21世纪高等学校应用型规划教材

高等数学(下)

Gaodeng Shuxue

主编 张效成 刘克勤 孙凤芝

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校应用型规划教材

高等数学

（下）

主　编　张效成　刘克勤　孙凤芝
副主编　周永卫

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，由多年一线教学经验的教师编写而成，是普通高等院校高等数学教材，全书分上、下两册.本书为下册，内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分和曲面积分，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式，无穷级数，微分方程等内容. 上册包括：函数，极限理论，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用等内容.

本书在某些方面的阐述有自己的特点，旨在帮助读者掌握好基本概念、基本理论和基本方法. 在教学方法上，本书尝试一种所谓模仿练习的学习方法，教学实践经验表明，模仿练习相当于一条途径或是一个抓手，可以比较有效地帮助学生加深对概念、理论和方法的理解，对于独立完成课后习题有一定促进作用.

本书可作为普通高等院校理工科非数学类专业学生的教材，也可以作为自学或准备报考研究生的读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/张效成，刘克勤，孙凤芝主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2013.2

ISBN 978－7－5635－3147－9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… ②刘… ③孙… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 156465 号

书　　名	高等数学(下)
主　　编	张效成　刘克勤　孙凤芝
策 划 人	张保林
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	18
字　　数	377 千字
版　　次	2013 年 2 月第 1 版　2013 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5635－3147－9　　　　**定价：**28.00 元

序

放在我面前的是张效成教授主编的《高等数学》教材，读来觉得颇有新意.这个“新意”，就是该教材关注了知识背景的介绍，关注了数学思想的传授，不仅教给学生必要的知识，而且也注意提高学生的数学素养.

什么是数学素养？一种通俗的说法是：把所学的数学知识都排除或忘掉后，剩下的东西.那么，剩下的东西又是什么呢？举例说，可以是从数学角度看问题的出发点；有条理地思维，严密地思考、求证；简洁、清晰、准确地表达；在解决问题时、总结工作时，逻辑推理的意识和能力；对所从事的工作，合理地量化和简化，周到地运筹帷幄，等等.

“把所学的数学知识都排除或忘掉后”，决不意味着数学知识的学习和掌握是次要的.恰恰相反，为了更好更快地提高自己的数学素养，为了使日后“剩下的东西”更好更多，必须要扎实掌握数学知识.数学思想的接受和数学素养的提高，都必须以足够的数学知识为载体.

那么，学生怎样才能学好数学知识，打好数学基础呢？

我很赞成张效成教授的几点意见：

第一，要有一个良好的心态.学习数学不是仅仅为了应付考试，必须克服急躁、浮躁和急功近利等情绪，沉下心来踏踏实实、循序渐进地学习；学习数学必须克服畏难情绪，要有一股知难而进、迎难而上的精神.

第二，牢牢抓住“三个基本”.所谓三个基本，是指基本概念、基本理论和基本方法.基本概念要清楚，基本理论要掌握，基本方法要熟练；不要盲目追求难度和技巧，而忽视了基本知识的学习.

第三，要摸索适合自己的学习方法.一是适合自己的方法才是好的方法；二是适合自己的方法不是简单地听来的或者制订出来的，要在学习实践中去逐步摸索；三是方法没有最好只有更好，对于不同的学习内容，不同的时间段，方法也要与时俱进.

第四，必须要有科学而有效的训练.既不能搞“题海战术”，更不能“光听不练”或“光看不练”.训练也不仅仅是做题，尝试运用所学数学知识去分析、研究一些实际问题，是一种更值得提倡的训练.

第五，数学学习的一个要点是思维品质的提高.学习数学，特别忌讳仅仅照猫画虎地学解题，一定要注重思考，注重推理，即使是进行计算，也要想想步骤和程序背后的道理.经常地、反复地问自己“为什么”，是提高思维品质的一个有效途径.

在张效成教授主编的这本《高等数学》教材中，就在很大程度上融进了他的上述观点.例

如本书通过正文的讲解,力图使读者准确理解基本概念;通过"模拟练习"等方式,指导读者抓好"三个基本";通过深浅适度的实例,把分析实际问题并建立数学模型的过程展示给读者;通过知识背景的介绍和数学思想的点拨,为学生营造提高思维品质的氛围;……

近年来,作为南开大学数学文化课程组的核心成员,张教授在该课程的建设上做出了宝贵的贡献,同时还努力把数学文化融入他承担的其他数学课程的讲授中,现在,又融入他的这一教材之中.这也是该教材的又一特色.这样,在传授数学知识的同时,又使读者可以自然地领悟到蕴含在那些知识中的数学思想、数学思维、数学观点、数学方法和数学精神.

张效成教授治学严谨,一丝不苟,相信其书如同其人;也祝愿这本教材能受到读者的欢迎与好评.

顾沛

于南开园

2012年3月

前　言

随着我国倡导的优化高等教育结构的推进，高等教育呈现出了多层次的发展需要.不同层次的高等院校需要有不同层次的教材.本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合分层次教学的需要，由多年一线教学经验的教师编写而成.

本书有以下几个特点：

第一，以数学文化的理念指导本书的编写.首届国家级教学名师、南开大学数学科学学院顾沛教授反复强调："数学不仅是一种重要的工具，也是一种思维模式，即'数学方式的理性思维'；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即'数学文化'；数学不仅是一些知识，也是一种素质，即'数学素质'.数学教学要重视对学生数学素养的培养."作为南开大学"数学文化"课程组主要成员的张效成教授，近年来在顾沛教授领导下一直承担着"数学文化"课的主讲工作，对此颇有心得，所以在编写本书时注意从数学文化的高度"统帅"这些数学知识，力图使读者通过知识的学习领悟数学思想、数学思维、数学观点、数学方法以及数学精神.

第二，紧密围绕"三个基本"展开阐述.所谓三个基本，是指基本概念、基本理论和基本方法.数学是几乎所有学科的基础，素有公共基础学科之称；微积分又是全部高等数学的基础，由此可见微积分学的重要性.欲打好微积分学这个基础，关键是要在基本概念、基本理论和基本方法上下功夫.犹如中国的书法，正楷字的功底不牢，行书草书皆无从谈起.为此，本书在编写过程中，对"三个基本"皆从多角度进行阐述，有的还通过辨析，力求帮助读者准确理解和把握这些基本知识.

第三，倡导循序渐进的学习方法.很多学生面对习题感到无从下手，找不着感觉，找不到思路，细究起来，似乎是在听课和做题之间缺少了一个环节.譬如学习画画，老师讲完构图原则及各种技法之后，如果马上就要求学生独立画出一幅作品来，显然有悖常理，因为这当中把临摹这个环节跳过去了.事实上，人的认知总要有一个循序渐进的过程，临摹的过程是理解消化所学知识的过程.因此，本书尝试着设计了若干模仿练习，旨在帮助读者逐步加深对例题解题思路及其方法的理解.

本书共分上、下两册，上册共 6 章，依次是第 1 章函数，第 2 章极限理论，第 3 章导数与微分，第 4 章微分中值定理与导数的应用，第 5 章不定积分和第 6 章定积分及其应用.下册共 7 章，依次是第 7 章空间解析几何与向量代数，第 8 章多元函数微分学，第 9 章重积分，第 10 章曲线积分和曲面积分，第 11 章格林公式、高斯公式和斯托克斯公式，第 12 章无穷级数

和第 13 章微分方程初步. 每章节都配有适量的习题和总习题,书末附有参考答案.

本书由张效成教授、刘克勤副教授、孙凤芝副教授任主编,周永卫任副主编. 全书由张效成教授统稿.

首先感谢南开大学数学科学学院、首届国家级教学名师顾沛教授在繁忙的工作之中为本书作序,这是对本书作者们工作的肯定与鼓励.

特别应当感谢的是北京邮电大学出版社的张保林老师,本书从策划到最后出版倾注了他的全部心血,他既是策划、编辑,又是审核,对于张保林老师一丝不苟的严谨的工作作风、对于他的高度的事业心和敬业精神表示钦佩和深深的谢意.

在本书编写过程中,参考了许多教材、资料与文献,在此一并表示感谢.

感谢在本书编写过程中给了很多帮助的王瑞钢等同志.

本书可作为普通高等院校理工科非数学类专业学生的教材,也可作为自学或准备报考研究生的读者的参考书.

由于编者的水平有限,缺点和不足在所难免,诚恳期望同行专家和广大读者予以批评指正.

编　者

2012 年 9 月于南开园

目　录

第 7 章

空间解析几何与向量代数

在古代，点和数是完全不同的研究对象. 研究点的学问（比如欧几里得(Euclid)几何）与研究数的学问（比如代数方程的求解）之间也没有什么联系. 法国数学家笛卡儿(Descartes)首先在空间设立坐标系，在点与有序实数组之间建立了一一对应，这样就有可能用代数方程表示几何图形；反过来，几何图形也可以表示为代数方程.

用代数方法研究几何问题的学问就是解析几何，向量及其代数运算是解析几何中的重要工具，这些知识称为向量代数.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对今后学习多元函数微积分同样是非常必要的.

7.1 空间直角坐标系和向量代数

7.1.1 空间直角坐标系

在空间中任取一点 O 作为原点，过 O 点引三条互相垂直的空间直线 Ox，Oy 和 Oz 作为数轴，即构成**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$，如图 7.1 所示. 数轴 Ox，Oy，Oz 分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称**坐标轴**. 空间直角坐标系的三个坐标轴依不同的指向可分为右手系与左手系. 若右手拇指指向 z 轴正向，其他四指握拳方向由 x 轴正向转到 y 轴正向，则为右手系. 类似地，用左手握拳可得到左手系. 图 7.1 的坐标系为右手系，今后如无特别说明，均采用右手系.

由坐标轴所决定的互相垂直的三个平面统称坐标面，如由 x 轴和 y 轴所决定的平面称为 xOy 坐标面. 类似地，其他两个平面分别称为 yOz 坐标面和 xOz 坐标面. 三个坐标面把空间分为八部分，每一部分称为一个**卦限**，如图 7.2 所示，依次为第 1 至第 8 卦限，分别用 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示（坐标面是卦限的界面，不算在卦限之内）. 各卦限的规定如下：含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的卦限规定为第 1 卦限，其他第 2、3、4 卦限均在 xOy 坐标

面上方,按逆时针方向确定.第 5 至第 8 卦限均在 xOy 坐标面下方,由第 1 卦限之下的第 5 卦限开始,按逆时针方向确定.

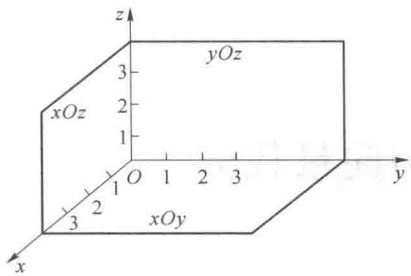

图 7.1 空间直角坐标系

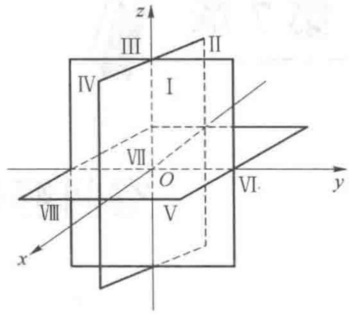

图 7.2 空间直角坐标系的 8 个卦限

在空间直角坐标系中,空间中任一点 M 的位置可由它关于坐标轴的相对位置唯一确定.方法是:过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面,它们与三个坐标轴的交点分别为 P, Q,R,如图 7.3 所示.设 $OP=x$,$OQ=y$,$OR=z$,则三元有序数组 (x,y,z) 被点 M 唯一确定,称有序数组 (x,y,z) 为点 M 的**直角坐标**,记为 $M(x,y,z)$,x,y,z 称为点 M 的三个**坐标分量**.这样,点 M 就与一个有序数组对应起来.反之,任给一个有序数组 (x,y,z),我们便可以分别在三个坐标轴上得到点 P,Q,R,过此三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,三个互相垂直的平面交于一点 M,点 M 就是有序数组 (x,y,z) 所唯一确定的点.这样,在空间直角坐标系下,空间中的点就与一个含有三个数的有序数组一一对应了.

显然,原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$;各坐标轴上点的坐标分量至少有两个分量为 0,如 x 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$;各坐标面上点的坐标至少有一个分量是 0,如 xOy 坐标面上点的坐标是 $(x,y,0)$.

利用点的坐标,我们就可以用代数方法求出空间中两点间的距离.

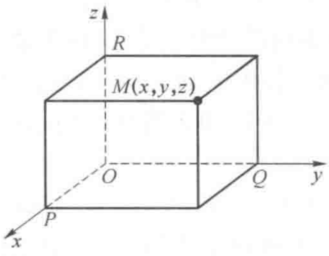

图 7.3 点 M 的坐标

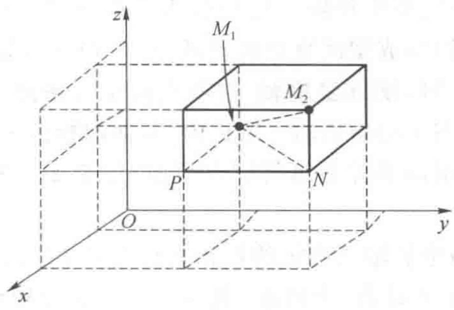

图 7.4 两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点,用 d 表示这两点间的距离,如图 7.4 所示.过点 M_1,M_2 分别作垂直于坐标轴的六个平面,这些平面围成一个以 $\overline{M_1M_2}$ 为顶角线的

长方体. 由立体几何知识知道

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

7.1.2　向量的概念

在实际问题中，有些量只有大小没有方向，例如时间、长度、质量、面积等. 它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示，这种量称为**数量**（或**标量**）. 还有一些量既有大小又有方向，例如力、速度、加速度等，这种既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）.

定义 7.1.1　既有大小又有方向的量，称为**向量**（或**矢量**）.

向量可以用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向. 设其始点和终点分别为 M_1 和 M_2，则该向量记作$\overrightarrow{M_1M}$，如图 7.5 所示. 有时也用黑体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等.

当不考虑向量的起点位置，仅考虑其大小与方向时，称这样的向量为**自由向量**. 今后如无特别声明，我们所讨论的向量均为自由向量. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，即经过平行移动后能完全重合的向量是相等的. 为了方便，我们常把两个或多个向量平移到同一个起点进行研究.

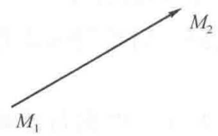

图 7.5　用有向线段表示向量

向量的大小称为向量的**模**，如记号 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$ 分别表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$和 $\boldsymbol{a}$ 的模. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为零的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$，规定零向量的方向是任意的. 在直角坐标系中，以坐标原点 O 为起点，向已知点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$，则称此向量为点 M 对于原点 O 的**向径**（或**矢径**），常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示. 设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**（或**负向量**），记作 $-\boldsymbol{a}$.

7.1.3　向量的线性运算

1. 向量的加法

在力学中，求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力时，常采用平行四边形法则或三角形法则. 对于一般的向量，定义两向量的加法法则如下.

法则 1（平行四边形法则）　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，以 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$为边的平行四边形 $OACB$ 的对角线所对应的向量$\overrightarrow{OC}$（见图 7.6），称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

法则 2（三角形法则）　以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**.

注　向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量相加的情形. 如在图 7.7 中，

$\overrightarrow{OC}$就是三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和向量,即$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

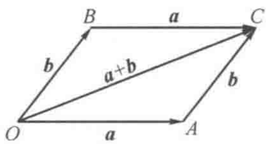

图 7.6　平行四边形法则

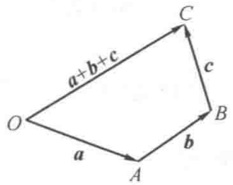

图 7.7　三个向量相加的三角形法则

特别地,对任意向量 $\boldsymbol{a}$,规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

向量的加法满足以下运算律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

2. 向量的减法

我们将向量的减法转化为向量的加法,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

图 7.8 给出了两向量相减的作图法,为了求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,首先把它们移到共同起点,然后从减项向量的终点向被减项向量的终点引一向量,此即所求的差.

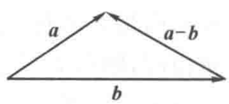

图 7.8　向量减法的作图法

任意两个向量,满足以下三角不等式:

定理 7.1.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,则

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

证　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或它们之中至少有一个为零向量时,则显然有$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,则由三角形两边之和大于第三边得$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. ■

推论 7.1.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

证　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. ■

推论 7.1.2　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,则

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|,$$

证　因为

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$

移项得证. ■

3. 数量与向量的乘法

设 λ 是一个实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积(简称数乘)，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定它为一个向量，满足：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

设 λ,μ 为实数，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，则数乘满足以下运算律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

根据向量数乘的规定，有以下结论：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，其中 λ,μ 是常数；

(2) 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$，则 $|\boldsymbol{e}_a|=1$，且 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 或 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

若一组向量平行于同一条直线(零向量平行于任何直线)，则称它们是**共线的**，这组向量也称为**共线向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在一个实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

7.1.4 向量的坐标表示

在介绍向量的坐标表示之前，我们先介绍向量在轴上的投影.

1. 向量在轴上的投影

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，通过平移，使它们的起点重合，称它们之间的夹角(在 0 与 π 之间)为**向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 向量与轴的夹角就是向量与轴正向所成的角.

已知空间一点 A 和轴 u，过点 A 作轴 u 的垂面 π，则平面 π 与轴 u 的交点 A' 称为点 A 在轴 u 上的投影(见图 7.9).

已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B'(见图 7.10)，设轴 u 的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则轴 u 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的数值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$，轴 u 称为**投影轴**.

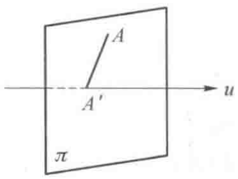

图 7.9 点在轴上的投影

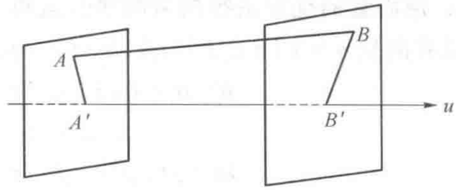

图 7.10 向量在轴上的投影

定理 7.1.2 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模乘以其与轴 u 的夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

(证明略)