运筹与管理科学丛书 21

组合矩阵的结构指数

柳柏濂 黄宇飞 著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助

运筹与管理科学丛书　21

组合矩阵的结构指数

柳柏濂　黄宇飞　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

组合矩阵的指数理论是组合矩阵论的重要课题，它有重要的理论意义和应用价值. 本书用公理化思想和统一的观点，对组合矩阵的各种指数加以整合和系统化，提出了“组合矩阵结构指数”的新概念. 它不仅对近几十年来组合矩阵指数的研究作了最新的总结，涵盖了中国学者包括作者本人的贡献，而且系统地阐述了这一领域的新课题、新方法、新结果，开拓了理论和应用研究的新视野.

本书适合于大学本科生、研究生、工程技术人员和研究人员阅读、参考和作为专业教材.

图书在版编目（CIP）数据

组合矩阵的结构指数/柳柏濂，黄宇飞著. —北京：科学出版社，2014.12
(运筹与管理科学丛书 21)
ISBN 978-7-03-042897-4

Ⅰ. ①组… Ⅱ. ①柳… ②黄… Ⅲ. ①矩阵-组合数学-研究
Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 309604 号

责任编辑：李 欣 胡庆家／责任校对：郑金红
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：17 1/2
字数：350 000

定价：98.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:"运筹帷幄之中, 决胜千里之外."

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于20世纪50年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

序

在组合矩阵论中, 对矩阵结构指数的研究是最重要的内容之一. 由于这一课题在计算机科学、信息科学、社会学以及经济学等领域中都有着广泛的应用背景, 因此近几十年来该课题的研究有了很大的进展, 吸引了国内外许多学者的关注, 产生了很多重要的成果.

我最早喜欢和学习组合矩阵论, 就是从组合矩阵的指数理论开始的, 因为它让我领略到了组合方法在研究代数问题中所能发挥的神奇作用. 例如, 非负矩阵的结构指数中最为经典的本原指数, 本来完全是一个纯代数的概念, 但是传统的代数方法却对它显得无能为力. 只有在运用了组合方法之后, 本原指数问题才得到了漂亮的、彻底的解决. 不由得使人感叹数学之美、组合之妙!

柳柏濂教授是我国著名的组合矩阵论领军人物. 他不仅在组合矩阵论的学术研究中取得了杰出的成就, 而且还撰写和出版了多本专著和教材. 1996 年, 他出版了我国第一本论述组合矩阵论的专著《组合矩阵论》. 该书经多次再版, 于 2005 年被教育部审定为全国研究生推荐教材.

在本书中, 作者以组合矩阵论中的重要课题 —— 组合矩阵的结构指数为切入点, 进行了系统、深入的论述. 本书不仅是几十年来组合矩阵的结构指数研究工作的最新总结, 而且涵盖了中国学者在这一领域的重要贡献, 包括作者在二十多年来连续主持国家自然科学基金项目所获得的优秀成果. 在把研究成果总结成书的过程中, 作者还采用了数学公理化的思想, 用统一的观点把原先独立分散的各类形形色色的不同指数加以整合和系统化, 提出了 "组合矩阵的结构指数" 这一新概念, 并进一步系统阐述了这一领域中的新课题、新方法和新结果, 开拓了指数理论研究的新视野.

我和柳柏濂教授既是学术研究的同行, 又是有着二十多年交情和友谊的好朋友. 我衷心祝贺柳柏濂教授和黄宇飞博士这本著作的出版, 相信本书的出版将会对国内组合矩阵论的科研和教学工作产生极大的推动和促进作用!

邵嘉裕
同济大学数学系
2014 年 8 月于上海

前　　言

人类对数的认识, 从离散到连续, 从一维到二维, 线性方程组的系数将两者结合起来, 把研究的焦点由独立的数转向了关联的数, 于是便诞生了矩阵. 电子计算机的出现, 让人们重新审视了离散数学的重要性. 着眼于矩阵中元素定性 (位置) 而非定量 (数值) 的研究, 如计算机中的 “1” 与 “0”, “Yes” 与 “No”, “有” 与 “无” 等, 我们只需用 (0, 1) 矩阵来刻画. 然而, 世界并不是 “非此即彼” 的, 元素的正、负值的区分产生了符号矩阵, 而正、负元素之和的不确定性又使得广义符号矩阵应运而生. 所有这些矩阵的共同特质, 在于描述位置的模式, 我们将其统称为组合矩阵.

迭代, 是现代数学研究的重要方法之一. 用迭代的思想处理矩阵, 就产生了矩阵的幂序列. 不论是对位置的刻画还是变换的叠加, 矩阵幂序列都彰显出重要的作用. 在元素处于有限集的矩阵无限幂序列中, 必然呈现出有限的相异性和无限的同轨性, 从而开拓了组合矩阵指数理论这一新的课题. 该课题的研究, 除了有矩阵论、概率论、数论、图论和动力系统等的理论意义外, 在应用上也展现出令人眼前一亮的前景：有限自动机的设计、传染病的传播规律、社会分配的公平模型、经济上供需关系的定性估计、非记忆通讯系统的信息传递、互联网中的资料搜索等.

2013 年, 恰好是世界上第一次提出 “组合矩阵论” (H.J. Ryser, 1973 年) 这一数学分支 40 周年. 40 年来, 这个新兴的数学分支, 由于理论的新颖和应用的广泛, 正方兴未艾. 作为 “组合矩阵论” 的核心, 组合矩阵的指数理论也在持续发展, 新概念、新问题、新方法、新成果不断涌现. 本书的作者之一, 在 1996 年曾出版过《组合矩阵论》(柳柏濂, 科学出版社), 这是我国在该领域的第一本专著, 其后虽然多次再版, 并于 2005 年被国家教育部列为研究生推荐教材, 但总觉得对矩阵指数理论的论述尚浅. 特别是面对近 20 年来, 国内外学者的优秀工作层出不穷, 我们有必要把它们作系统化的总结和梳理. 从 20 世纪末至今, 作者连续主持的七项国家自然科学基金项目的成果, 也提供了我们写作的构想. 于是, 花了三年的时间, 我们把完成一本组合矩阵指数理论专著的设想变成了现实.

检索表明, 目前学术界还没有一本这样题材的专著可供借鉴. 如何处理这一具有充分广度和深度的课题及相关文献呢? 我们采用数学公理化的思想, 把组合矩阵的各类指数统一为 $\mathbb{P}$-结构指数, 简称结构指数. 其对于各类矩阵的不同性质 $\mathbb{P}$, 即可导出不同的指数. 而对各类指数的分析表明, 性质 $\mathbb{P}$ 在内涵上呈现出：包含某特殊子阵的 “特征性”、幂矩阵结构变化的 “周期性”、幂序列元素个数的 “极值性”; 在形式上表现出：“存在型” 和 “任意型”、“整体化” 和 “局部化” 等. 内涵和形式

犹如结构指数的“经纬线”, 在组合矩阵的“大平面”上, 交汇出变化多彩的各类结构指数来. 而每一种指数都向我们发出了这样的挑战: 指数上界的估值、指数集的刻画、极矩阵的描述, 以及指数达到某值的矩阵集的探索.

组合矩阵的结构指数, 不仅为我们提供了一个涵盖组合矩阵指数的理论体系, 而且可以引导我们在体系的空白中开始新的探索.

我们希望《组合矩阵的结构指数》的出版, 给有志于组合矩阵论的科研工作者和工程技术人员一本导向性的专著. 本书由柳柏濂教授和黄宇飞博士撰写, 其中全书的框架和第 1、2 章大部分是柳柏濂撰写的撰写, 第 3~6 章大部分是黄宇飞撰写的.

本书的写作, 得到了陈永川院士、邵嘉裕教授和康庆德教授的支持和帮助, 我们表示衷心的感谢! 中国组合数学和图论学会理事长、我国组合矩阵论的带头人邵嘉裕教授欣然为本书撰写序言, 是对我们的一种鼓励和鞭策.

若无国家科学技术学术著作出版基金的大力支持, 本书不可能这样快地呈现在读者面前. 另外, 黄宇飞博士关于本书若干新的成果也得到了国家自然科学基金数学天元基金 (No.11326221) 的支持.

感谢尤利华教授、游志福副教授, 他们为本书的出版做了大量的工作. 柳柏濂教授一如既往地感谢他的夫人莫慧女士, 他俩牵手时间之长已经超过了组合矩阵论的历史. 黄宇飞博士感谢他的爱妻陈思远女士, 并把这本书献给他俩刚刚诞生的女儿黄心柔.

2013 年秋天, 我们重访了美国的 Wisconsin-Madison 大学. 25 年前, 我们这些中国学者正是先后从这里起步, 跟随 R.A. Brualdi 教授从事组合矩阵论的研究. 枫叶红了, 我们的头发也白了. 几十年来, 我们只有一个专业 —— 数学, 只有一个职业 —— 数学教师. 这本书, 是两代数学人的作品, 它宣示着我们对数学的传承和热爱.

柳柏濂
华南师范大学
黄宇飞
广州民航职业技术学院
2014 年 8 月

目　　录

第 1 章　组合矩阵指数理论的发展

组合矩阵论的核心是对矩阵中元素的位置而非数值的研究, 即矩阵的组合性质. 对非负矩阵而言, 我们仅关心其零元的位置分布, 由此产生凸显零位模式的 (0, 1) 矩阵. 对符号矩阵而言, 除了它的零位模式以外, 我们还关心其正、负元的分布, 因而产生了 (0, 1, −1) 矩阵.

由于矩阵运算的引进, 矩阵幂序列的研究成了从静态到动态探索矩阵组合性质的重要课题. 布尔运算使 (0, 1) 矩阵的幂序列衍生出一系列刻画矩阵具有某一组合结构的指数. 而在符号矩阵的幂序列中, 根据不定元素的出现与否, 产生了不可幂和可幂符号矩阵的分类, 推进了符号矩阵指数理论的发展.

组合矩阵指数理论的精髓在于: 描述矩阵幂序列中所呈现的组合结构的规律. 因此, 我们把它们统一为 "组合矩阵的结构指数".

1.1　矩阵及其组合性质

组合矩阵论 (combinatorial matrix theory) 的核心是研究矩阵的组合性质, 即更多地着眼于定性 (即位置) 而非定量 (即数值) 的研究. 而刻画这种以矩阵的位置模式所表现出来的组合性质的最好工具则是有向图. 于是, 矩阵和图成为了数和形相互联系且完美结合的典范.

1.1.1　非负矩阵的组合性质

所有元素全为非负实数的矩阵 A 称为非负矩阵 (nonnegative matrix), 记作 $A \geqslant 0$; 而元素全为正实数的矩阵 A 称为正矩阵 (positive matrix), 记作 $A > 0$.

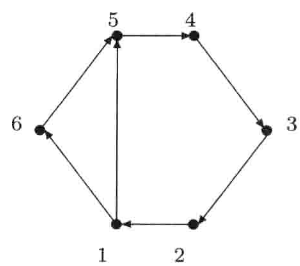
在非负矩阵论的研究中, 矩阵表现出来的组合性质, 仅与矩阵元素分布的零位模式有关, 而与元素数值的大小无关. 因此, 我们可以把非负矩阵转化为 (0, 1) 矩阵来研究. "0" 和 "1" 表示非此即彼的二元状态, 如通和断、是和否、有和无、属于和不属于等. 我们把矩阵元素 "0" 和 "1" 的乘法定义为通常的乘法, 而加法仅仅是 "$1 + 1 = 1$", 有别于通常的加法 (见下表). 于是, 从代数结构的观点来看, 这里的 (0, 1) 矩阵就是熟知的布尔矩阵 (Boolean matrix).

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

一个网络可看作一个有向图 (digraph), 它的边是按箭头方向连通的, 称为弧 (arc). 例如, 图 1.1 描绘了一个网络 (有向图), 记为 D. 我们把从点 i 到点 j 的弧记为 $\overrightarrow{ij}$ 或 $(i,\ j)$, 它也称为点 i 的出弧或点 j 的入弧. 点 i 的出弧的数目称为点 i 的出度 (out-degree), 记为 $d^+(i)$; 而点 i 的入弧的数目称为点 i 的入度 (in-degree), 记为 $d^-(i)$. 特别地, 点 i 到点 i(即起点与终点相同) 的弧称为环 (loop). 如无特别声明, 我们考虑的有向图允许有环但无重弧. 值得说明的是, 图论中所研究的简单图是指无环的无向图[8], 其中无向图可定义为满足条件 "有弧 $(i,\ j)$ 当且仅当有弧 $(j,\ i)$" 的特殊有向图.

我们可把有向图数字化为一个矩阵. n 阶 (即 n 个顶点) 有向图对应于一个 $n \times n$ 阶方阵, 点 i 到点 j 有弧, 对应于矩阵中第 i 行第 j 列的位置有 "1"; 否则, 在该位置为 "0". 于是, 图 1.1 的网络 D 就成了下面的一个 6 阶 (0, 1) 方阵 A, 或记为 $A(D)$.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

图 1.1　D 与 $A(D)$

显然, 这种对应是一一的. 由此, 有向图 D 可以通过数表 (矩阵 A) 存储到计算机中, 或者参与 (0, 1) 矩阵规定的各种运算和变换, 从而导出 D 的各种性质.

一般来说, 对于一个 n 阶 (0, 1) 矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 其可以和一个具有 n 个顶点的有向图 $D = (V,\ E)$ 建立起一一对应关系, 其中 $V = \{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n\}$ 是标号顶点集 (vertices set), E 是弧集 (arcs set), 且

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{存在点 } v_i \text{ 到点 } v_j \text{ 的弧(或记为 } \overrightarrow{v_iv_j}\text{)}, \\ 0, & \text{其余情形}, \end{cases}$$

这里 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. 我们称 A(或记为 $A(D)$) 为有向图 D 的邻接矩阵 (adjacency matrix), 把 D(或记为 $D(A)$) 叫做矩阵 A 的伴随有向图 (associated digraph).

(0, 1) 矩阵 (代数模型) 与有向图 (几何模型) 的一一对应, 实现了图形的数字化, 把图的内在变换转化为矩阵的代数运算; 反之, 这种对应也实现了数据的形象化, 把数表的繁复运算转化为图的直观分析.

如果说, (0, 1) 方阵 $A=(a_{ij})$ 中的某个元 $a_{ij}=1$ 表示在有向图 $D(A)$ 中有从点 v_i 到点 v_j 的弧, 那么, 矩阵幂 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ 中的元 $a_{ij}^{(k)}=1$ 则表示在 $D(A)$ 中有从点 v_i 到点 v_j 长为 k 的有向途径 (directed walk), 简称途径. 这里, 有向途径是指顶点与弧的一个交替序列: $v_0x_1v_1\cdots x_kv_k$, 其中 $v_0\in V$, $v_i\in V$, $x_i\in E$ 且 $x_i=\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$; 这样一条途径的长为 k, 即其中出现弧的数目等于 k. 闭有向途径 (closed directed walk)(简称闭途径) 是起点和终点相同的途径. 所有点都不相同的途径称为有向路 (directed path)(简称路), 而仅起点与终点相同的路称为有向圈 (directed cycle)(简称圈). 有向图中所有顶点之间的最大距离称为直径 (diameter), 最短有向圈的圈长称为围长 (girth), 其中有向图中点 u 到点 v 的距离定义为从点 u 到点 v 的最短有向路的长度. 另外, 对于在本书中出现的有关图论的定义和记号, 还可参考文献 [8].

在本书中, 用 g.c.d.$(x_1,\ \cdots,\ x_q)$ 记正整数 $x_1,\ \cdots,\ x_q$ 的最大公因子 (greatest common divisor), 用 l.c.m.$(x_1,\ \cdots,\ x_q)$ 记它们的最小公倍数 (least common multiple).

为了研究 (0, 1) 方阵的组合性质与幂序列, 我们将遇到一次不定方程的一类非负整数解的存在问题. 设 $q\geqslant 2$, a_i $(i=1,\cdots,q)$ 都是正整数, 且 g.c.d.$(a_1,\cdots,a_q)=1$. 问: 对于 q 元的线性型 $a_1x_1+\cdots+a_qx_q$, 是否存在一个仅与 $a_1,\ \cdots,\ a_q$ 有关的最小整数 $\phi(a_1,\ \cdots,\ a_q)$, 凡不小于 $\phi(a_1,\ \cdots,\ a_q)$ 的整数, 必可表示为 $a_1x_1+\cdots+a_qx_q$ (x_i 是非负整数, $i=1,\ \cdots,\ q$) 的形式? 这个源于 19 世纪的古典问题, 已经得到了肯定的回答. $\phi(a_1,\ \cdots,\ a_q)$ 被称为 Frobenius 数[143], 而求解 $\phi(a_1,\ \cdots,\ a_q)$ 的问题又称为 Frobenius 问题. 目前, 求 $\phi(a_1,\ \cdots,\ a_q)$ 的一般表达式仍是一个未解决的公开问题 (事实上, 部分特殊情形已被解决, 如 $q=2$), 而对其上界的估计也是人们的研究热点.

在矩阵的研究中, 我们最常采用的是相抵变换和相似变换. 下设 A 是一个方阵.

相抵变换: 用可逆方阵 P 和 Q, 使

$$PAQ=I_r\dotplus O,$$

即 r 阶单位方阵与全零方阵的直和. 它的不变量是秩, 不变量全系也是秩.

相似变换: 用可逆方阵 P, 使

$$P^{-1}AP=\text{Jordan 标准型}.$$

它的不变量是秩、特征多项式、特征值、代数和几何重数、初等因子等, 而它的不变量全系是初等因子.

在考虑矩阵的组合性质时, 我们经常要用到两种特殊的变换.

其中一种变换是把矩阵的行和列重新排序, 使矩阵原来的结构特点 (如元素 “0” 和 “1” 的位置) 更显著地表现出来. 从矩阵变换的观点来看, 即对于一个 $m\times n$

阶矩阵 A, 可找一个 m 阶置换方阵 P_1 和 n 阶置换方阵 P_2, 使 A 变成 P_1AP_2. 这是一种相抵变换. 我们又称 A 与 P_1AP_2 置换相抵.

另一种变换通常对方阵 A 而言. 我们往往希望把方阵 A 的行重排, 而列也按照行的重排规律重新排列. 从矩阵变换的观点, 即对一个 n 阶方阵 A, 找一个 n 阶置换方阵 P, 使 A 变成 $P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP$. 这是一种相似变换. 我们又称 A 与 $P^{\mathrm{T}}AP$(即 $P^{-1}AP$) 置换相似. 置换相似是一种保留性质较多的变换. 若两个 (0, 1) 方阵置换相似, 则它们的伴随有向图是同构的.

(0, 1) 矩阵在上述两种熟知的矩阵变换 (置换相似和置换相抵) 下可作分类.

在矩阵的置换相似变换下, (0, 1) 矩阵可以分为两类：可约 (reducible) 矩阵和不可约 (irreducible) 矩阵.

设 A 是一个 $n\ (\geqslant 1)$ 阶 (0, 1) 方阵, 若存在置换方阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & E \end{pmatrix},$$

其中 B 是 $l(1 \leqslant l \leqslant n-1)$ 阶方阵, 右上角是 $l \times (n-l)$ 阶零矩阵, 则 A 称为可约的. 不是可约的方阵称为不可约方阵. 依定义, 每个 1 阶方阵都是不可约的.

用记号 $A[i_1, \cdots, i_k \mid j_1, \cdots, j_l)$ 表示取 A 中第 $i_1, \cdots, i_k$ 行并删去第 $j_1, \cdots, j_l$ 列所组成的 $k \times (n-l)$ 阶子矩阵, 其中 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_l \leqslant n$. 类似地, 我们用 $A(i_1, \cdots, i_k \mid j_1, \cdots, j_l]$, $A[i_1, \cdots, i_k \mid j_1, \cdots, j_l]$, $A(i_1, \cdots, i_k \mid j_1, \cdots, j_l)$ 表示 "取" 或 "删" 某些行、列后所得的子矩阵. 由上述定义, 一个方阵 A 是不可约的等价于不存在 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_l \leqslant n\ (1 \leqslant l \leqslant n-1)$, 使得 $A[i_1, \cdots, i_l \mid i_1, \cdots, i_l) = O$(零子矩阵). 从图论的意义上, A 不可约等价于 $D(A)$ 强连通 (strongly connected), 即对于 $D(A)$ 中任意两个顶点 v_i 和 v_j, 有从点 v_i 出发到点 v_j 的有向路.

一个强连通有向图 D 的所有闭途径其长度的最大公约数, 称为 D 的回路性指标, 记为 $\alpha(D)$. 注意到任一闭途径之长又是若干个圈 (又称初等回路) 的长度之和. 因此, D 的回路性指标也可以等价定义为 D 中所有圈长的最大公约数.

进一步地, 对于不可约 (0, 1) 方阵 A, 若存在正整数 k, 使得 $A^k > 0$, 则称 A 是本原方阵, 否则称 A 为非本原不可约阵. 判定本原矩阵有如下充要条件.

定理 1.1.1.1[143] 一个 (0, 1) 方阵 A 是本原矩阵当且仅当 $D(A)$ 是强连通的, 且 $D(A)$ 的回路性指标 α 等于 1.

证明 (必要性) 根据本原矩阵的定义, A 是本原的, 则 A 必然是不可约的, 即 $D(A)$ 是强连通的; 并且存在正整数 k, 使得 $A^k > 0$, 又由其强连通性知 A 中无零行且无零列, 自然也有 $A^{k+1} > 0$, 这等价于 $D(A)$ 中的所有点对之间, 存在长为 k 和 $k+1$ 的途径. 记 $D(A)$ 的所有不同圈长的集合为 $\{r_1, \cdots, r_\lambda\}$. 那么, $D(A)$

中任一点 v 出发又回到点 v 的闭途径的长度必是若干圈长之和, 从而必为公因子 g.c.d.$(r_1, \cdots, r_\lambda)$ 的倍数. 结合上述分析知, k 和 $k+1$ 都是 g.c.d.$(r_1, \cdots, r_\lambda)$ 的倍数, 因此 g.c.d.$(r_1, \cdots, r_\lambda) = \alpha = 1$.

(充分性) 由于 $D(A)$ 是强连通的, 故 A 是不可约的. 因为 $D(A)$ 的回路性指标 $\alpha = 1$, 即所有圈长的最大公约数 g.c.d.$(r_1, \cdots, r_\lambda) = 1$, 所以 Frobenius 数 $\phi(r_1, \cdots, r_\lambda)$ 存在. 对于任意点 $u, v \in V(D(A))$, 由 $D(A)$ 的强连通性知, 存在点 u 到点 v 的经过 $V(D(A))$ 中所有点的途径 $W_{u, v}$, 记其长度为 $d_{u, v}$. 令

$$k = \max_{u, v \in V(D(A))} d_{u, v} + \phi(r_1, \cdots, r_\lambda).$$

对于 $D(A)$ 中任意两点 i, j (点 i 和点 j 可以相同), 有

$$k \geqslant d_{i, j} + \phi(r_1, \cdots, r_\lambda),$$

因此 k 可表为 $d_{i, j} + t_{i, j}$, 其中整数 $t_{i, j} \geqslant \phi(r_1, \cdots, r_\lambda)$, 且由 Frobenius 数的定义知: $t_{i, j}$ 是 $D(A)$ 中若干个圈长的非负整数系数线性组合. 又因为 $W_{i, j}$ 经过 $D(A)$ 中所有顶点, 所以在 $D(A)$ 中有从点 i 到点 j 长为 $k = d_{i, j} + t_{i, j}$ 的途径 (在途径 $W_{i, j}$ 的基础上添加若干个圈), 于是 $A^k > 0$. 综上, A 是本原矩阵. □

对于非本原不可约的 (0, 1) 方阵则有如下的刻画.

定理 1.1.1.2[143] 设 A 是一个不可约的 (0, 1) 方阵. 若 $D(A)$ 的回路性指标 $\alpha > 1$, 则 A 可置换相似于如下的分块形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{\alpha-1} \\ A_\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其对角线上诸零子块均为非空方阵, 且 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, \alpha)$ 均无零行和零列, $\prod_{i=1}^{\alpha} A_i$ 是本原方阵.

证明 设 $V(D(A)) = V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, 并记 $D(A)$ 中所有通过顶点 v_i 的闭途径之长的最大公约数为 $\alpha_i\ (i = 1, \cdots, n)$. 首先, 我们证明如下三个性质.

(1) $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$.

任取 $v_i \in V$, 设过点 v_i 的闭途径也经过点 v_j, 不妨设点 v_i 到点 v_j 的途径长为 s, 而点 v_j 到点 v_i 的途径长为 t, 则此闭途径的长为 $s + t$. 又若考虑过点 v_j 的一个闭途径, 设其长度为 h_j, 则又有过点 v_i 长为 $s + t + h_j$ 的闭途径. 依 α_i 的定义知 $\alpha_i \mid h_j$. 因为 h_j 看作过点 v_j 任一闭途径之长, 所以 $\alpha_i \mid \alpha_j$. 又由 $D(A)$

的强连通性, 点 v_j 可取作 $D(A)$ 中的任一点, 于是有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha'$. 显然 $\alpha \mid \alpha'$. 反之, 易见 α' 必整除 $D(A)$ 中任一组圈长的最大公约数, 故 $\alpha' \mid \alpha$, 因此 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha' = \alpha$.

(2) 任给两点 $v_i, v_j \in V$, 从点 v_i 到点 v_j 的所有途径之长模 α 同余.

设 P_1, P_2 分别是从点 v_i 到点 v_j 的两条途径, 它们的长度分别是 l_1, l_2. 又设点 v_j 到点 v_i 的一条途径长为 m, 则过点 v_i 和 v_j 有两条闭途径, 其长度分别是 l_1+m 和 l_2+m. 由上述结论 (1) 的证明有 $l_1+m \equiv l_2+m \pmod{\alpha}$, 于是

$$l_1 \equiv l_2 \pmod{\alpha}.$$

(3) 可将点集 V 划分为 α 部分: $V = V_1 \cup \cdots \cup V_\alpha$, 使得 $D(A)$ 中任一起点在 V_i, 终点在 V_j 的途径之长 $l \equiv j-i \pmod{\alpha}$.

对于 $i = 1, \cdots, \alpha$, 定义点子集

$$V_i = \{v_j \in V \mid \text{从点 } v_1 \text{ 到点 } v_j \text{ 的所有途径之长 } l_i \equiv i \pmod{\alpha}\},$$

易见, $V = V_1 \cup \cdots \cup V_\alpha$. 任取 $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, 记点 v_i 到点 v_j 的一条途径之长为 l. 由点子集的划分定义, 点 v_1 到点 v_i 的一条途径长为 $l_i \equiv i \pmod{\alpha}$, 则点 v_1 到点 v_j 的一条途径长为 $l_i + l = l_j \equiv j \pmod{\alpha}$, 从而导出 $l \equiv j - i \pmod{\alpha}$.

下面我们来证明定理结论.

现把 V 作如上述结论 (3) 的划分 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_\alpha$, 那么, 在 $D(A)$ 中的任一以 $v_i \in V_i$ 为起点的弧, 其终点必在 V_{i+1} 上 (即取 $l=1$, 且记 $V_{\alpha+1} = V_1$). 把 $D(A)$ 的顶点标号重新排列 (置换相似于 A) 使得 V_i 中点在 V_{i+1} 的点前面 ($i = 1, \cdots, \alpha-1$), 则相应的矩阵形式 $P^{\mathrm{T}}AP$(这里 P 是置换方阵) 必有如式 (1.1) 所示. 注意到 A 是不可约方阵, 故 A 无零行和零列, 即 A_i ($i = 1, 2, \cdots, \alpha$) 均无零行和零列.

余下只需证明 $\prod\limits_{i=1}^{\alpha} A_i$ 是本原方阵.

由 A 的置换相似分块形式 (1.1) 可知, $\prod\limits_{i=1}^{\alpha} A_i$ 是方阵. 设 $\{r_1, \cdots, r_\lambda\}$ 是 $D(A)$ 中所有不同圈长的集合. 因 $\alpha = \mathrm{g.c.d.}(r_1, \cdots, r_\lambda)$, 即 $\mathrm{g.c.d.}\left(\dfrac{r_1}{\alpha}, \cdots, \dfrac{r_\lambda}{\alpha}\right) = 1$. 根据 Frobenius 数的定义, 对任意整数 $k \geqslant \phi\left(\dfrac{r_1}{\alpha}, \cdots, \dfrac{r_\lambda}{\alpha}\right)$, k 可表为 $\dfrac{r_1}{\alpha}, \cdots, \dfrac{r_\lambda}{\alpha}$ 的非负整数线性组合, 从而 $k\alpha$ 亦可表为 $r_1, \cdots, r_\lambda$ 的非负整数线性组合.

任取点 $v_1, v_2 \in V_1$, 由 $D(A)$ 的强连通性, 有点 v_1 到点 v_2 且经过 V 中所有点的途径 W_{v_1, v_2}, 记其长度为 d_{v_1, v_2}, 结合上述划分的定义知, $d_{v_1, v_2} \equiv 0 \pmod{\alpha}$. 令

$$t = \max_{v_1, v_2 \in V_1} \frac{d_{v_1, v_2}}{\alpha} + \phi\left(\frac{r_1}{\alpha}, \cdots, \frac{r_\lambda}{\alpha}\right),$$

易见, t 是整数. 对于 V_1 中任意两点 i, j (点 i 和点 j 可以相同), t 可表为

$$t=\frac{d_{i,\ j}}{\alpha}+t_{i,\ j},$$

这里 $t_{i,\ j}\geqslant\phi\left(\frac{r_1}{\alpha},\ \cdots,\ \frac{r_\lambda}{\alpha}\right)$. 从而, $t\alpha=d_{i,\ j}+t_{i,\ j}\cdot\alpha$. 由上面已证得, $t_{i,\ j}\cdot\alpha$ 可表为 r_1, $\cdots$, r_λ 的非负整数线性组合. 又因为 $W_{i,\ j}$ 经过 $D(A)$ 中的所有顶点, 故添加任意个圈于 $W_{i,\ j}$ 上, 仍是点 i 到点 j 的一条途径, 所以在 $D(A)$ 中有从点 i 到点 j 长为 $t\alpha=d_{i,\ j}+t_{i,\ j}\cdot\alpha$ 的途径. 注意到点 i, j 在 V_1 中的任意性且整数 t 与它们无关, 可推出 $(P^{\mathrm{T}}AP)^{t\alpha}$ 的左上角子块均为正元素. 结合 $P^{\mathrm{T}}AP$ 的形式 (见 (1.1)), 故 $(P^{\mathrm{T}}AP)^{\alpha}$ 的左上角子块是 $\prod\limits_{i=1}^{\alpha}A_i$, 因此 $(P^{\mathrm{T}}AP)^{t\alpha}$ 的左上角子块 $\left(\prod\limits_{i=1}^{\alpha}A_i\right)^t>0$, 即 $\prod\limits_{i=1}^{\alpha}A_i$ 是本原方阵. □

在定理 1.1.1.2 中, 若记

$$B_j=\prod_{i\equiv j\pmod{\alpha}}^{\alpha+j-1}A_i,$$

其中 $j=1$, $\cdots$, α. 我们已证明 B_1 是本原方阵, 事实上, 我们还可类似地证明 B_j ($j=1$, $\cdots$, α) 都是本原方阵. 另外, 定理 1.1.1.2 的逆定理同样是正确的.

定理 1.1.1.3(定理 1.1.1.2 之逆) [143] 若 n 阶 (0, 1) 方阵 A 置换相似于式 (1.1) 的分块形式, 对角线上诸零子块均为非空方阵, A_i ($i=1$, $\cdots$, α) 均无零行和零列, 且 $\prod\limits_{i=1}^{\alpha}A_i$ 是本原矩阵, 则 A 是一个具有回路性指标为 α 的非本原不可约矩阵.

在矩阵的置换相抵变换下, (0, 1) 矩阵又可以分为部分可分 (decomposable) 矩阵和完全不可分 (fully indecomposable) 矩阵.

对于 n (>1) 阶的 (0, 1) 方阵 A, 若有置换方阵 P 和 Q 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}B&0\\C&E\end{pmatrix},$$

其中 B 和 E 都是非空 (即阶数为正) 的方阵, 则 A 称为部分可分的. 不是部分可分的方阵 A 称为完全不可分的. 特别地, 1 阶方阵 (0) 是部分可分的, 方阵 (1) 则是完全不可分的.

完全不可分方阵还有一等价定义: 对于满足 $1\leqslant l<n$ 的任意整数 l, A 不含有 $l\times(n-l)$ 阶的零子矩阵. 从图论的观点, A 是完全不可分的等价于对 $D(A)$ 中