WISBOOK®
智慧图书

普通高等教育“十二五”规划辅导教材

高等数学
学习辅导

GAODENG SHUXUE
XUEXI FUDAO

青岛科技大学数学系 编

海洋出版社

普通高等教育“十二五”规划辅导教材

高等数学

学习辅导

青岛科技大学数学系　编

海洋出版社

内 容 简 介

高等数学是理工科院校重要的基础理论课，它不仅是学习后续课程和将来从事理论、实际工作的必要基础，而且对学生各种能力的培养都有着重要的作用。因此，高等数学的教学质量将直接或间接地影响着高质量人才的培养。为了帮助读者在高等数学的基本概念、基础知识、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练，培养学生的空间想像能力、逻辑思维能力和科学表达能力，我们总结多年的教学经验，结合当前高等数学教学改革和学生考研复习的实际需要，根据教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，按照同济大学数学系编写的《高等数学（第六版）》的顺序，在对高等数学课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书，希望能为学习高等数学的读者提供辅导和帮助。

本书可提供本科、专科、高职等全日制大学的学生使用，对考研复习也有较好的参考作用，还可供高校教师做教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导 / 青岛科技大学数学系编. —北京：海洋出版社，2014.7

ISBN 978-7-5027-8573-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①青… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 108562 号

高级策划：李　志
责任编辑：赵　武
责任校对：肖新民
责任印制：赵麟苏
排　　版：海洋计算机图书输出中心　晓阳
出版发行：海洋出版社
地　　址：北京市海淀区大慧寺路 8 号（716 房间）100081
经　　销：新华书店
技术支持：（010）62100052，hyjccb@sina.com

发 行 部：（010）62174379（传真）（010）62132549
（010）68038093（邮购）（010）62100077
网　　址：www.oceanpress.com.cn
承　　印：北京旺都印务有限公司
版　　次：2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：16
字　　数：400 千字
印　　数：1～3000 册
定　　价：32.00 元

前　言

高等数学是理工科院校重要的基础理论课，它不仅是学习后续课程和将来从事理论、实际工作的必要基础，而且对学生各种能力的培养都有着重要的作用。因此，高等数学的教学质量将直接或间接地影响着高质量人才的培养。为了帮助读者在高等数学的基本概念、基础知识、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练，培养学生的空间想像能力、逻辑思维能力和科学表达能力，我们总结多年的教学经验，结合当前高等数学教学改革和学生考研复习的实际需要，根据教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，按照同济大学数学系编写的《高等数学（第六版)》的顺序，在对高等数学课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书，希望能为学习高等数学的读者提供辅导和帮助。本书可提供本科、专科、高职等全日制大学的学生使用，对考研复习也有较好的参考作用，还可供高校教师做教学参考。

本书共 12 章，每章分为“基本要求”、“内容提要”、“典型例题解析”、“同步练习”四个部分。“基本要求”部分简明扼要地给出了本章的教学要求；“内容提要”部分给出了本章的主要内容——基本概念、重要定理和公式等；“典型例题解析”部分精选了各类典型例题，给出了详尽的解答，许多例题还给出了多种解法，并注意比较分析，总结解题方法和技巧；“同步练习”部分配置了一定量的同步练习题，并给出了简明的解答。本书力图把基本理论、基本方法、解题技巧等多方面的教学要求融于典型例题解析之中，通过对典型例题的剖析、解答和论证，帮助读者深化对高等数学概

念和理论的理解，分析解题思路，引导读者思考，重视解决问题的思维过程，提高解题和证题的能力。按上册、下册各配置了三套期末测试卷，并提供了解答可供学生在期末考试前复习测试之用。

本书第 1 章到第 12 章分别由陈宁、张菊芳、孙绍权、彭翠英、张新丽、田保光、曹红妍、梁希泉、赵立宽、李博、王天顺、杨树国编写。另外，段得玉，单正垛、程尊水、张瑞坤、尚云、李秀丽、王苹、王建新、江莉、翟富菊、吕玉华、徐菲、于彬、陈瑞欣、杨延召等老师参加了本书的校对等工作，全书由赵立宽统稿。

本书在编写过程中得到青岛科技大学教务处、数理学院的大力支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免疏漏、错误之处，敬请广大同行专家和读者批评指正。

编　者
于青岛科技大学
2014 年 4 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

基本要求

1. 理解函数的概念与性质（单调性、奇偶性、有界性、周期性）；

2. 掌握分段函数、反函数、复合函数、初等函数的概念，并会求反函数与复合函数；

3. 掌握基本初等函数的性质及其图形；

4. 掌握函数的两要素，会求函数的定义域；

5. 能够建立实际问题中的函数关系；

6. 理解数列极限与函数极限的概念，了解极限的$\varepsilon-N,\varepsilon-\delta$定义；

7. 理解数列极限与函数极限的性质：唯一性、有界性、保号性；

8. 理解左右极限的概念；

9. 掌握极限的四则运算法则、极限存在准则、两个重要极限，并能够运用以上方法求极限；

10. 理解无穷小和无穷大的概念、关系，理解无穷小与函数极限之间的关系；

11. 熟记常用等价无穷小，掌握利用无穷小等价代换求极限方法；

12. 理解函数连续与间断的概念，理解左、右连续的概念；

13. 掌握函数连续性与间断的判别（尤其是分段函数），掌握间断点的分类；

14. 了解连续函数的运算及初等函数的连续性；

15. 掌握闭区间上连续函数的性质：有界性定理、最值定理、介值定理、零点定理，并能用它们解决一般证明问题。

内容提要

一、函数

1. 定义

设x,y是两个变量，D是一个给定的数集，如果对于每一个$x\in D$，变量y按照一定的法则f总有确定的值与之对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$，D称为函数的定义域。

函数的两要素：定义域与对应法则。

2. 函数的特性

(1) 有界性：设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X\subset D$。如果存在正数M，使得$|f(x)|\le M$对任一$x\in X$都成立，那么称函数$f(x)$在X内有界；如果这样的M不存在，那么称函数$f(x)$在X内无界。

(2) 单调性：设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$。如果对于区间I上任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时恒有$f(x_1)<f(x_2)$，那么称$f(x)$在I上是单调增加的；反之，当$x_1<x_2$时恒有

$f(x_1) > f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的。

（3）奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$（$f(-x) = -f(x)$），那么称 $f(x)$ 为偶（奇）函数。

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x \in D$ 都有 $(x \pm l) \in D$ 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们所说的周期指最小正周期.

注　不是任何周期函数都有最小正周期。

---

3. 反函数

设 W 是函数 $y = f(x)$ 的值域，若对于 $\forall y \in W$，总有唯一 $x \in D$，使满足 $f(x) = y$，则 x 是以 y 为自变量的函数，称之为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $y = f^{-1}(x)$，函数与其反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称。

4. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则称函数 $y = f(g(x))$ 为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，其定义域为 D，u 称为中间变量。

5. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称基本初等函数。

6. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合而构成的可以用一个式子表示的函数称初等函数。

二、极限

1. 数列的极限

(1) 定义

若 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$。

(2) 收敛数列的性质

唯一性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一；

有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界；

保号性：如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）。

2. 函数的极限

(1) 定义

$x \to x_0$ 时函数极限的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义。若 $\forall \varepsilon > 0$，存在正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

右极限：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右邻域内有定义。若 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

左极限：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义。若 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。

$x\to\infty$ 时函数极限的定义：设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义。若 $\forall\varepsilon>0$，存在正数 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

类似可得 $x\to+\infty, x\to-\infty$ 时函数极限的定义。

（2）函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{；}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{。}$$

（3）函数极限的性质

唯一性：如果函数极限存在，则这个极限唯一；

局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么一定存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|<M$。

局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

3. 极限的运算法则

（1）设在同一个自变量变化过程中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 极限存在，则：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)\text{；}$$

$$\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)\text{；}$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)\text{。}$$

（2）复合函数的极限：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $\phi(x)\neq a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\phi(x))=A$。

（3）极限存在准则：

单调有界数列必有极限；

夹逼准则：若 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$，特别是，若 $x_n\le y_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$。

（4）两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{；}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\text{；}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\text{。}$$

4. 无穷小与无穷大

（1）定义与关系：在自变量的某一变化过程中，极限为 0 的函数称为此变化过程中的无穷小；极限为∞的函数称为此变化过程中的无穷大；在自变量同一变化过程中，无穷小与无穷大互为倒数（无穷小不等于零时）。

（2）无穷小运算性质：

有限个无穷小的和仍是无穷小；

有界函数与无穷小的乘积也是无穷小；

有限个无穷小的乘积也是无穷小。

（3）无穷小的比较：α和β是自变量同一变化过程中的无穷小，则有：

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，称 β 为 α 的低阶无穷小；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，称 β 与 α 为同阶无穷小；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,k>0$，称 β 为 α 的 k 阶无穷小；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，称 β 与 α 为等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$。

（4）等价无穷小的性质：若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$。

（5）常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时：

$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n},\quad a^x-1\sim x\ln a(a\neq 1)$。

三、连续

1. 定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。

$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件：$f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续。

2. 连续函数的运算

（1）连续函数的和、差、积、商都是连续函数；

（2）连续函数的反函数也是连续函数；

（3）连续函数的复合函数也是连续函数。

结论 基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其定义区间上连续。

3. 闭区间上连续函数的性质：

（1）有界性与最大最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间有界且一定能取得它的最大最小值。

（2）零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=0$。

（3）介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在此区间端点取不同的函数值 $f(a)=A,f(b)=B$，那么对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=C$。

四、间断

1. 定义

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 满足：①在点 x_0 没有定义；②虽在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；③虽在点 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点。

2. 间断点的分类

（1）第一类间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处左右极限都存在；

可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；

跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$。

（2）第二类间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处左右极限中有一个不存在；

无穷间断点： 左右极限中有一个为无穷大；

振荡间断点：左右极限中有一个为振荡型不存在。

典型例题解析

一、函数的概念与特性、反函数、复合函数

例 1 求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$ 的定义域。

分析 （1）求复杂函数的定义域，就是先求出构成这个函数的简单函数的定义域，然后再求它们的交集。

（2）求具体函数的定义域时，要注意以下几点：

① 分式的分母不能为 0；

② 根式中负数不能开偶数次方；

③ 0 和负数不能取对数；

④ 注意三角函数和反三角函数的定义域。

解 要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足：

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\le 1\\ 2x-x^2\ge 0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\le 2x\le 8\\ x(x-2)\le 0\\ 2x-1>0\\ x\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x\le 4\\ 0\le x\le 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1\text{或}1<x\le 2$$

综上，函数定义域为$D=(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$。

例 2 下列各题中，$f(x)$与$g(x)$是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$

（2）$f(x)=\ln\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$，$g(x)=\ln\phi(x)-\ln\psi(x)$

分析 构成函数的两要素是：定义域、对应法则。如果两个函数的定义域相同、对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，即虽然形式不同，但实质上是一个函数，否则就是不同的。

解 （1）相同，因为两个函数定义域都是$(-\infty,+\infty)$，对应法则相同，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$。

（2）$f(x)$的定义域是使$\begin{cases}\phi(x)>0\\ \psi(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}\phi(x)<0\\ \psi(x)<0\end{cases}$成立的$x$的全体，$g(x)$的定义域是使$\begin{cases}\phi(x)>0\\ \psi(x)>0\end{cases}$成立的$x$的全体，所以，当$\begin{cases}\phi(x)<0\\ \psi(x)<0\end{cases}$有解时，$f(x)$与$g(x)$不同；当$\begin{cases}\phi(x)<0\\ \psi(x)<0\end{cases}$无解时，$f(x)$与$g(x)$相同。

例 3 已知$f(x)=\begin{cases}\ln x,x>0\\ x,x\le 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2,x\le 1\\ x^3,x>1\end{cases}$，求复合函数$f(g(x))$。

分析 （1）两个函数能复合的条件：内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空；

（2）两个初等函数复合时，通常采用代入法。

解 方法一（先内后外法）：

$$f(g(x))=\begin{cases}f(x^2),x\le 1\\ f(x^3),x>1\end{cases}=\begin{cases}\left[\begin{cases}\ln x^2,x^2>0\\ x^2,x^2\le 0\end{cases}\right],x\le 1\\ \left[\begin{cases}\ln x^3,x^3>0\\ x^3,x^3\le 0\end{cases}\right],x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2,x^2>0\text{且}x\le 1\\ x^2,x^2\le 0\text{且}x\le 1\\ \ln x^3,x^3>0\text{且}x>1\\ x^3,x^3\le 0\text{且}x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2,x\le 1\text{且}x\ne 0\\ x^2,x=0\\ \ln x^3,x>1\end{cases}$$

方法二（先外后内法）：

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln g(x),g(x)>0\\ g(x),g(x)\le 0\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2,x^2>0\text{且}x\le 1\\ \ln x^3,x^3>0\text{且}x>1\\ x^2,x^2\le 0\text{且}x\le 1\\ x^3,x^3\le 0\text{且}x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2,x\le 1\text{且}x\ne 0\\ x^2,x=0\\ \ln x^3,x>1\end{cases}$$

例 4　设 $y=f(x)=\begin{cases}-x^2, x<-2\\ 2x, \quad x\geq -2\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$。

分析　求反函数的方法一般是由原表达式将自变量反解出来，函数的值域为反函数的定义域。分段函数则需要分段讨论，注意反函数的单调性与直接函数相同。

解　当 $x<-2$ 时，$y=-x^2$，解得 $x=-\sqrt{-y}$，此时 $y<-4$，所以，反函数当 $x<-4$ 时，$f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$；

当 $x\geq -2$ 时，$y=2x$，解得 $x=\dfrac{y}{2}$，此时 $y\geq -4$，所以，反函数当 $x\geq -4$ 时，$f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$；

综上，$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, x<-4\\ \dfrac{x}{2}, \quad x\geq -4\end{cases}$。

例 5　设 $f(x)=e^x+2$，$f(\phi(x))=x^2$，求 $\phi(x)$。

解　由 $f(x)=e^x+2$ 及 $f(\phi(x))=x^2$，得 $f(\phi(x))=e^{\phi(x)}+2=x^2$，

$\Rightarrow e^{\phi(x)}=x^2-2\Rightarrow \phi(x)=\ln(x^2-2), x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。

二、极限的计算与证明

1. 容易混淆的几个极限

例 6　填空：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$（　　）；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$（　　）；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$（　　）；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$（　　）。

分析　对初学者来说，这是极容易混淆的几个极限，（1）、（4）是重要极限，（2）、（3）是无穷小与有界函数的乘积。

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$。

2. 用极限的定义证明极限

例 7　用数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$。

分析　证明的关键是，$\forall\varepsilon>0$，找到正整数 N，使当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 恒成立。

用定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的一般步骤：

（1）将 $|x_n-a|$ 化简或适当放大，得 $|x_n-a|\leq\phi(n)$；

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $\phi(n)<\varepsilon$，由此解出 $n>\psi(\varepsilon)$；

（3）取 $N=[\psi(\varepsilon)]$；

（4）故当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立；

（5）综上所述，根据极限的定义给出结论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

证明 $\forall\varepsilon>0$，欲使$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|<\left|\frac{1}{(2n+1)}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可，故，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，所以，对$\forall\varepsilon>0$，总存在$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，使当$n>N$时，$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$恒成立。

所以，根据数列极限的定义，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$。

例 8 用函数极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to 3}x^2=9$。

分析 证明的关键是，$\forall\varepsilon>0$，找到正数δ，使当$0<|x-3|<\delta$时，$|x^2-9|<\varepsilon$恒成立。

用定义证明极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的一般步骤：

(1) 将$|f(x)-A|$化简或适当放大，得$|f(x)-A|\le\phi(|x-x_0|)$；

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$\phi(|x-x_0|)<\varepsilon$，由此解出$|x-x_0|<\psi(\varepsilon)$；

(3) 取$\delta=\psi(\varepsilon)$；

(4) 故当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立；

(5) 综上所述，根据极限的定义给出结论$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

证明 $\forall\varepsilon>0$，$|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|$，

由于$x\to 3$,不妨取$|x-3|<1$，则此时$|x+3|<7$，

欲使$|x^2-9|<\varepsilon$，只要$|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|<7|x-3|<\varepsilon$，即$|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$，故，取$\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{7})$，所以，对$\forall\varepsilon>0$，总存在$\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{7})$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|x^2-9|<\varepsilon$恒成立。

所以，根据函数极限的定义，有$\lim\limits_{n\to 3}x^2=9$。

3. 利用极限的四则运算法则求极限

例 9 利用函数连续性与极限的运算法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x)}{e^x+2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$； (3) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{2-x}-\frac{6x}{8-x^3})$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)$； (5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$。

分析 对于$\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型、$\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型未定式的极限，可通过因式分解、分子分母有理化、通分、变量代换等方法，消去公因式，再利用函数连续性与极限的运算法则求。对于以上未定式的极限，在学习了导数和微分学的应用后，还可以应用洛必达法则求极限，并且洛必达法则还是求极限的一个很重要且有效的方法。

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x)}{e^x+2}=\frac{\ln(1+\cos 0)}{e^0+2}=\frac{\ln 2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)=3$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{6x}{8-x^3})=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+2x+x^2-6x}{(2-x)(4+2x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(2-x)(4+2x+x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{-(4+2x+x^2)}=0$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}\xlongequal{令u=-x}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2+u+1}+u}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{u}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{u^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}\xlongequal{令1-x=y}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}(1-y)}{\cos\dfrac{\pi}{2}(1-y)}$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cos\dfrac{\pi y}{2}}{\sin\dfrac{\pi y}{2}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}y\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot 1}{\sin\dfrac{\pi}{2}y}=\dfrac{2}{\pi}$。

4. 利用两个重要极限求极限

例 10　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x$。

分析　此类题解题的关键在于构造重要极限的形式，$\lim\limits_{\alpha(x)}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$及$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$。

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax\cdot ax\cdot bx}{\sin bx\cdot ax\cdot bx}=\lim\limits_{ax\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{bx\to 0}\dfrac{bx}{\sin bx}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{2}{x})^{-\frac{x}{2}}]^{-2}=e^{-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x}=e^{2a}$。

5. 利用无穷小量的性质与无穷小等价代换求极限

例 11　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin(2\sqrt[3]{x^2-1})}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x-\sin x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$。

分析　此处无穷小的性质指：有界变量与无穷小的乘积为无穷小；在极限的加、减运算中，高阶无穷小可以舍去；在极限的乘除运算中，等价无穷小可以互换。

解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cos\dfrac{\ln(x+1)+\ln x}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2}\cos\frac{\ln(x+1)x}{2}=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\frac{1}{x}}{2}\cos\frac{\ln(x+1)x}{2}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{1}{2x}\cos\frac{\ln(x+1)x}{2}=0\text{；}$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a^2-x^2)-\ln a^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\frac{x^2}{a^2})}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{a^2}}{x^2}=-\dfrac{1}{a^2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin(2\sqrt[3]{x^2-1})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(\sin x-x)}{x-\sin x}=-1$；

（5）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{x}{2}\cdot2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

6. 利用极限存在的两个准则求极限

例 12 利用夹逼准则求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$。

分析 利用夹逼准则求极限时，应有目的地适当放大、缩小，并保证不等式两端有同一极限。

解 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2+n+1}$，

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2+2n}=\dfrac{1}{2}$；

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

由夹逼准则知,所求极限为$\dfrac{1}{2}$。

例 13 由 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，试证明数列$\{x_n\}$的极限存在并求此极限。

分析 由数列的特点分析，可以采用单调有界数列必有极限这个准则证明极限的存在性，再根据递推公式求极限，通过解方程得到极限值。单调有界准则常用于由递推公式给出的数列，需要验证数列的单调性和有界性，此时，数学归纳法是常用并有效的方法。

解 首先，用数学归纳法证明数列是单调的。

由 $x_1=10,x_2=\sqrt{6+10}=4$,知$x_1>x_2$；

设 $x_k>x_{k+1}$，有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，由数学归纳法得数列$\{x_n\}$是单调减少的，又由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>0$，即数列$\{x_n\}$是单调减少且有下界 0，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在。

设其极限值为 a，则由 ${x_{n+1}}^2=6+x_n$，等式两端令 $n\to+\infty$ 取极限，得 $a^2=6+a$，解之得 $a=3,a=-2$，根据题意，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=3$。

注　只有证明了数列极限存在的情况下，才可用解方程的方法求极限。

7. 某些数列的极限

例 14　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$。

分析　这是无限多项的积或和式的极限，首先应利用各种求和公式或拆项等方法将其化为有限项的和或积，再求极限。

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{8}}\cdots2^{\frac{1}{2^n}})=2^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}})}=2$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$；

（3）利用 $1-\frac{1}{K^2}=\frac{K^2-1}{K^2}=\frac{(K-1)(K+1)}{K\cdot K}(K=1,2,3\cdots n)$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4})\cdots(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$。

8. 利用左右极限讨论分段函数的极限

例 15　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,0\le x\le1\\ x+3,x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$；$\lim\limits_{x\to1}f(x)$；$\lim\limits_{x\to2}f(x)$。

分析　这是分段函数求极限问题，若所求为分段函数的连续点处的极限，应用连续函数求极限法，若所求为分段函数的不连续点或分段点处的极限，应分别求左右极限，根据左右极限判断函数在该点极限是否存在。

解　$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x^2-1)=-\frac{3}{4}$；

$f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+3)=4$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2-1)=0$；

因为 $f(1^+)\ne f(1^-)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+3)=5$。

9. 含待定常数的极限问题

例 16　已知 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x^2+a}{x-2}=b$（$a,b$ 为常数），求 a,b 的值。