QUANJIE GAOKAO SHUXUE YAZHOUTI

全解高考数学压轴题

张传鹏 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全解高考数学压轴题

张传鹏　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全解高考数学压轴题 / 张传鹏编著. —杭州：浙江大学出版社，2014.4
ISBN 978-7-308-13065-3

Ⅰ.①全…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料　Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 064206 号

全解高考数学压轴题
张传鹏　**编　著**

责任编辑　夏晓冬
封面设计　杭州林智广告有限公司
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14.25
字　　数　356 千
版 印 次　2014 年 4 月第 1 版　2014 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-13065-3
定　　价　30.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：0571—88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

编写说明

高考数学压轴题是通过高考考查学生能力的主要表现形式，通过对近年高考数学压轴题研究来看，压轴题主要考查考生对高中数学各块知识的运算变形能力、信息整合能力、数学思维方法运用能力及创新思维能力等，这就导致了高考数学压轴题的综合性和探索性很强，考查的知识面广。为了使高考复习更有针对性、科学性和高效性，我认真编写了此书，旨在帮助广大考生在复习时起到事半功倍、触类旁通的效果。

本书大多数内容是近年在杭州外国语学校高三课堂实践的基础上发展与完善的，本书分为高考数学压轴题常见模型与高考数学压轴题破解策略两部分，共15章。对于出现频率较高的热点试题进行分类总结，注重数学各知识点间的联系，做到透析考情考向、提升解题技能，拓宽解题思路。并在每个章节后面设置了"学以致用"部分，供学生举一反三练习，巩固该知识点。

本书所选试题都是全国各地历年高考试卷或者各地模拟试卷中的一些好的压轴题，当然也选取了一些相当于高考难度的各地数学竞赛试题，这些试题非常具有代表性。本书在解答过程中，注意一题多解、一题多变。使学生不仅知其然，而且知其所以然。解题方法新颖、有效，在给出常规解法的基础上都会去寻找更好的解题方法。方法大气，不追求小技巧，注重通性、通法，不刻意追求巧解、妙解。本书不仅仅对学生是解题方法上的引导与能力的培养，同时也是一种文化的熏陶，素质的培养。

本书是一本非常有效的学生高考备考指南，可以供理科学生和程度较好的文科学生使用，同时也可以作为教师备课的参考工具书。本书是编撰人员精心设计、用心编写而成的，但限于能力和水平，编写中难免有疏漏和不妥之处，恳请广大读者和数学同行批评指正，以便不断修正和完善，在此表示衷心的感谢！我的联系方式是：zhangzcp508@sina.com.

张传鹏

2014年3月于杭州外国语学校

目　录

一、压轴题的基本模型

二、压轴题的破解策略

第 1 讲　涉及高次函数的基本性质问题

高次函数是指三次函数及三次以上的多项式函数，在高考和一些重大考试中频繁出现有关它的命题. 近年来，高考中有关导数知识的题目，很多是以高次函数为载体来考查导数知识应用的. 从这些题目来看，考查的切入点大多还是以导数的几何意义、极值、最值、单调性等，通过不等式恒成立等问题的形式，进一步考查数形结合、分类讨论等数学思想. 同学们有必要熟练掌握高次函数的图象及相关性质，从而能够熟练、条理清晰地解决高次函数问题.

一、有关高次函数单调性、极值问题

单调性是函数一个重要的性质，函数的极值、最值等问题的解决都离不开函数的单调性，含有字母参数的函数的单调性又是综合考查不等式的解法、分类讨论的良好素材，所以函数单调性的讨论是高考考查导数研究函数问题的最重要的考查点. 函数单调性的讨论往往归结为对一个一元二次不等式的讨论，在二次项系数的符号确定后就是根据其对应的一元二次方程两个实根的大小进行讨论，即分类讨论的标准是先讨论二次项系数，再讨论根的大小.

三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$，求导得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c(a>0)$，导函数的判别式化简为：$\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$，

(1)若 $b^2-3ac\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；$f(x)$ 在 R 上无极值.

(2)若 $b^2-3ac>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上为增函数，$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上为减函数，其中 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. $f(x)$ 在 R 上有两个极值；且 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值.

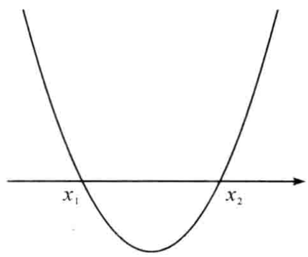

图 1-1

例 1　(山东高考)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+x+3$，其中 $a\neq 0$.

(1)当 a,b 满足什么条件时，$f(x)$ 取得极值?

(2)已知 $a>0$，且 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，试用 a 表示出 b 的取值范围.

解：(1)由已知得 $f'(x)=ax^2+2bx+1$，令 $f'(x)=0$，得 $ax^2+2bx+1=0$，$f(x)$ 要取得极值，方程 $ax^2+2bx+1=0$ 必须有解，所以 $\Delta=4b^2-4a>0$，即 $b^2>a$，此时方程 $ax^2+2bx+1=0$ 的根为

$$x_1=\frac{-2b-\sqrt{4b^2-4a}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-a}}{a},x_2=\frac{-2b+\sqrt{4b^2-4a}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-a}}{a},$$

所以 $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

当 $a>0$ 时,

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

所以 $f(x)$在 x_1,x_2 处分别取得极大值和极小值.

当 $a<0$ 时,

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	减函数	极小值	增函数	极大值	减函数

所以 $f(x)$在 x_1,x_2 处分别取得极大值和极小值.

综上,当 a,b 满足 $b^2>a$ 时,$f(x)$取得极值.

(2)要使 $f(x)$在区间$(0,1]$上单调递增,需使 $f'(x)=ax^2+2bx+1\geqslant 0$ 在$(0,1]$上恒成立.

即 $b\geqslant -\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$,$x\in(0,1]$恒成立,所以 $b\geqslant\left(-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}\right)_{\max}$.

设 $g(x)=-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$,$g'(x)=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{a\left(x^2-\dfrac{1}{a}\right)}{2x^2}$,

令 $g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$或 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$(舍去),

当 $a>1$ 时,$0<\dfrac{1}{a}<1$,当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$时,$g'(x)>0$,$g(x)=-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$为单调增函数;

当 $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}},1\right]$时,$g'(x)<0$,$g(x)=-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$为单调减函数,

所以当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$时,$g(x)$最大,最大值为 $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)=-\sqrt{a}$. 所以 $b\geqslant -\sqrt{a}$.

当 $0<a\leqslant 1$ 时,$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\geqslant 1$,此时 $g'(x)\geqslant 0$ 在区间$(0,1]$恒成立,

所以 $g(x)=-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$在区间$(0,1]$上单调递增.

当 $x=1$ 时,$g(x)$最大,最大值为 $g(1)=-\dfrac{a+1}{2}$,所以 $b\geqslant -\dfrac{a+1}{2}$.

综上,当 $a>1$ 时,$b\geqslant -\sqrt{a}$;当 $0<a\leqslant 1$ 时,$b\geqslant -\dfrac{a+1}{2}$.

【评注】 本题为有关高次函数的常规问题,利用求导的方法研究函数的极值、单调性和函数的最值,函数在区间$(0,1]$上为单调函数,则导函数在该区间上的符号确定,从而转为不等式 $b\geqslant -\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$在区间$(0,1]$上恒成立,再构造辅助函数 $g(x)=-\dfrac{ax}{2}-\dfrac{1}{2x}$,转化为研究函数 $g(x)$的最值,运用函数与方程的思想、化归思想和分类讨论的思想、使问题得到解决.

例2 （广东高考）设 $a<1$，集合 $A=\{x\in R\mid x>0\}$，$B=\{x\in R\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

(1)求集合 D（用区间表示）；

(2)求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点.

解：(1)对于方程 $2x^2-3(1+a)x+6a=0$，

判别式 $\Delta=9(1+a)^2-48a=3(a-3)(3a-1)$.

因为 $a<1$，所以 $a-3<0$.

①当 $1>a>\frac{1}{3}$ 时，$\Delta<0$，此时 $B=R$，所以 $D=A$；

②当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$\Delta=0$，此时 $B=\{x\mid x\neq 1\}$，所以 $D=(0,1)\cup(1,+\infty)$；

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$\Delta>0$，设方程 $2x^2-3(1+a)x+6a=0$ 的两根为 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，则

$$x_1=\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}，x_2=\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}.$$

$B=\{x\mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$.

③当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，$x_1+x_2=\frac{3}{2}(1+a)>0$，$x_1x_2=3a>0$，所以 $x_1>0$，$x_2>0$，此时，

$$D=(x,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$

$$=\left(0,\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}\right)\cup\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right)$$

④当 $a\leqslant 0$ 时，$x_1x_2=3a\leqslant 0$，所以 $x_1\leqslant 0$，$x_2>0$，

此时，$D=(x_2,+\infty)=\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right)$.

(2) $f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a=6(x-1)(x-a)$，$a<1$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[a,1]$ 上为减函数，在区间 $(-\infty,a]$ 和 $[1,+\infty)$ 上为增函数.

①当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，因为 $D=A$，所以函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a，

②当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$D=(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 D 内有极大值点 $a=\frac{1}{3}$；

③当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时，

$$D=\left(0,\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}\right)\cup\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right).$$

由 $0<a<\frac{1}{3}$，用作差法，或者用分析法很容易得到：

$$a<\frac{3(1+a)-\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}<1<\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},$$

所以，$f(x)$ 在 D 内有极大值点 a；

④当 $a\leqslant 0$ 时，$D=\left(\frac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4},+\infty\right)$，

由 $a\leqslant 0$,很容易得到 $\dfrac{3(1+a)+\sqrt{3(a-3)(3a-1)}}{4}>1$,

此时,$f(x)$ 在 D 内没有极值点.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 无极值点;$0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 的极值点为 a;$\dfrac{1}{3}<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a.

【评注】 本题是一个综合性问题,考查集合与导数的相关知识,考查了学生综合解决问题的能力,难度较大.第 2 小题求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点,首先要确定集合 D,根据 a 的范围,确定极值点 a 和 1 是否在集合 D 中,分类讨论.本题可以从极值点入手,讨论若 $x=1$ 与 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的极值点时,求实数 a 的范围,可使问题得到简化.解法如下:

解法 2:(2)$f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a=6(x-1)(x-a)$,$a<1$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[a,1]$ 上为减函数,在区间 $(-\infty,a]$ 和 $[1,+\infty)$ 上为增函数.

①$x=1$ 是极点 $\Leftrightarrow 1\in B\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}<a<1$;

②$x=a$ 是极点 $\Leftrightarrow a\in A$,$a\in B\Leftrightarrow 0<a<1$.

综上得:当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 无极值点;当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时,函数 $f(x)$ 的极值点为 a;当 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时,函数 $f(x)$ 的极值点为 1 与 a.

例 3 (浙江高考)已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)当 $x\in[0,2]$ 时,求 $|f(x)|$ 的最大值.

解:(Ⅰ)由已知得:$f'(x)=3x^2-6x+3a$,所以 $f'(1)=3a-3$,

且 $f(1)=1-3+3a+3-3a=1$,所求切线方程为:$y-1=(3a-3)(x-1)$,

即 $3(a-1)x-y+4-3a=0$;

(Ⅱ)由已知得:$f'(x)=3x^2-6x+3a=3[x(x-2)+a]$,其中 $\Delta=4-4a$,当 $x\in[0,2]$ 时,$x(x-2)\leqslant 0$.

(1)当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 上递减,

所以 $|f(x)|_{\max}=\max\{f(0),f(2)\}$.

因为 $f(0)=3(1-a)$,$f(2)=3a-1$,所以 $f(2)<0<f(0)$;

所以 $|f(x)|_{\max}=f(0)=3-3a$.

(2)当 $\Delta=4-4a\leqslant 0$,即当 $a\geqslant 1$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 上递增,

所以 $|f(x)|_{\max}=\max\{f(0),f(2)\}$.

因为 $f(0)=3(1-a)$,$f(2)=3a-1$,所以 $f(0)<0<f(2)$;

所以 $|f(x)|_{\max}=f(2)=3a-1$.

(3)当 $\Delta=4-4a>0$,即当 $0<a<1$ 时,

$f'(x)=3x^2-6x+3a=0$,所以 $x_1=1-\sqrt{1-a}$,$x_2=1+\sqrt{1-a}$,且 $0<x_1<x_2<2$,

x	0	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$3-3a$	递增	极大值	递减	极小值	递增	$3a-1$

所以 $f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$，$f(x_2)=1-2(1-a)\sqrt{1-a}$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=2>0$，$f(x_1)f(x_2)=1-4(1-a)^3<0$，所以 $f(x_1)>|f(x_2)|$，

所以 $|f(x)|_{\max}=\max\{f(0),f(2),f(x_1)\}$；

由 $f(0)-f(2)=3-3a-3a+1>0$，所以 $0<a<\frac{2}{3}$.

（ⅰ）当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$f(0)>f(2)$，所以 $x\in(-\infty,1]\cup[a,+\infty)$ 时，$y=f(x)$ 递增；$x\in(1,a)$ 时，$y=f(x)$ 递减，所以 $|f(x)|_{\max}=\max\{f(0),f(x_1)\}$.

因为 $f(x_1)-f(0)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}-3+3a=2(1-a)\sqrt{1-a}-(2-3a)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+(2-3a)}$，

又因为 $0<a<\frac{2}{3}$，所以 $2-3a>0$，$3-4a>0$，所以 $f(x_1)-f(0)>0$，

所以 $|f(x)|_{\max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$.

（ⅱ）当 $\frac{2}{3}\leqslant a<1$ 时，$f(2)>0$，$f(0)<0$，所以 $|f(x)|_{\max}=\max\{f(2),f(x_1)\}$，

因为 $f(x_1)-f(2)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}-3a+1=2(1-a)\sqrt{1-a}-(3a-2)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+(3a-2)}$，

此时 $3a-2>0$，当 $\frac{2}{3}<a<1$ 时，$3-4a$ 是大于零还是小于零不确定，

所以，①当 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{4}$ 时，$3-4a>0$，所以 $f(x_1)>|f(2)|$，

所以此时 $|f(x)|_{\max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$；

②当 $\frac{3}{4}\leqslant a<1$ 时，$3-4a<0$，所以 $f(x_1)<|f(2)|$，

所以此时 $|f(x)|_{\max}=f(2)=3a-1$.

综上所述，$|f(x)|_{\max}=\begin{cases}3-3a,(a\leqslant 0)\\ 1+2(1-a)\sqrt{1-a},\left(0<a<\frac{3}{4}\right)\\ 3a-1,\left(a\geqslant\frac{3}{4}\right)\end{cases}$.

【评注】 本题为2013年浙江省理科高考卷最后一题，在给定区间上求三次函数绝对值的最大值，题目仍然以学生所熟悉的切线问题引入，求最大值，需要结合函数图象，考虑端点处函数值和极值进行比较，题型虽然很常规，但因为加入了绝对值，题目中又含有对参数的讨论，所以本题对学生的要求较高.

由已知 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$，得 $f'(x)=3x^2-6x+3a$，所以 $f''(x)=6x-6$.

所以 $f''(1)=0$，其实函数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$ 的图象是关于点 $(1,f(1))$ 对称的中心对称图形，因此讨论的时候，如果结合函数图象的对称性，可以使问题得到简化.

二、高次函数中的切线问题

导数 $y'=f'(x_0)$ 的几何意义，是曲线 $y=f(x)$ 以 $P(x_0,f(x_0))$ 为切点所作切线的斜率，历年以来，有关导数几何意义的应用的考查，在各地高考试卷中屡见不鲜.

例 4 （全国高考Ⅱ）已知函数 $f(x)=x^3-x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程；

(2)设 $a>0$，如果过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

解：(1) $f(x)$ 的导数 $f'(x)=3x^2-1$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t,f(t))$ 处的切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$，即 $y=(3t^2-1)x-2t^3$.

(2)如果有一条切线过点 (a,b)，则存在 t，使 $b=(3t^2-1)a-2t^3$.

若过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则方程 $2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异的实数根. 记 $g(t)=2t^3-3at^2+a+b$，则 $g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$.

当 t 变化时，$g(t)$，$g'(t)$ 变化情况如下表：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	增函数	极大值 $a+b$	减函数	极小值 $b-f(a)$	增函数

由 $g(t)$ 的单调性，当极大值 $a+b<0$ 或极小值 $b-f(a)>0$ 时，方程 $g(t)$ 最多有一个实数根；

当 $a+b=0$ 时，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=0,t=\dfrac{3a}{2}$，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根；

当 $b-f(a)=0$ 时，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=-\dfrac{a}{2}$，$t=a$，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根.

综上，如果过 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，即 $g(t)=0$ 有三个相异的实数根，则 $\begin{cases}a+b>0,\\ b-f(a)<0.\end{cases}$ 即 $-a<b<f(a)$.

【评注】 本题主要考查导数的几何意义、切线方程的表示法等相关知识，这是导数的一种最基本的应用；因为 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，切线方程可以表示为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. 把过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，转化为方程 $2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异的实数根. 记 $g(t)=2t^3-3at^2+a+b$，根据函数单调性和极值，数形结合，可以知道方程 $2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异的实数根，必须要满足函数 $g(t)$ 的极大值大于 0、极小值小于 0，从而使问题得以解决.

例 5 （福建高考）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$，设 $f(x)$ 在 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ 处取得极值，记点 $M(x_1,f(x_1))$，$N(x_2,f(x_2))$，$P(m,f(m))$，$x_1<m<x_2$. 若对任意的 $m\in(t,x_2)$，线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M,P 的公共点，试确定 t 的最小值，并证明你的结论.

解法 1：

$f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，得函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,$

$+\infty)$，单调递减区间为$(-1,3)$，所以$M\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$N(3,-9)$，$P\left(m,\frac{m^3}{3}-m^2-3m\right)$，

直线MP的方程为$y=\frac{m^2-4m-5}{3}x+\frac{m^2-4m}{3}$.

由$\begin{cases}y=\frac{m^2-4m-5}{3}x+\frac{m^2-4m}{3}\\ y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\end{cases}$，得$x^3-3x^2-(m^2-4m+4)x-m^2+4m=0$，

线段MP与曲线$f(x)$均有异于M,P的公共点，等价于上述方程在$(-1,m)$上有根，即函数$g(x)=x^3-3x^2-(m^2-4m+4)x-m^2+4m$在$(-1,m)$上有零点.

因为$g(x)$为三次函数，所以$g(x)$至多有三个零点，两个极值点.

又$g(-1)=g(m)=0$，因此$g(x)$在$(-1,m)$上有零点等价于$g(x)$在$(-1,m)$上恰好有一个极大值点和一个极小值点，即$g'(x)=3x^2-6x-m^2+4m-4=0$在$(-1,m)$上有两个不相等的实数根，等价于：$\begin{cases}\Delta=36+12(m^2-4m+4)>0\\ g(-1)=3(-1)^2+6-(m^2-4m+4)>0\\ g(m)=3m^2+6-(m^2-4m+4)>0\\ m>1\end{cases}$，解得$2<m<5$.

又因为$-1<m\leqslant 3$，所以m的取值范围为$(2,3)$，从而满足题设条件的t的最小值为2.

解法2：

$f'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，得函数$f(x)$的递增区间为$(-\infty,-1)$和$(3,+\infty)$，单调递减区间为$(-1,3)$，所以$M\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$N(3,-9)$，$P\left(m,\frac{m^3}{3}-m^2-3m\right)$.

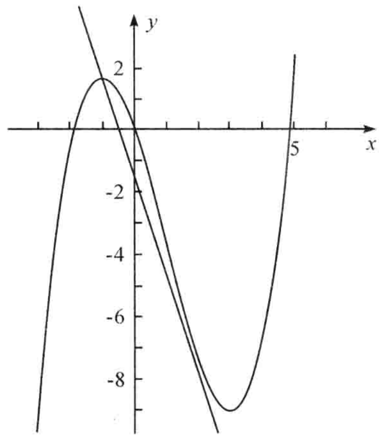

图1-2

若对任意的$m\in(t,x_2)$，线段MP与曲线$f(x)$均有异于M,P的公共点，由1-2知：当线段MP与曲线$f(x)$相切的时候，t取到最小值，

即有$k_{MP}=f'(m)$，即$\frac{f(m)-\frac{5}{3}}{m+1}=m^2-2m-3$，解得$m=2$，

从而满足题设条件的t的最小值为2.

【评注】　本题给出了两种解法，解法1通过分析把问题转化为方程$3x^2-6x-m^2+4m-4=0$在$(-1,m)$上有两个不相等的实数根时求实数m的取值范围，这样做思路好找，但是计算量大.解法2则巧妙地利用了函数图像，通过分析知道当线段MP与曲线$f(x)$相切的时候，a取到最小值.这样做，问题变得简单明了，且计算量小，学生容易理解.

三、高次函数与不等式综合问题

对于在指定区间上不等式恒成立或者存在性问题，一般综合性强，可考查函数、数列、不等式及导数等诸多方面的知识.同时可培养学生分析问题、解决问题以及综合驾驭知识的能力.这类问题一般都是利用函数最值法、分离参数、更改主元、数形结合等解题方法求解，从中渗透各种数学思想.

例 6 （天津高考）已知函数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+1(x\in\mathbf{R})$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上，$f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$，$f(2)=3$. $f'(x)=3x^2-3x$，$f'(2)=6$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-3=6(x-2)$，即 $y=6x-9$.

（Ⅱ）$f'(x)=3ax^2-3x=3x(ax-1)$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{a}$. 针对区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，需分两种情况讨论：

(1)若 $0<a\leqslant 2$，则 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增	极大值	减

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最小值在区间的端点得到. 因此在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上，

$f(x)>0$ 恒成立，等价于 $\begin{cases}f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\\ f\left(\frac{1}{2}\right)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{5-a}{8}>0,\\ \frac{5+a}{8}>0,\end{cases}$ 解得 $-5<a<5$.

又因为 $0<a\leqslant 2$，所以 $0<a\leqslant 2$.

(2)若 $a>2$，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最小值在区间的端点或 $x=\frac{1}{a}$ 处得到.

因此在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上，$f(x)>0$ 恒成立，等价于 $\begin{cases}f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\\ f\left(\frac{1}{a}\right)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{5-a}{8}>0,\\ 1-\frac{1}{2a^2}>0,\end{cases}$

解得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<5$ 或 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又因为 $a>2$，所以 $2<a<5$.

综合(1)，(2)，a 的取值范围为 $0<a<5$.

例 7　设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x\quad(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围；

(2)若在 $x\in[1,3]$ 上至少存在一个 x_0，使 $f(x_0)\geqslant 2$ 成立，求 a 的取值范围.

解：(1) $f'(x)=x^2-ax+a-1=(x-1)[x-(a-1)]$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$ 或 $a-1$.

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,a-1)$ 上单调递减，在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点；

当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以不存在极值点；

当 $a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,a-1)$ 上单调递增，在 $(a-1,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；

综上所述，使 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点，则 $a>2$.

(2)问题等价于 $f(x)_{\max}\geqslant 2$.

①当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $x\in[1,3]$ 上的最大值 $f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(3)\}$，

$f(1)=\frac{a}{2}-\frac{2}{3}$，$f(3)=-\frac{3a}{2}+6$.

$$\text{当}\begin{cases}f(1)\geqslant f(3)\\ f(1)\geqslant 2\\ a>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{2}{3}\geqslant-\frac{3a}{2}+6\\ \frac{a}{2}-\frac{2}{3}\geqslant 2\\ a>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant\frac{10}{3}\\ a\geqslant\frac{16}{3}\\ a>2\end{cases}\Rightarrow a\geqslant\frac{16}{3};$$

$$\text{当}\begin{cases}f(1)<f(3)\\ f(3)\geqslant 2\\ a>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{2}{3}<-\frac{3a}{2}+6\\ -\frac{3a}{2}+6\geqslant 2\\ a>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<\frac{10}{3}\\ a\leqslant\frac{8}{3}\\ a>2\end{cases}\Rightarrow 2<a\leqslant\frac{8}{3};$$

所以 $a\geqslant\frac{16}{3}$ 或 $2<a\leqslant\frac{8}{3}$，

②当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $x\in[1,3]$ 上单调递增，$f(x)_{\max}=f(3)=-\frac{3a}{2}+6\geqslant 2$，

得 $a\leqslant\frac{8}{3}$ 且 $a\leqslant 2$，所以 $a\leqslant 2$；由①②知：a 的取值范围是 $a\geqslant\frac{16}{3}$ 或 $a\leqslant\frac{8}{3}$.

【评注】　问题(2)为存在性问题，若在 $x\in[1,3]$ 上至少存在一个 x_0，使 $f(x_0)\geqslant 2$ 成立，则只需函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值 $f(x)_{\max}\geqslant 2$，学生容易把问题转化为求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上的最小值，使 $f(x)_{\min}\geqslant 2$，从而缩小了 a 的取值范围.

四、有关高次函数综合问题

例 8　(浙江高考)已知 $a>0$，$b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=4ax^3-2bx-a+b$.

(Ⅰ)证明：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

(1)函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a-b|+a$；

(2) $f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$；

(Ⅱ)若 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 对 $x\in[0,1]$ 恒成立，求 $a+b$ 的取值范围.

解:(Ⅰ)(1)$f'(x)=12ax^2-2b=12a\left(x^2-\frac{b}{6a}\right)$,

当 $b\leqslant 0$ 时,有 $f'(x)\geqslant 0$,此时 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增;

当 $b>0$ 时,$f'(x)=12a\left(x+\sqrt{\frac{b}{6a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{b}{6a}}\right)$,此时 $f(x)$ 在$\left(0,\sqrt{\frac{b}{6a}}\right]$上单调递减,在$\left[\sqrt{\frac{b}{6a}},+\infty\right)$上单调递增.

所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{-a+b,3a-b\}$

$=\begin{cases}3a-b,(b\leqslant 2a)\\-a+b,(b>2a)\end{cases}=|2a-b|+a.$

(2)由于 $0\leqslant x\leqslant 1$,故当 $b\leqslant 2a$ 时,

$f(x)+|2a-b|+a=f(x)+3a-b=4ax^3-2bx+2a\geqslant 4ax^3-4ax+2a=2a(2x^3-2x+1).$

当 $b>2a$ 时,

$f(x)+|2a-b|+a=f(x)-a+b=4ax^3+2b(1-x)-2a>4ax^3+4a(1-x)-2a=2a(2x^3-2x+1).$

设 $g(x)=2x^3-2x+1,0\leqslant x\leqslant 1$,则 $g'(x)=6x^2-2=6\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

当 x 变化时,$g(x)$,$g'(x)$的变化情况如下表.

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	单调递减	极小值	单调递增	1

所以,$g(x)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{4\sqrt{3}}{9}>0$,所以,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2x^3-2x+1>0$,

故 $f(x)+|2a-b|+a\geqslant 2a(2x^3-2x+1)\geqslant 0$.

(Ⅱ)由(1)知,当 $0\leqslant x\leqslant 1$,$f(x)_{\max}=|2a-b|+a$,所以$|2a-b|+a\leqslant 1$;

若$|2a-b|+a\leqslant 1$,则由(2)知,$f(x)\geqslant -(|2a-b|+a)\geqslant -1$,

所以$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 对任意 $0\leqslant x\leqslant 1$ 恒成立的充要条件是$\begin{cases}|2a-b|+a\leqslant 1\\a>0\end{cases}$,

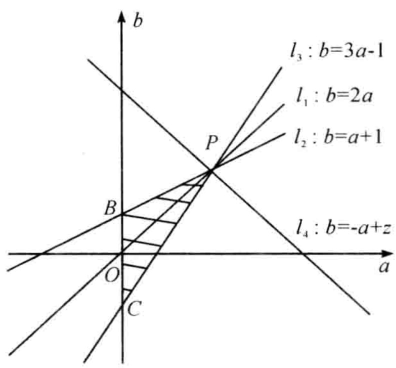

图 1-3

即$\begin{cases}2a-b\geqslant 0\\3a-b\leqslant 1\\a>0\end{cases}$或$\begin{cases}2a-b<0\\b-a\leqslant 1\\a>0\end{cases}$ ①

在直角坐标系 aob 中,①所表示的平面区域为如图所示的阴影部分,其中不包括线段 BC.

作一组平行直线 $a+b=t(t\in\mathbf{R})$，

得 $-1<a+b\leqslant 3$，所以 $a+b$ 的取值范围是 $(-1,3]$.

【评注】 本题是浙江省 2012 年数学理科高考卷第 22 题，难度较大. 第 1 小题的第 1 问，是三次函数在给定区间 $[0,1]$ 上求最大值，本属于常规问题，只不过最大值是以绝对值的形式给出的，学生容易产生错误. 第 2 问仍然是函数在给定区间上求最小值问题，只不过是需要先利用不等式 $f(x)+|2a-b|+a\geqslant 2a(2x^3-2x+1)$，把问题转化为求函数 $y=(2x^3-2x+1)$ 的最小值，从而使问题得以解决. 第 2 小题是充分利用第 1 小题的结论，得出 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 对任意 $0\leqslant x\leqslant 1$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}|2a-b|+a\leqslant 1\\ a>0\end{cases}$，从而使问题转化为线性规划问题，求目标函数 $t=a+b$ 在给定区间上的取值范围. 本题主要考查不等式、利用导数研究函数的单调性等性质，以及线性规划等知识点的综合运用能力，同时考查抽象概括、推理论证的能力，对学生能力要求较高.

解法 2：(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$ 要成立，只有 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a\geqslant 0$ 成立.

因为 $f'(x)=12ax^2-2b=12a\left(x^2-\dfrac{b}{6a}\right)$，

① 当 $b\leqslant 0$ 时，有 $f'(x)\geqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)_{\min}=f(0)=b-a$，所以 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a=2a>0$.

当 $b>0$ 时，$f'(x)=12a\left(x+\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right)$，此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{\dfrac{b}{6a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

② 当 $0<b<2a$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right)=-\dfrac{4b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}-a+b$，

因为 $b<2a$，所以 $\sqrt{\dfrac{b}{6a}}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\dfrac{4b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}<\dfrac{4b}{3\sqrt{3}}<b$，

所以 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a=-\dfrac{4b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}+2a>-b+2a>0$.

③ 当 $2a\leqslant b\leqslant 6a$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right)=-\dfrac{4b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}-a+b$，

所以 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a=-\dfrac{4b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}+2b-2a=\dfrac{2a}{3}\left(3\cdot\dfrac{b}{a}-3-2\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b}{6a}}\right)$　　(*)

令 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}=m$，则 $m\in[\sqrt{2},\sqrt{6}]$，

则 (*) 式变为 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a=\dfrac{2a}{3}\left(3m^2-3-\dfrac{\sqrt{6}}{3}m^3\right)$.

令 $g(m)=\left(3m^2-3-\dfrac{\sqrt{6}}{3}m^3\right)$，$m\in[\sqrt{2},\sqrt{6}]$，

$g'(m)(m)=6m-\sqrt{6}m^2$，当 $m\in[\sqrt{2},\sqrt{6}]$ 时，$g'(m)\geqslant 0$，函数 $g(m)$ 在 $m\in[\sqrt{2},\sqrt{6}]$ 上单

调递增，所以 $g(m)_{\min}=g(\sqrt{2})=-\frac{9-4\sqrt{3}}{3}>0$. 所以 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a>0$ 成立.

④当 $b>6a$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，$f(x)_{\min}=f(1)=3a-b$，

所以 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a=2a>0$.

综上所述，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$ 恒成立.

【评注】 本题解法 2 的解题思路更贴近学生的思维水平. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$ 要成立，只有 $f(x)_{\min}+|2a-b|+a\geqslant 0$ 成立. 问题转化为在给定区间上求函数的最小值问题. 结合极值点是否在给定区间和去绝对值符号两个角度进行讨论，思路明了，着重考查学生的分类讨论意识和构造辅助函数等知识的综合运用.

例 9 （江苏高考）已知 a,b 是实数，函数 $f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的导函数，若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致.

(1) 设 $a>0$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致，求实数 b 的取值范围；

(2) 设 $a<0$，且 $a\neq b$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a,b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值.

解：因为 $f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，所以 $f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$.

(1) 因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致，所以，$\forall x\in[-1,+\infty)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即 $\forall x\in[-1,+\infty)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$.

$\because a>0$，$3x^2+a>0$，$\therefore \forall x\in[-1,+\infty)$，$2x+b\geqslant 0$，

即 $\forall x\in[-1,+\infty)$，$b\geqslant -2x$，$\therefore b\geqslant 2$；实数 b 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

(2) 由 $f'(x)=0$，$x=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$.

若 $b>0$，则由 $a<0$，$0\in(a,b)$，$f'(0)g'(0)=ab<0$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 上不是单调性一致，所以 $b\leqslant 0$.

$\because x\in(-\infty,0)$，$g'(x)<0$；

又 $x\in\left(-\infty,-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$，$f'(x)>0$；$x\in\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}},0\right)$，$f'(x)<0$.

所以要使 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

只有 $a\geqslant -\sqrt{-\frac{a}{3}}$，$b\geqslant -\sqrt{-\frac{a}{3}}$，$-\frac{1}{3}\leqslant a<0$，$-\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant 0$，$|a-b|\leqslant\frac{1}{3}$.

取 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$，$f'(x)g'(x)=6x\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$，当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 时，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

因此 $|a-b|_{\max}=\frac{1}{3}$.

当 $b<a$ 时，因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (b,a) 上单调性一致，

所以 $\forall x\in(b,a)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，

即 $\forall x\in(b,a)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$，$\because b<a<0$，$\therefore \forall x\in(b,a)$，$2x+b<0$，