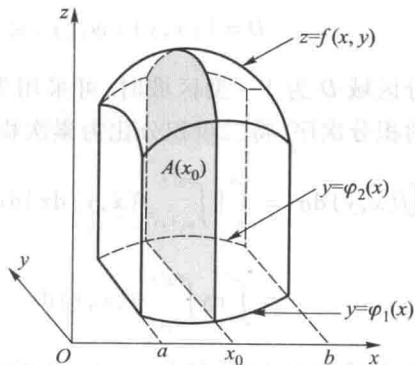


图 10-6

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy,$$

由 x_0 的任意性可知, 对任意的 $x \in [a, b]$, 过点 $(x, 0, 0)$ 作垂直于 x 轴的平面, 该平面与曲顶柱体相交所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

其中 y 为积分变量, x 在积分过程中视为常数.

由上述分析可知, 上述曲顶柱体可看成平行截面面积 $A(x)$ 为已知的立体, 由定积分应用可知, 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx,$$

由此即得二重积分的如下计算公式:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad (2)$$

其中积分区域 D 为 (1) 确定的 X -型区域. (2) 也可写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2')$$

(2) 式右端积分称为累次积分或二次积分. (2) 式将计算二重积分的问题化为先对 y 、后对 x 的连续两次求定积分的问题. 注意, 先对 y 求定积分时, y 是积分变量, x 看作常量, 积分上下限是 x 的函数, 积分结果将是 x 的函数; 在对 x 求定积分时, x 是积分变量, 积分上下限均为常数.

类似地, 若积分区域 D 为图 10-7 所示的平面区域, 则称为 Y -型区域, 即

$$D = \{ (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d \}, \quad (3)$$

当积分区域 D 为 Y -型区域时, 可采用先对 x 、后对 y 的积分次序, 将二重积分化为累次积分:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

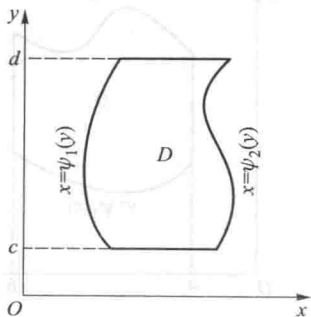


图 10-7 Y -型区域

公式 (2) 和 (4) 是在 $f(x, y) \geq 0$ 的条件下得到的, 可以证明, 对一般的可积函数 $f(x, y)$, 这两

个公式仍然成立. 因此, 实际使用公式(2)和(4)时, 可以不受 $f(x, y) \geq 0$ 的限制.

注 (1) 化二重积分为累次积分的关键是确定积分限, 而积分限是由积分区域 D 的几何形状决定的. 一般的积分区域由若干条曲线围成, 可按照下面的步骤进行:

- 1) 首先画出 D 的简图;
- 2) 如果想把区域化为 X -型区域, 那么先确定 x 的最大变化范围 $a \leq x \leq b$;
- 3) 对每一个 $x_0 \in (a, b)$, 做直线 $x = x_0$, 它与区域 D 的边界至多有两个交点 (这一条不满足, 转到(5)), 上面的交点的 y 坐标是 $y_2 = \varphi_2(x_0)$, 下面的交点的 y 坐标是 $y_1 = \varphi_1(x_0)$;
- 4) 按照公式(2)将二重积分化为二次积分:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

5) 如果对某些 $x_0 \in (a, b)$, 直线 $x = x_0$ 与区域 D 的边界多于两个交点, 则要将区域 D 进行分割, 使分割后的区域的每一块都是标准的 X -型区域; 又如果当 x 在 (a, b) 内变化时, 区域 D 的上边界曲线或者下边界曲线是 x 的分段函数, 那么应该在分段函数的接头处作平行于 y 轴的直线将区域分成几块, 使得每一小块适合上面的(2)和(3)的条件. 对每一小块按照步骤(2)、(3)和(4)进行, 最后利用积分的可加性, 将二重积分化为几个二次积分的和.

6) 当我们想把区域化为 Y -型区域时, 可类似处理.

(2) 若 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 为矩形区域, 则(2)和(4)化为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (5)$$

或者记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (5')$$

(3) 如果 D 既是 X -型区域, 又是 Y -型区域 (如 D 为矩形区域), 只要被积函数连续, 将二重积分化为两种不同顺序的累次积分, 结果是一样的, 但实际计算时, 不同方法的选取可能影响计算的繁简, 甚至决定二重积分能否“积出”. 因此, 化二重积分为累次积分时, 应注意积分次序的选择, 必要时可交换积分次序, 当然积分限应相应地变化.