高等学校教材

数学分析（下册）

主　编　丁宣浩　陈义安
副主编　赵文强　江晓涛　陈尚杰

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析

Shuxue Fenxi

（下册）

主　编　丁宣浩　陈义安
副主编　赵文强　江晓涛　陈尚杰

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分上、下两册，上册主要包括实数与数列、函数与极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学等；下册主要包括多元函数积分学、无穷级数、微分方程与差分方程、再论极限、再论连续、再论微分、再论级数、再论积分等。

本书可作为高等学校本科数学专业数学分析课程的教材，也可供非数学专业对微积分教学要求较高的专业使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．下册／丁宣浩，陈义安主编．--北京：高等教育出版社，2015.2

ISBN 978－7－04－041664－0

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①丁…②陈…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 296645 号

策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　兰莹莹　　封面设计　于文燕　　版式设计　范晓红
插图绘制　杜晓丹　　责任校对　王　雨　　责任印制　田　甜

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　廊坊市科通印业有限公司
开　　本　787mm × 960mm　1/16
印　　张　24.25
字　　数　440 千字
购书热线　010－58581118
咨询电话　400－810－0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2015 年 2 月第 1 版
印　　次　2015 年 2 月第 1 次印刷
定　　价　35.30 元

物 料 号　41664－00

郑重声明

目　录

第十章　多元函数积分学

这一章将介绍六种多元函数积分,如何计算这些积分是这一章的重点.这些积分的计算最终都要化为定积分,因此必须复习第六章与第七章的不定积分与定积分的知识.而第一节介绍的二重积分是计算三重积分与两种曲面积分的基础.

§10.1　二 重 积 分

一、二重积分的概念和性质

1. 曲顶柱体的体积

"曲顶柱体"是指以 Oxy 面上的闭区域 D 为底,曲面 $z=f(x,y)$ 为顶(这里 $f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续),D 的边界为准线,母线平行于 z 轴的柱面为侧面所围成的立体,如图 10－1.

对于平顶柱体,我们已知其体积公式为

平顶柱体体积＝底面积×高.

对于曲顶柱体,由于柱体的高是变化不定的,不能直接利用上述平顶柱体的体积公式计算其体积,这与我们计算曲边梯形面积时遇到的问题类似.因此,可仿照计算曲边梯形面积的方法计算曲顶柱体的体积.

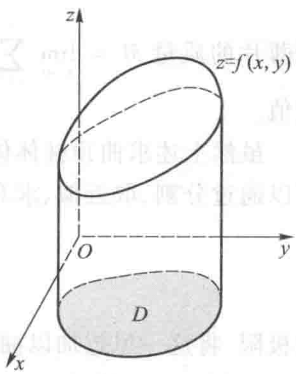

图 10－1

将区域 D 任意划分为 n 个可求面积的小区域:$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积($i=1,2,\cdots,n$),如图 10－2 所示.分别以这些小闭区域的边界曲线为准线,作母线平行于 z 轴的柱面,这些柱面将原来的曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体.用 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第 i 个小区域内任意两点间距离的最大值,称为该小区域的直径,并记

$$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}.$$

在划分很细密、λ 充分小时,可将小曲顶柱体近似地看成平顶柱体(因 $f(x,y)$ 连续).这时,在第 i 个小区域内任取一点(ξ_i,η_i),并以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 表示第 i

个小平顶柱体的高. 则第 i 个小曲顶柱体的体积 ΔV_i 可近似地表示为

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i, i=1,2,\cdots,n.$$

整个曲顶柱体的体积

$$V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

当区域 D 的划分充分细密,即 $\lambda\to 0$ 时,有

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

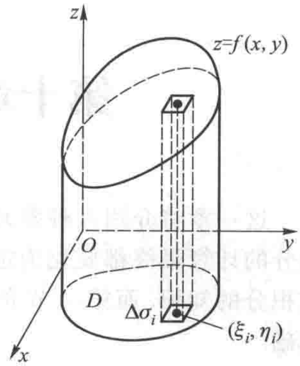

图 10－2

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 Oxy 平面上的闭区域 D,它在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$,这里 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续. 现在要计算该薄片的质量 M.

用一组曲线网把区域 D 任意划分为 n 个可求面积的小区域:$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积($i=1,2,\cdots,n$). 把各小块的质量近似地看作均匀薄片的质量:$\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i((\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i)$,各小块质量的和作为平面薄片质量的近似值:$M\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 将分割加细,取极限,得到平面薄片的质量 $M=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$,其中 λ 是各个小区域的直径中的最大值.

虽然上述求曲顶柱体体积和平面薄片质量问题的实际背景大不相同,但都可以通过分割、取近似、求和、取极限,将问题化为求同一种特殊和式

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

的极限. 将这一思想加以抽象,就可引入二重积分的概念.

定义 10.1　设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数. 将 D 任意分为 n 个可求面积的小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,并以 $\Delta\sigma_i$ 和 d_i 分别表示第 i 个小区域的面积和直径,$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i),$i=1,2,\cdots,n$. 若当 $\lambda\to 0$(此时 n 无限增大)时,极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在,且与区域的划分方法及 (ξ_i,η_i) 的选取均无关,则称该极限为函数 $f(x,y)$

在区域 D 上的二重积分,记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i ,$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数,x,y 称为积分变量,$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素,D 称为积分区域,并称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积.

根据定义,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是一个仅与积分区域 D 和被积函数 $f(x,y)$ 有关,而与区域 D 的划分方法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关的数值. 因此,在实际计算二重积分时,为了方便,常采用特殊的划分和选点方法.

在直角坐标系下,如果用平行于坐标轴的直线网来划分 D,如图 10 - 3 所示,那么除了包含边界点的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域. 设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_i 和 Δy_i,则 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i$,因此在直角坐标系中,有时也把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,而把二重积分记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

可以证明,若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积,则 $f(x,y)$ 在 D 上有界;若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

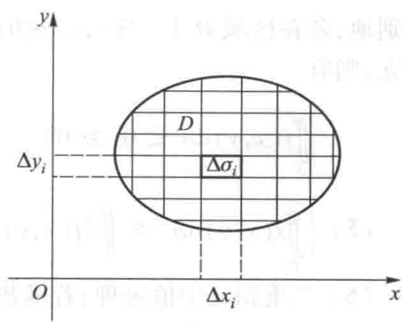

图 10 - 3

由二重积分的定义可知,曲顶柱体的体积是函数 $f(x,y)$ 在底 D 上的二重积分

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

这就是二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义. 特别地,$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$ 等于以区域 D 为底,高为 1 的直柱体的体积,在数值上,$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$ 等于 D 的面积.

平面薄片的质量是它的面密度 $\rho(x,y)$ 在薄片所占闭区域 D 上的二重积分

$$M=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

这就是二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的一种典型的物理意义.

设二元函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则二重积分有下列性质：

(1) $\iint\limits_D af(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = a\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，$a$ 为常数.

(2) $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

(3) 如果积分区域 D 被分成 D_1 和 D_2 两个区域，且 D_1 和 D_2 除分界线外无公共点，如图 10－4 所示，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 若在区域 D 上，$f(x,y) \leqslant g(x,y)$ 恒成立，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

特别地，若在区域 D 上，$f(x,y) \leqslant 0(\geqslant 0)$ 恒成立，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant 0(\geqslant 0).$$

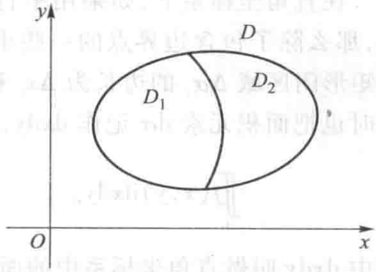

图 10－4

(5) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$.

(6) 二重积分中值定理：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则至少存在一点 $(\xi,\eta) \in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$$

其中 S_D 为区域 D 的面积.

性质(1)～(5)的证明不难，读者可以自己完成. 下面证明性质(6)：

因 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，故 $f(x,y)$ 在 D 上取到最大值 M 和最小值 m. 于是，对任意的 $(x,y) \in D$，有

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M,$$

由性质(4)，有

$$mS_D = \iint\limits_D m\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D M\,\mathrm{d}\sigma = MS_D,$$

即有

$$m \leqslant \frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M.$$

由二元连续函数的介值定理可知,至少存在一点$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ \text{（称其为函数}f(x,y)\text{在区域}D\text{上的平均值）},$$

即有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$$

二、二重积分的计算

与定积分类似,直接按定义计算二重积分是很难的,甚至是不可能的.解决的办法是将计算二重积分的问题转化为计算两次定积分的问题.

1. 利用直角坐标计算二重积分

设$f(x,y)$为区域D上的连续函数（不妨假设$f(x,y)\geqslant 0$）,区域D如图10－5所示,即

$$D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\},\tag{1}$$

称区域D为X－型区域.

由二重积分的几何意义知,当$f(x,y)\geqslant 0$时,二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$表示以$D$为底、曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积$V$.当$D$为$X$－型区域时,$V$可如下计算:

对任意取定的$x_0\in[a,b]$,过点$(x_0,0,0)$作垂直于x轴的平面$x=x_0$,该平面与曲顶柱体相交所得的截面是以区间$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底,以$z=f(x_0,y)$为曲边的曲边梯形（如图10－6中阴影部分）.根据定积分的几何意义可知,此曲边梯形的面积为

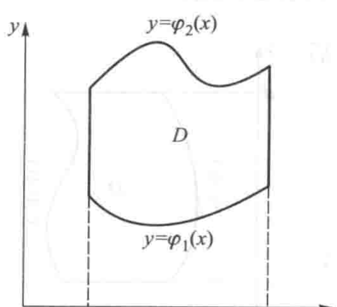

图10－5　X－型区域

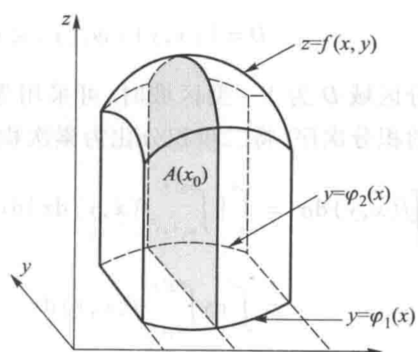

图10－6

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\,\mathrm{d}y,$$

由 x_0 的任意性可知,对任意的 $x\in[a,b]$,过点 $(x,0,0)$ 作垂直于 x 轴的平面,该平面与曲顶柱体相交所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 y 为积分变量,x 在积分过程中视为常数.

由上述分析可知,上述曲顶柱体可看成平行截面面积 $A(x)$ 为已知的立体,由定积分应用可知,所求曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

由此即得二重积分的如下计算公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中积分区域 D 为(1)确定的 X - 型区域. (2)也可写成

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{2'}$$

(2)式右端积分称为累次积分或二次积分. (2)式将计算二重积分的问题化为先对 y、后对 x 的连续两次求定积分的问题. 注意,先对 y 求定积分时,y 是积分变量,x 看作常量,积分上下限是 x 的函数,积分结果将是 x 的函数;在对 x 求定积分时,x 是积分变量,积分上下限均为常数.

类似地,若积分区域 D 为图 10-7 所示的平面区域,则称为 Y - 型区域,即

$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}, \tag{3}$$

当积分区域 D 为 Y - 型区域时,可采用先对 x、后对 y 的积分次序,将二重积分化为累次积分:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

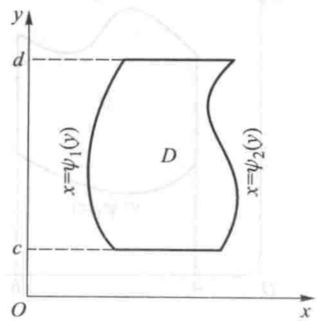

图 10-7 Y - 型区域

公式(2)和(4)是在 $f(x,y)\geqslant 0$ 的条件下得到的,可以证明,对一般的可积函数 $f(x,y)$,这两

个公式仍然成立. 因此,实际使用公式(2)和(4)时,可以不受 $f(x,y)\geqslant 0$ 的限制.

注 (1) 化二重积分为累次积分的关键是确定积分限,而积分限是由积分区域 D 的几何形状决定的. 一般的积分区域由若干条曲线围成,可按照下面的步骤进行:

1) 首先画出 D 的简图;

2) 如果想把区域化为 X-型区域,那么先确定 x 的最大变化范围 $a\leqslant x\leqslant b$;

3) 对每一个 $x_0\in(a,b)$,做直线 $x=x_0$,它与区域 D 的边界至多有两个交点(这一条不满足,转到(5)),上面的交点的 y 坐标是 $y_2=\varphi_2(x_0)$,下面的交点的 y 坐标是 $y_1=\varphi_1(x_0)$;

4) 按照公式(2)将二重积分化为二次积分:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

5) 如果对某些 $x_0\in(a,b)$,直线 $x=x_0$ 与区域 D 的边界多于两个交点,则要将区域 D 进行分割,使分割后的区域的每一块都是标准的 X-型区域;又如果当 x 在 (a,b) 内变化时,区域 D 的上边界曲线或者下边界曲线是 x 的分段函数,那么应该在分段函数的接头处作平行于 y 轴的直线将区域分成几块,使得每一小块适合上面的(2)和(3)的条件. 对每一小块按照步骤(2)、(3)和(4)进行,最后利用积分的可加性,将二重积分化为几个二次积分的和.

6) 当我们想把区域化为 Y-型区域时,可类似处理.

(2) 若 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 为矩形区域,则(2)和(4)化为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x,\tag{5}$$

或者记为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{5'}$$

(3) 如果 D 既是 X-型区域,又是 Y-型区域(如 D 为矩形区域),只要被积函数连续,将二重积分化为两种不同顺序的累次积分,结果是一样的,但实际计算时,不同方法的选取可能影响计算的繁简,甚至决定二重积分能否"积出". 因此,化二重积分为累次积分时,应注意积分次序的选择,必要时可交换积分次序,当然积分限应相应地变化.