经济管理类教材

高等代数（第二版）

刘丽 编著

JINGJI GUANLILEI JIAOCAI

GAODENG DAISHU

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

经济管理类教材

高等代数

（第二版）

刘丽 编著

JINGJI GUANLILEI JIAOCAI

GAODENG DAISHU

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/刘丽编著．—2 版．—成都：西南财经大学出版社，2014.12
ISBN 978-7-5504-1756-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①高等代数—高等学校—教材　Ⅳ．①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 300977 号

高等代数(第二版)

刘　丽　编著

责任编辑：王正好
助理编辑：廖术涵
封面设计：穆志坚
责任印制：封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	20.75
字　　数	390 千字
版　　次	2014 年 12 月第 2 版
印　　次	2014 年 12 月第 1 次印刷
印　　数	1— 3000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-1756-4
定　　价	39.00 元

第二版前言

本书自出版以来，得到了广大读者和教师的肯定，同时在使用中也发现了一些问题和错误，特别是西南财经大学代数课程组的教师对本书提出了很多宝贵意见，在此对广大读者和教师表示衷心感谢。这次再版，对在书中发现的问题作了修改，对错误作了勘误。但是书中难免还有不当之处和错误，欢迎大家继续关心本书，并提出宝贵意见。

刘丽

2014 年 9 月

前　　言

本书是根据西南财经大学经济管理类专业高等代数教学大纲并结合编者多年的代数课程教学体会编写而成的。本书可供经济管理类专业本科高等代数或线性代数课程教材使用，还可作为其他专业和工科类高等代数或线性代数课程教材使用，亦可作为经济数学专业高等代数课程教材。本书较之一般经济管理类的线性代数教材在内容上增加了多项式、线性空间的同构、欧氏空间、线性变换、线性变换的像集与核、线性变换的矩阵、正交变换、线性变换的特征值与特征向量等内容，它们是学好经济管理类专业后续课程所需要的，其他专业使用本书时，教师可根据实际情况对这些内容作适当的取舍。

要学好代数课程，做习题是一个重要的环节。本书在各节后均配有相应的习题，这是学习各节后必须掌握的基本题；在各章后还配有 A、B 两组习题，A 组题是填空与单项选择题，B 组题是综合练习题，以供读者学完各章后进行练习。

本书在写作过程中得到了西南财经大学经济数学学院领导的大力支持，经济数学学院高雪梅老师对本书作了认真细致的校对，在此对他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免，真诚希望同行和读者批评指正。

编者

2010 年 6 月

目　录

第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具. 它广泛应用于理、工、农、医、经济等很多领域. 在线性代数中，行列式更是一个不可或缺的重要工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算及其在求解线性方程组中的应用——Cramer（克莱姆）法则.

1.1　行列式定义

1.1.1　数域

定义 1.1　设 P 是含有 0 和 1 的一个数集，若 P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为 0）仍在 P 中，则称 P 为一个**数域**.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算后的结果仍在 P 中，则称 P 对这个运算封闭. 因此数域的定义也可简单叙述为：含有 0 和 1 且对加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）封闭的数集称为数域. 全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域，分别称为有理数域、实数域、复数域，依次用 Q、R、C 来记. 全体整数组成的集合不是数域，因为任意两个整数的商不一定是整数.

要指出的是所有的数域都包含有理数域. 这是因为如果 P 是一个数域，则 1 在 P 中且由于 P 对加法封闭，所以 $1+1=2$，$2+1=3$，…，$n+1$ 全在 P 中，即 P 包含全体自然数；又因 0 在 P 中且 P 对减法封闭，于是 $0-n=-n$ 在 P 中，所以 P 包含全体整数；因为任意一个有理数都可表为两个整数的商，再由 P 对除法的封闭性知：P 包含全体有理数。即任何一个数域都包含有理数域.

今后本书中所论及的数都是指某一固定数域中的数，书中一般不再特别加以

说明.

1.1.2 排列

为了给出 n 阶行列式的定义，先介绍 n 级排列的概念.

定义 1.2 由自然数 1，2，…，n 组成的全排列称为 n 级排列. 记作

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

n 级排列共有 $n!$ 个.

n 级排列中任意两个数，如果大数排在小数之前，则称这两个数构成一个**逆序**，否则称为**顺序**. 一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序总数称为此排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**. 因 $\tau(12\cdots n)=0$，所以排列 $12\cdots n$ 是偶排列。我们称此排列为自然排列.

在计算排列的逆序数时，为了不重复和漏掉，可从排列的第一个数开始计算它与后面的数构成的逆序数，然后再将这些数的逆序数相加即可得排列的逆序数.

例 1 求下列排列的逆序数并确定其奇偶性.

（1）54213　　（2）14253

（3）$n(n-1)\cdots 321$　　（4）$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解 （1）在排列 54213 中，数 5 与后面的数构成 4 个逆序，数 4 与后面的数构成 3 个逆序，数 2 与后面的数构成 1 个逆序，数 1 与后面的数没有构成逆序，数 3 后面没有数. 因此 $\tau(54213)=4+3+1+0+0=8$，该排列为偶排列.

（2）$\tau(14253)=0+2+0+1+0=3$，该排列为奇排列.

（3）$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

也可根据该排列中任何两个数组成的数对都构成逆序，计算出该排列所以可能组成的数对的个数，它就是排列的逆序数，即

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k(k=1,2,\cdots)$ 或 $n=4k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3(k=0,1,2\cdots)$ 时此排列为奇排列.

（4）$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

其奇偶性讨论同（3）中排列的奇偶性讨论.

n 级排列中互换两数的位置称为一次**对换**. 若互换的是相邻两数，则称作**相邻对换**.

注意到例 1 中排列（2）是由排列（1）互换 5 和 1 而得到的. 结果（1）与

(2) 两个排列具有不同的奇偶性. 一次对换是否一定改变排列的奇偶性呢? 对此有以下的结论:

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 (1) 相邻对换情形.

设 n 级排列

$$\cdots jk \cdots$$

互换 j, k 两数，经相邻对换后排列变成

$$\cdots kj \cdots$$

其中"…"表示那些在变换中不动的数.

显然，这一变化只使 j, k 两数间的"序"发生变化: 若它们原来为逆序，则变换后为顺序; 若原来为顺序，则变换后为逆序. 而它们与其余任意数间的序都保持不变. 变换前后两个排列的逆序数只是多1或少1. 从而相邻一次对换改变排列的奇偶性. 由此还可得出: 作奇数次相邻对换改变排列的奇偶性; 作偶数次相邻对换不改变排列的奇偶性.

(2) 不相邻对换情形.

设 n 级排列

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

直接互换 j, k 两数后排列变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这一结果可通过相邻对换后得到. 首先将原排列中的数 j 依次与其后的 $i_1 \cdots i_s\, k$ 作 $s+1$ 次相邻对换后变为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s\, kj \cdots$$

再将数 k 依次与其前面的 $i_s \cdots i_1$ 作 s 次相邻对换后得

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

这一结果是经过奇数次 ($2s+1$ 次) 相邻对换所得，因此排列的奇偶性改变.

推论 在全部 ($n!$ 个) n 级排列中 ($n \geqslant 2$), 奇排列、偶排列各占一半.

证 设全部 n 级排列中，奇排列、偶排列个数分别为 s 和 t. 因为将每个奇排列的前两个数作对换，即可得到 s 个不同的偶排列，从而 $s \leqslant t$; 同理可得 $t \leqslant s$. 于是 $s=t$, 即奇、偶排列各占一半.

容易证明 (证略): 任意 n 级排列都可经有限次对换变成自然排列.

1.1.3 n 阶行列式定义

定义 1.3 将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有位于不同行及不同列的 n 个元素的乘积的代数和，当这 n 个元素的行标按自然排列时，各项以列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的奇偶性按下式冠以符号

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

即列标排列为偶排列时带正号，列标排列为奇排列时带负号. 称 D 为 n 阶行列式. 于是 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.1)$$

其中，符号“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对全部 n 级排列求和.

由于全部 n 级排列共 $n!$ 个，所以 n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 个项.

当行列式的元素全是数域 P 中的数时，行列式的值也是数域 P 中的数.

当 $n=1$ 时，1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$. 为了不与绝对值混淆，今后直接用数表示.

当 $n=2$ 时，2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称行列式从左上角至右下角的对角线为**主对角线**，从右上角至左下角的对角线为**副对角线或次对角线**.

2 阶行列式的展开式等于主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积.

当 $n=3$ 时，3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+$$

$$(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

例 2 在 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中是否有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{42}$ 与 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 这两项？如果有，应带什么符号？

解 这两个乘积的元素的行标都构成自然排列，于是只需看列标的排列. 因 2412 不是 1，2，3，4 的 4 级排列，即 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{42}$ 不是 D 的位于不同行不同列的 4 个元素的乘积，所以 4 阶行列式中没有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{42}$ 这一项；$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 的列标 2413 是 1，2，3，4 的 4 级排列，所以 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 是 D 的位于不同行不同列的 4 个元素的乘积，因此 4 阶行列式中有 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ 这一项. 由于 $(-1)^{\tau(2413)}=-1$，所以这一项带负号.

例 3 计算下列行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\qquad (2)\ D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 因为求和时只需找出非零项，于是，我们只需找出行列式展开式中的可能非零的项.

解 （1）D 的可能的非零项在第一行中的元只能取 a_{11}，在第二行中的元只能取 a_{22}，…，在第 n 行中的元只能取 a_{nn}. 于是行列式（1）的可能的非零项只有 1 项：$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，从而

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）类似于（1）的解法，找出行列式展开式的可能不为零的项. 这样的项在第一行中的元只能取 a_{1n}，而在第二行中的元只能取 $a_{2,n-1}$，…，在第 n 行中的元只能取 a_{n1}. 于是行列式（2）的可能的非零项只有 1 项：$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，从而得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n\overline{n-1}\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

称主对角线以上的元全为零元的行列式为**下三角行列式**. 主对角线以下的元全为零元的行列式为**上三角行列式**. 上、下三角行列式统称为**三角行列式**.

例 3（1）的结果表明：下三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

最后，我们给出 n 阶行列式的另一定义：

定义 1.4

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad (1.2)$$

可以证明行列式的两个定义等价.

习题 1.1

1. 求以下排列的逆序数，并指出排列的奇偶性：

（1）23157846

（2）528497631

（3）$24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$

（4）$24\cdots(2n)(2n-1)(2n-3)\cdots 31$

2. 确定 i，j，使下面的 8 级排列为奇排列：

（1）$62i418j3$　　　　（2）$4i13j765$

3. 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数为 k，求排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数.

4. 确定 i，j

（1）使 $a_{13}a_{29}a_{37}a_{42}a_{5i}a_{61}a_{75}a_{8j}a_{94}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带正号的项；

（2）使 $a_{12}a_{21}a_{3i}a_{43}a_{57}a_{68}a_{7j}a_{84}a_{96}$ 为 9 阶行列式 $|a_{ij}|$ 带负号的项.

5. 计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$　　　　（2）$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 8 & 5 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

1.2　行列式的性质

一个 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项. 当 n 较大时，用定义计算行列式很繁琐且相当困难. 因此还须寻求行列式的其他计算方法. 本节讨论行列式的性质，并利用行列式的性质计算行列式.

设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将 D 中的行、列依次互换后所成的行列式称为 D 的**转置行列式**. 记作 D^T. 即

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　$D^T=D$.

证　设

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{记作}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$b_{ij}=a_{ji} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

由 1.1 式

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= D \end{aligned}$$

根据性质 1，行列式有关行的性质对列亦成立.

由于上三角行列式 D 的转置行列式 D^T 恰是下三角行列式，因 $D=D^T$，于是上、下三角行列式都等于其主对角线上元素的乘积.

性质 2 互换行列式中两行（列）的位置，行列式反号.

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 的第 s 行与第 t 行（$1\leqslant s<t\leqslant n$）互换（记为 $r_s\leftrightarrow r_t$，若互换两列，则只需将 r 换为 c）得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\text{记作}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则有 $b_{sj}=a_{tj}$，$b_{tj}=a_{sj}$，$b_{ij}=a_{ij}$（$i\neq s$，t；$j=1$，2，$\cdots$，n）.

由 1.1 式

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$
$$= -\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$
$$= -D$$

推论 有两行（列）相同的行列式等于零.

证明 设行列式 D 中有两行相同，互换 D 中这相同的两行，得 $D=-D$，从而 $D=0$.

性质3 行列式中某行（列）的公因子可以提到行列式外面来. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由 1.1 式

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = kD_1$$

推论1 有一行元素（列）全为零的行列式等于零.

推论2 有两行元素（列）成比例的行列式等于零.

性质4 若行列式 D 中某行的每个元素都是两数之和，则 D 可拆分成两个行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$