目　　录

图 论 基 础

图的理论，简称图论(Graph Theory)，作为计算机科学和系统工程的有力工具，近年来获得了迅速的发展和广泛的应用。

瑞士 Euler

据记载，图论是数学家欧拉创始的。1936年，欧拉解决了当时颇为有名的一个难题，就是哥尼斯堡城的七桥问题。问题是这样的：从陆地或岛上任一地方开始，能否通过每座桥一次且仅一次就可回到原地。欧拉把这个难题化成为一个数学问题，他用一个顶点表示一个陆地或岛，用连接相应顶点的边表示各座桥，如图1所示。于是这个问题就变为：在这图中，从某一点出发，只经过每条边一次且仅仅一次而又回到起点，简称为一笔画问题。欧拉得出结论说，存在一笔画的必要和充分条件是，奇次顶点（顶点连接的边为奇数）的数目必须是零。显然，图1不满足此条件，故不可能实现。

圈

边—弧

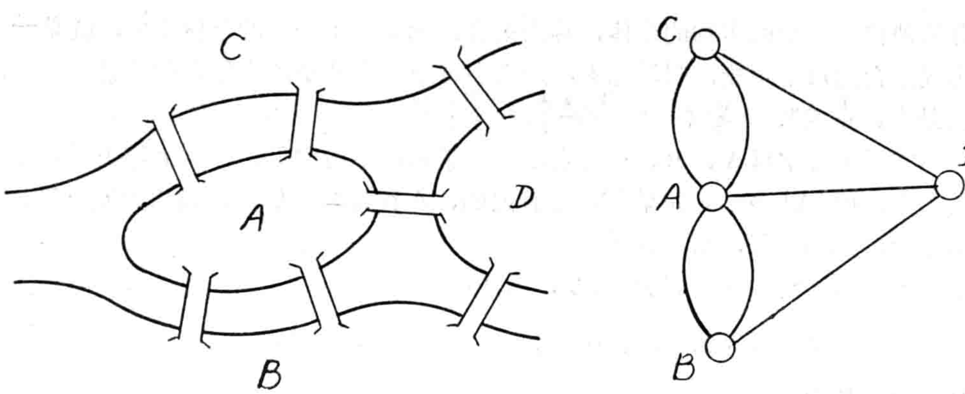


图1　　哥尼斯堡七桥问题　　Euler 回路问题

图论中的图，不是一般的工程图也不是几何图，而是由若干顶点与连接顶点的边所组成的一种抽象图。一般说来，凡是具有双边关系性质的事物，例如物资运输、航空交通、电力网络、工程进度、资源分配、信息流程、电路设计以及决策分析、经济问题等等，都可以用图的模型来描述，用图的理论进行分析计算。

图论所研究的具体对象，一般都是从宏观的角度来讨论问题。例如城市通信网，只研究城市之间的信息流，并不研究通信设备内部结构；交通运输网络，只研究客运和货物的流量，而不研究公路铁路的具体构造；资源分配，主要研究供求关系，并不讨论资源的开发技术等等。

用图论来处理在组织上互相关联的大而复杂的系统非常有效。今天，图论已广泛用于解决诸如人造卫星通信、新型计算机的研制、超大规模集成电路的设计等尖端技术和各种庞大的能源、经济和社会发展问题。图论之所以能够得到这样高速的发展，这首先是因为图论模型具有广泛的通用性，特别适合于进行具有互联部件的系统的分析；其

次，图论的数学描述简单直观，十分适合于计算机的存储和运算；三是图论与其他学科之间有着广泛的联系，从而能够吸取各种有效的研究方法，不断充实和改进。

图论这门新学科虽然还很年青，但它的内容十分丰富多采。我们在这里只能介绍一些基本概念和主要内容。有兴趣的读者可以参考和阅读有关图论的专著。

第一章　图的基本概念

§1—1、集合的概念

图论中需要用到集合论的一些基本知识，简介如下。

一、集合和元素

具有某种特定性质的事物的全体，称为集合。例如一个班级的全体学生，就是一个集合。构成集合的每个事物，叫做元素。班级中每个学生就是这个集合的元素。一般，元素可以是人、物或数。集合内的元素具有同素性质

集合通常用大写字母A、B、C等表示，元素则用小写字母a、b、c等表示。集合A的元素个数，用$|A|$表示。如果$|A|$是有限的，A称为有限集，否则称为无限集。没有元素的集合，称为空集，用$\varnothing$表示。

n个元素v_1、v_2、…v_n的集合V，写成：

$$V=\{v_1、v_2、\cdots v_n\}\qquad A=\{a_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

此时元素个数$|V|=n$。

如果a是集合A的元素，就称a属于集合A，记成$a_i \in A$。

如果a不是集合A的元素，就称a不属于集合A，记成$a_j \overline{\in} A$。　$a_j \notin A$

例如平面上有五个不同的点v_1、v_2、v_3、v_4、和v_5，集合$V=\{v_1、v_2、v_3、v_4\}$，则点$v_1 \in V$，而$v_5 \overline{\in} V$。　A被包含于B中　属于

若集合A的元素都是集合B的元素，就称A含于B内，记成$A \subset B$，或称B包含A，记成$B \supset A$。这时称A为B的子集。例如，集合$A=\{a_1、a_2、a_3\}$，$B=\{a_1、a_2、a_3、a_4\}$，则$A \subset B$，或$B \supset A$。

若集合A有n个元素，那么A的子集共有2^n个。例如$A=\{a_1, a_2, a_3\}$，共有8个子集：$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1, a_2\}$，$\{a_1, a_3\}$，$\{a_2, a_3\}$，$\{a_1, a_2, a_3\}$及空集$\varnothing$。$\{0\}$

集合有以下性质：　每子集，余者为真子集

$A \supset A$。

$A \supset \varnothing$。

若$A \supset B$，$B \supset C$，则$A \supset C$。

若 $A \supset B$， $B \supset A$，则称 $A = B$。

二、集合的运算

（1）并集，又称和集　　A，B的并集是A，B所有元素组成的集合

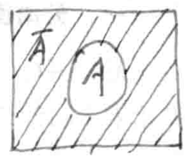
设A、B为两个集合，由属于A和B的元素全体组成的集合称为A与B的并集，记为，$A \cup B$，或 $A + B$。

【例1】$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，　$B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$，并集 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$。

【例2】$A = \{a, b, c\}$，$B = \{d, e, f\}$，并集 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$。

（2）交集，又称通集

由同时属于A和B的那些元素组成的集合，称为A和B的交集，记为 $A \cap B$，或 $A \cdot B$。



由例1，交集 $A \cap B = \{1, 2\}$。

由例2，交集 $A \cap B = \varnothing$。

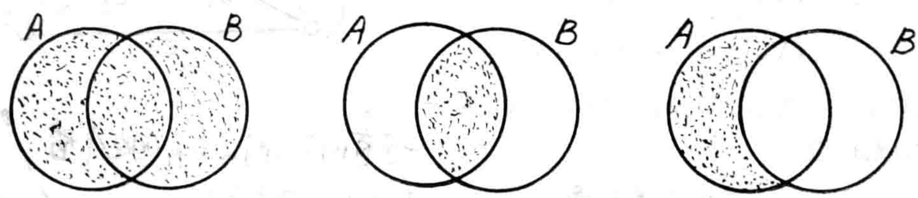
（3）补集，又称差集　　$\bar{A}$：不属于A的元素所组成的集合

集合A中不属于B的元素全体组成的集合，称为B关于A的补集，记成 $\bar{B}$，或 $A - B = A \cap \bar{B}$

由例1，补集 $\bar{B} = \{3, 4, 5\}$。

由例2，$\bar{B} = \{a, b, c\}$。

集合三种运算可用图1·1表示。



$A \cup B$　　　　$A \cap B$　　　　$A - B$

并集(全)　　　　交集(通)　　　　差集

图1.1　**集合的运算**

集合运算具有以下性质：

（1）交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

（2）结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

（3）分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

（4）吸收律

$$(A\cap B)\cup A=A$$

（5）摩根公式

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

§ 1—2 图的定义

一、无向图

无向图G＝（V，E，Φ），包含有顶点集合V，边的集合E，以及E的元素与V的元素之间的关系Φ。有时无向图也可直接写成G＝（V，E）。

【例 1】无向图G见附图，其中顶点集合

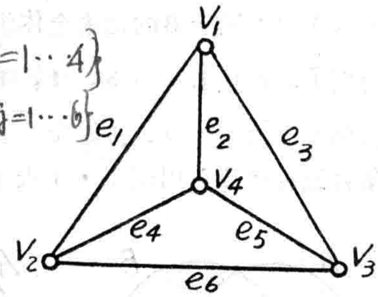
V ＝ $\{v_1、v_2、v_3、v_4\}$ 边的集合 $=\{V_i \mid i=1\cdots4\}$

E ＝ $\{e_1、e_2、e_3、e_4、e_5、e_6\}$ 关系$\varnothing$：$=\{e_j \mid j=1\cdots6\}$

$e_1=\langle V_1、V_2\rangle$　　$e_2=\langle V_1、V_4\rangle$

$e_3=\langle V_1、V_3\rangle$　　$e_4=\langle V_2、V_4\rangle$

$e_5=\langle V_3、V_4\rangle$　　$e_6=\langle V_2、V_3\rangle$



例 1　附图

这里$e_k=\langle V_i,\ V_j\rangle$表示以$V_i$、$V_j$为两端点的无向边。

一条无向边可用二条有向边代替

无始点，终点之分

二、有向图　单向道是向图

有向图G＝（V，E，ψ）包含有顶点集合V，边的集合E，以及E的元素与V的元素之间的关系ψ。与无向图一样，有向图G也可以写成G＝（V，E）。

【例 2 】有向图G见附图，其中顶点集合V＝$\{V_i \mid i=1\cdots4\}$

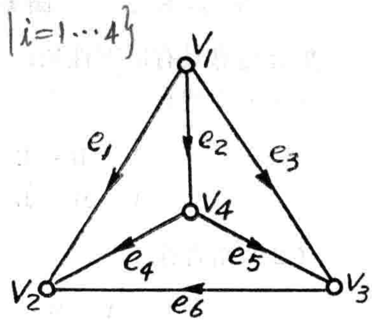
$\{V_1、V_2、V_3、V_4\}$ 边的集合E ＝ $\{e_1、e_2、e_3$

$e_4、e_5、e_6\}=\{e_j \mid j=1\cdots6\}$

关系ψ：$e_1=(V_1、V_2)$　　$e_2=(V_1、V_4)$

$e_3=(V_1、V_3)$　　$e_4=(V_4、V_2)$

$e_5=(V_4、V_3)$　　$e_6=(V_3、V_2)$



例 2　附图

这里$e_k=(V_i、V_j)$表示

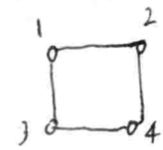
始

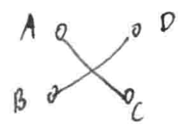
以V_i为起点，以V_j为终点的有向边。

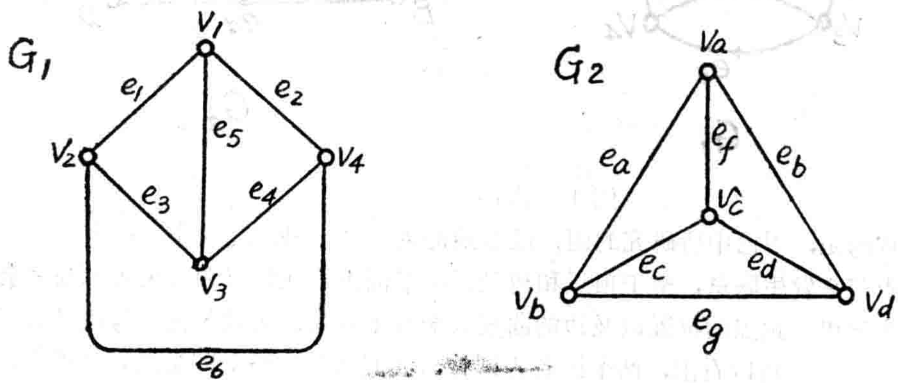
三、同构 和图的形状，位置无关

设$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$是两个无向图。假如这两个图的顶点集合V_1和V_2，边的集合E_1和E_2之间都建立了一一对应关系，并且满足这样的关系：一图形的两顶点间的边对应于另一图对应顶点间的边，则称这两个图是同构的。

【例3】两个无向图见附图







例3 附图

因为图G_1和G_2间有以下一一对应关系

（1）$V_1 \longleftrightarrow V_a$，$V_2 \longleftrightarrow V_b$，$V_3 \longleftrightarrow V_c$，$V_4 \longleftrightarrow V_d$

（2）$e_1=\langle V_1, V_2\rangle \longleftrightarrow e_a=\langle V_a, V_b\rangle$

$e_2=\langle V_1, V_4\rangle \longleftrightarrow e_b=\langle V_a, V_d\rangle$

$e_3=\langle V_2, V_3\rangle \longleftrightarrow e_c=\langle V_b, V_c\rangle$

$e_4=\langle V_3, V_4\rangle \longleftrightarrow e_d=\langle V_c, V_d\rangle$

$e_5=\langle V_1, V_3\rangle \longleftrightarrow e_f=\langle V_a, V_c\rangle$

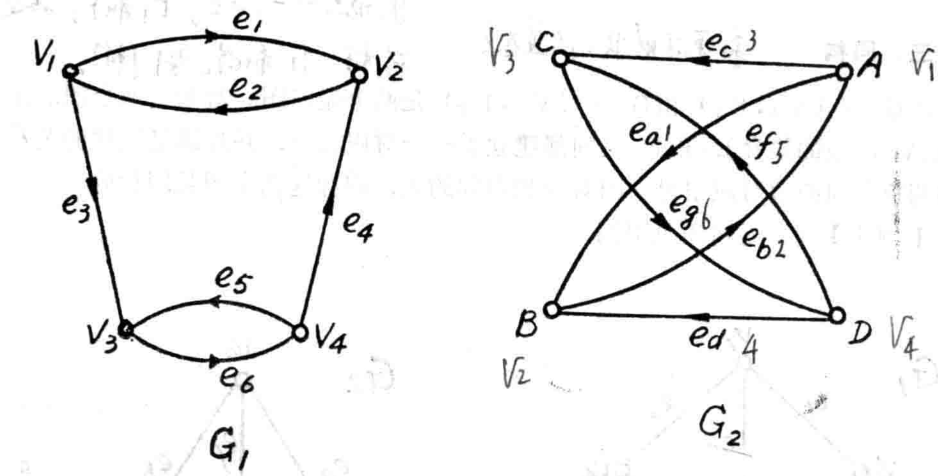
$e_6=\langle V_2, V_4\rangle \longleftrightarrow e_g=\langle V_b, V_d\rangle$

所以G_1和G_2是同构的两个无向图。

类似办法可定义两个有向图G_1和G_2的同构关系。

所谓同构，就是从外表看两个图不一样，但它的拓扑结构是一样的。形象地说，若图的顶点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，这个图可以变形为另一个图，那么就说这两个图是同构的。

【例4】下面两个有向图G_1和G_2是同构的



例4　附图

要注意的是，图论中所研究的图，最本质的内容是一种二元关系，或者说任一条边有两个顶点与它发生联系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线来表示则完全是不必要的。在这里，顶点的位置以及边的曲直长短并不重要，关键是顶点与边是如何连接的。从同构的概念可以看出，两个图若为同构，我们认为这两个图是没有区别的。

§1—3．点与边的关系

为了说明一个图的结构特点，有必要弄清楚下面这些概念。

当一条边e与两个顶点V_i和V_j有关联，则V_i和V_j称为边e的端点，记成$e=\langle V_i, V_j\rangle$。如果$V_i=V_j$，则$V_i$是e唯一端点，这时边e称为自环。如果两条边$e_1$和$e_2$与顶点$V_i$和$V_j$关联，即$e_1=\langle V_i, V_j\rangle$和$e_2=\langle V_i, V_j\rangle$，则$e_1$和$e_2$称为并行边。如果图中存在并行边，则称此图为多重的。带有自环和并行边的图如图1·2所示。

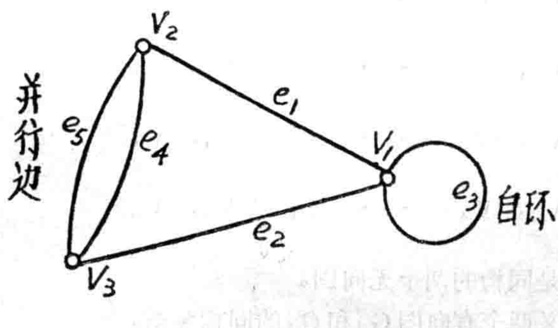


图1·2　带有自环和并行边的图

如果顶点V_i和V_j之间至少存在一条边e，则V_i和V_j称为相邻的顶点。同样，如果两条边e_1和e_2至少有一个共同顶点，则e_1和e_2称为相邻的边。要注意，相邻的

性质是指相同元素（边或顶点）之间的关系，而关联性质则指不同元素（边和顶点）之间的关系。

设G＝（V，E）是无向图，若顶点v_K是G的一个顶点，与顶点v_K关联的边的数目称为v_K点的次数，或称线度，记为$d(v_K)$。如果顶点v_K上有一个自环，它的次数$d(v_K)=2$。对于任意图G＝(V，E)，次数为奇数的点数即奇次点必为偶数。如果$d(v_K)=0$，即没有任何边与顶点关联，此点就称为孤立点。如果一个图的全部顶点都是孤立的，此图称为退化图。

3.子图 一个图G＝(V，E)的子图$G_s(V_s，E_s)$是这样的一个图，其V_s和E_s分别为V和E的子集。如果$V_s \subset V$和$E_s \subset E$，则V_s和E_s分别为V和E的真子集，则G_s为G的真子图。如果$V_s=V$，则子图G_s称为G的生成图。

为了说明上述定义，可参阅图1・3。图中顶点V_1V_2；V_2V_3；V_1V_4为相邻的，但V_1V_3是不相邻的。边e_1e_3；$e_1e_2e_5$为相邻的，但边e_1e_5；e_3e_4是不相邻的。顶点V_1的次数$d(V_1)=2$，顶点V_2的次数$d(v_2)=3$。图(b)是图G的生成子图，因为它包含了G的全部顶点，而图(c)是图G的一个真子图。

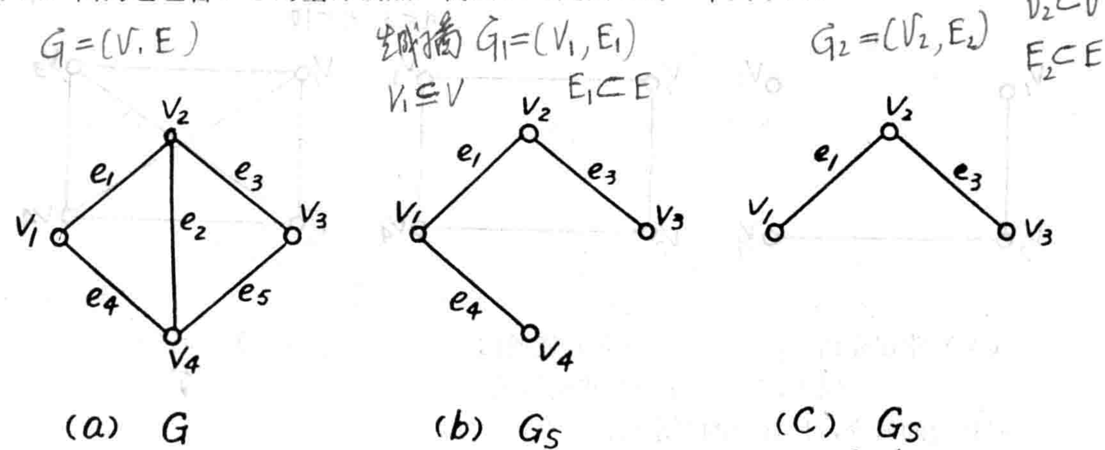


图1・3　图和子图

生成子图的个数$=2^e$，只和边数有关，而和顶点数无关。

§1—4．　道路和回路

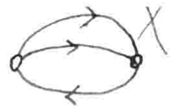
1.路（路径、道路）

直观上可以看出，从一个图的某一顶点出发，沿着一些边连续移动，从而达到另一指定的顶点，或者回到原来的出发点。这种由边的序列构成的路径在图论中占有重要地位。

一个接着一个

对于图G的几条边$e_1e_2\cdots e_n$，如果存在n＋1个顶点序列$v_0v_1v_2\cdots v_n$，使得$e_K=\langle V_{K-1}，V_K\rangle$，K＝1，2…n，则这些边构成了一个边的序列。换句话说，每一条边e_K和e_{K-1}以一个端点V_{K-1}相衔接，和e_{K+1}的另一个端点V_K相衔接。

如果边的序列中每个顶点的出现不超过一次，也就是终点与起点不相重合，我们就称这个边的序列为一条道路或简称路。特别当这序列中每条边出现的次数不超过一次时，叫做简单道路。



(圈)

如果边的序列中终点与起点互相重合，就称为回路。回路中没有重复出现的边时，叫做简单回路。

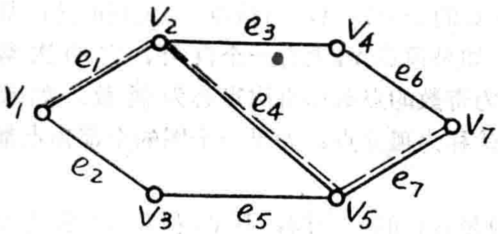


图1·4　边的序列

例如，图1·4中边的序列 $S=\{e_1, e_4, e_7\}$ 是一条道路；边的序列 $c=\{e_1, e_4, e_5, e_2\}$ 形成一个回路。

我们定义：设G是无向图，G的任意两顶点之间至少存在一条道路时，则称为连通图，否则是非连通图。存在孤立点时

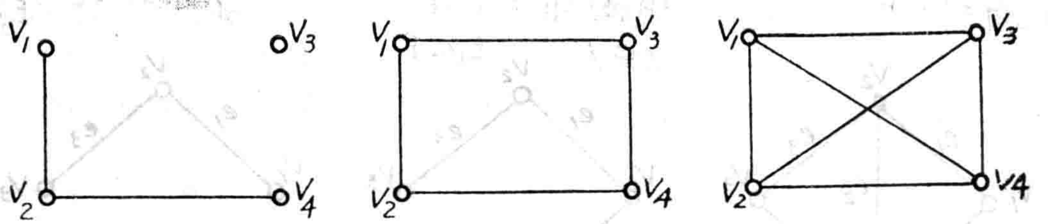
对于有向图，若去掉方向后图是连通的，就叫做是连通图。

一个连通图，如果任意两个顶点之间都有一条边连接，就称为完备图（完全图）。一个完备图具有最大的边数 $e=\boxed{\frac{1}{2}n\times(n-1)}$，n为顶点数。完全图边数最多的图

连通图，非连通图和完备图如图1·5所示。

$n=3$　$e=3$
$n=4$　$e=6$
$n=5$　$e=10$

$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$

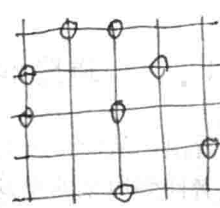


（a）非连通图　　（b）连通图　　（c）完备图 全

图1.5　连通和非连通图

强连通的概念，比连通的要求更高一些。

对于有向图G的任意两个顶点 v_i、v_j，从 v_i 到 v_j 和从 v_j 到 v_i 都至少存在一条道路相通时，则称图G是强连通的。



最短航行问题

§1—5.　树和割集

一、　树　边数最少的连通图

树的概念十分重要。简单地说，树就是不包含回路的连通图，它包含了图的全部顶点。

同一连通图具有许多不同的树，一个图的全部相异树的总数之多是惊人的。例如，对于具有10个顶点的完备图，竟有一亿颗树。

树具有许多重要的性质。在一个树的两个顶点之间，必然存在一条且仅有一条道路。前一点是由于树的连通性质所决定的，后一点则是由于树不包含回路所决定的，

因为如果两个顶点之间存在两条路，则将出现回路。

把一个树的任一条边移去，将使图变成不连通的，这是因为被移去的边是连接两个端点的唯一条路。所以一个树是由那些恰好足够把全部顶点连接起来的边所构成，或者说，树是一种极小的连通图。

对于图G的一个树T，凡是属于此树的边称为树支。图中除树之外的其余边的集合，称为余树。余树的边则称为连支。在树中添进一条连支，所得的图将不再是树。例如，在图1.6中，图G的一个树T，实线表示树的树支，虚线表示余树的连支。

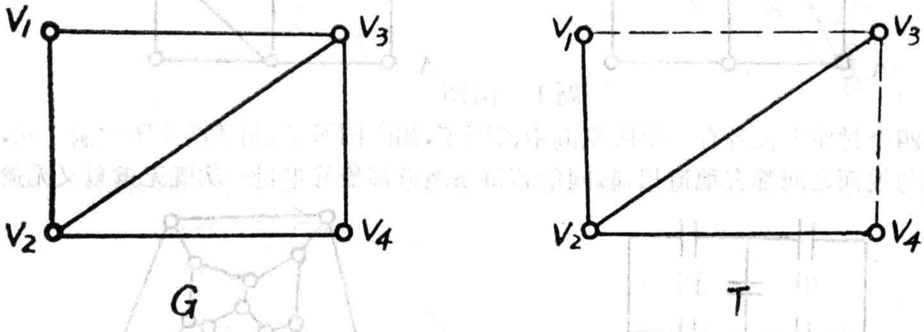
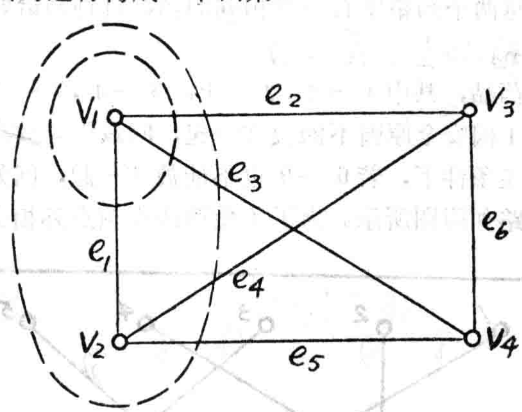


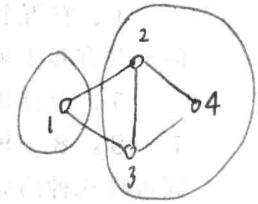
图1.6　　树和余树

二、割集 边的集合，把图分成不连通的两部分的最小边的集合

所谓割集，就是连通图G的一个边的集合，把这些边移去，将使图分离为两部分，但是，如果少移去其中一条边，图仍将是连通的。这就是说，一个连通图，把属于割集的边移去后，将成为一个非连通图，割集的名称即由此而来。

例如，在图1.7中，连通图G的一个边的集合 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ 分别构成一个割集。图中用虚线画出的闭合面是为了帮助找出或表示割集的一种方法，即与它切割的边将构成一个割集。





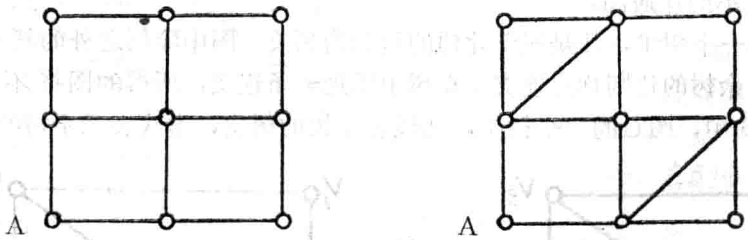
{(1,2),(1,3)}

图1.7　　割集

割集与树的概念具有互补的性质。树是连通一个图的全部顶点的极小边的集合。割集则是把某些顶点与其余顶点分离的极小边的集合。一个连通图G的一个割集至少包含图G的一条树支。

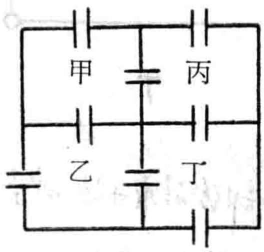
练 习 一

1、下面两个街道图，邮递员从邮局A出发，能否沿街道不重复地走一遍返回邮局，即求最短路线。

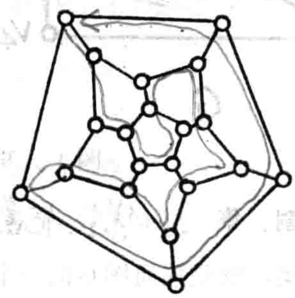


题1 附图

2、四个村庄下面各有一个防空洞甲乙丙丁，如附图所示。相邻两个防空洞之间，每个防空洞与地面之间都有地道相通。问能否每条地道都恰好走过一次既无重复又无遗漏？



题2 附图



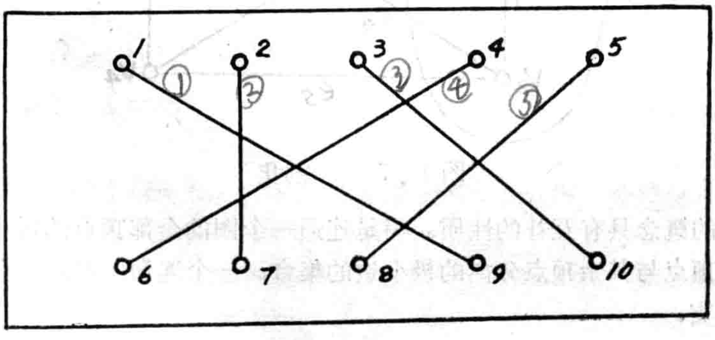
题3 附图

3．Hamilton回路（见附图）：图中20个顶点表示世界二十个名城，各边表示两城市间航线，问从某一城市出发，能否遍历各城市一次且仅一次最后返回原地（此题不要求走遍每一条边）？

4、有五个药箱，每两个药箱里有一种相同的药，每种药恰好在两个药箱里出现，问一共有多少种药？药箱—点，药—边

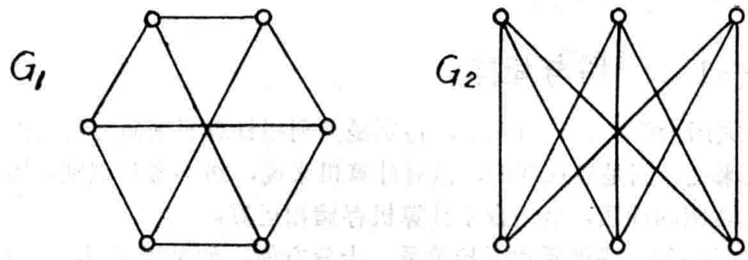
5、现有9种化学药品，其中1—2，2—3，3—4，4—5，5—6，6—7，7—8，8—9，9—1因安全原因不能放在一起，问最少应放在几个房间里，每个房间放哪几种药品？除上述条件下，若6—9也不能放在一起，问如何放法？

6、设计一印刷电路如附图所示。为了不使两线在顶点外相交，问印刷电路板最少应分成几层？



题6 附图

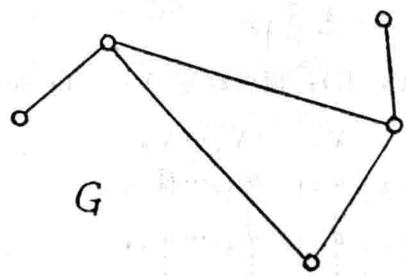
7、说明下面两图是否同构？



题7　附图

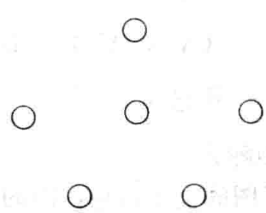
8、绘制中国行政地图，30个省市至少要用几种颜色，才能使相邻省市有不同颜色。

9、无向图G（见附图）如何用有向图表示？



题9　附图

10．画出有六个顶点的完备图。



题10　附图

第二章　　图的矩阵表示

§ 2 — 1　　图与矩阵

矩阵是研究图论的一种有力工具，特别是当利用计算机来研究有关图的算法时，非常有用。对人来说，图是最直观的，但对计算机来说，却不容易识别。用矩阵表示图，能够很好地表达图的性质，也适合于计算机存储和运算。

用矩阵表示图的关联性质和邻接关系，十分方便。如果用来表示顶点的邻接关系，就叫邻接矩阵；用来表示顶点与边之间的关联关系时，就称为关联矩阵；表示回路与边的关联性质时则称为回路矩阵。此外，也可用矩阵表示割集与边的关联关系，叫割集矩阵。

一、邻接矩阵　点一点关系

对于有向图 $G=(V, E)$，顶点数为 $|V|=n$，构造以下矩阵

$$A=\begin{array}{c}\\ V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}V_1 & V_2 & \cdots & V_n\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}$$

或　　$A=(a_{ij})_{n\times n}$　　方程

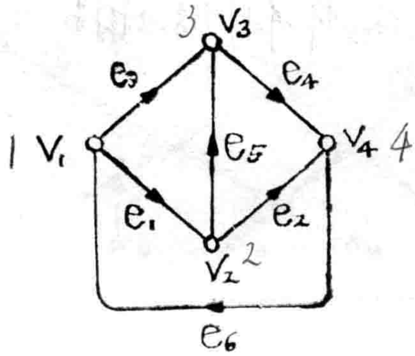
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (V_i, V_j)\in E\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称矩阵A为图G的顶点的邻接矩阵。

给出了邻接矩阵就等于给出了图的全部信息，图的性质也可从矩阵A通过运算获得。此外，通过邻接矩阵的适当置换，还可证明两个图 G_1 和 G_2 是否为同构，这里就不详述了。

【例1】求有向图G的邻接矩阵（见附图）

G



例1　附图

图G的邻接矩阵如下

$$A=\begin{array}{c} \\ V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}V_1 & V_2 & V_3 & V_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

设有向边的箭头方向离开顶点为正，进入顶点为负。在邻接矩阵A中，第i行中非零元素数目等于顶点V_i的正次数$d^+(v_i)$，第j列非零元素的个数等于顶点V_j的负次数$d^-(v_j)$。例如在例1中，从邻接矩阵A可以看出，第1行元素个数表明$d^+(V_1)=2$，第1列元素个数表明$d^-(V_1)=1$，说明离开顶点V_1的有向边有2条，进入顶点V_1的有向边有1条，故顶点V_1的次数为$d(V_1)=d^+(V_1)+d^-(V_1)=3$。同理，第3行非零元素个数为1，第3列非零元素个为2，表明顶点V_3的次数$d(V_3)=d^+(V_3)+d^-(V_3)=1+2=3$。其余类推。

二、关联矩阵 点一边的关联性质，一个与哪几条边的关係

对于有向图$G=(V,E)$，$|V|=n$，$|E|=m$，其顶点与边之间的关联矩阵表示如下

$$B=\begin{array}{c} \\ V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}e_1 & e_2 & \cdots & e_m\end{array}\\ \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nm}\end{pmatrix}\end{array}$$

或 $B=(b_{ij})_{n\times m}$

$$b_{ij}=\begin{cases}+1 & \text{若第j条边以}v_i\text{为起点} \quad \circ\!\!\longrightarrow\\ -1 & \text{若第j条边以}v_i\text{为终点} \quad \circ\!\!\longleftarrow\\ 0 & \text{若第j条边不以}v_i\text{为端点} \quad \text{无关联}\end{cases}$$

【例2】求例1所示有向图G的关联矩阵。

有向图G的顶点数$|V|=4$，边数$|E|=6$，可写成4×6关联矩阵为

$$B=\begin{array}{c} \\ V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&1&0&0&-1\\-1&1&0&0&1&0\\0&0&-1&1&-1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

关联矩阵B有两个特点：

（1）矩阵B的每一列对应图G中一条边，+1为对应边的起点，-1为其终点。每列元素之和均为零。

（2）矩阵B所有行向量之和等于零，说明矩阵B的秩小于n。所谓矩阵的秩，就是

矩阵所包含的非奇异子阵的最大阶数。这就是说，矩阵B是线性相关的，其中任何一行可从其它行求得。真正独立的只有 n－1行，所以从B中去掉一行不会失去任何信息。划去一行后构成的矩阵称为基本关联矩阵，用B_K表示，划去行所对应的顶点可以当作参考点。

例如，由例2的关联矩阵B可以看出，第1列表明边e_1是以V_1为起点，V_4为终点；第2列表明边e_2是以V_2为起点，V_4为终点；等等。如果划去第4行，基本关联矩阵可写成

$$B_K = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

这里将以顶点V_4作为参考点。

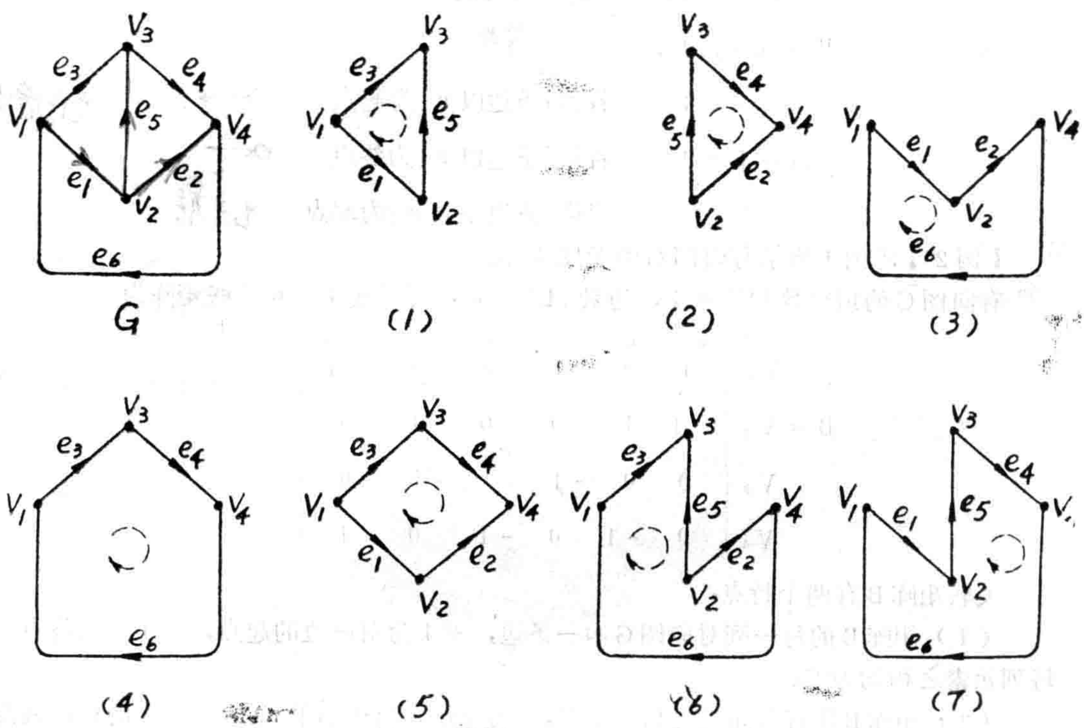
三、回路矩阵 回路集与边的关系

用来表示回路与边之间关系的回路矩阵可表述如下：

$$C = (c_{ij})_{p\times m}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{若回路 } c_i \text{ 中含有边 } e_j \text{ 且方向一致；} \\ -1, & \text{若回路 } c_i \text{ 中含有边 } e_j \text{ 且方向相反；} \\ 0, & \text{若回路 } e_i \text{ 中不包含边 } e_j \end{cases}$$

【例3】求例1中图G的回路矩阵。



例3　附图

对于例 1 中图 G，有 4 个顶点，7 条边，一共可以画出七个回路，如附图所示。假设回路方向按顺时针方向，可以写出回路矩阵如下

$$
C = \begin{array}{c} \text{回路} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix} \end{array}
$$

一个连通图究竟有多少个回路呢？设连通图 $G=(V,E)$ 的边数为 m，顶点数为 n，则树 T 必有 $n-1$ 条边；对应的余树的边数为边 $m-n+1$。对于树 T 每加上一条属于余树的边，它必然与 T 形成一条回路。由此可见，图 G 至少有 $m-n+1$ 条回路。从例 3 看出，边 e_1, e_2, e_5 构成一个树，边 e_3，e_4，e_6 是对应余树，它分别对应回路（1）、（2）和（3），这三个回路是独立回路，其它回路可以用它的线性结合来表达。由于独立回路数就是连支数，单连支和相应树支组成的回路就是基本回路。由此可知，在回路矩阵 C 中，其秩为 $m-n+1$，行向量不是线性独立的，根据 $m-n+1$ 个基本回路写出基本回路矩阵 C_k，其余回路均可从基本回路矩阵求得。比如，例 3 中图 G 的基本回路矩阵是

$$
C_k = \begin{array}{c} \text{基本回路} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \end{array}
$$

四、割集矩阵

割集独立关系

连通图 G 的割集和边的关联性质可以用一个割集矩阵 D 来描述。设图 G 的边数为 m，割集数为 q，则割集矩阵的阶数为 $q \times m$。

割集矩阵可以写成如下形式：

$$
D = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_q \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 \cdots\cdots & e_m \end{array} \\
\begin{bmatrix}
d_{11} & d_{12} \cdots\cdots & d_{1m} \\
d_{21} & d_{22} \cdots\cdots & d_{2m} \\
\vdots & & \\
d_{q1} & d_{q2} \cdots\cdots & d_{qm}
\end{bmatrix} \end{array}
$$

或　　$D = (d_{ij})_{q \times m}$

$$
d_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若割集 } S_i \text{ 含有边 } e_j \text{ 且为同向;}\\ -1, & \text{若割集 } S_i \text{ 含有边 } e_j \text{ 但方向相反;}\\ 0, & \text{若边 } e_j \text{ 不在割集 } S_i \text{ 中}\end{cases}
$$

为了定义割集矩阵，需要规定割集的方向。对连通图G来说，它的一个割集S_i把G的顶点V分为两个互不相交的集合V_1和$\overline{V}_1$。割集的方向是以顶点集合V_1，$\overline{V}$的有序对（$V_1,\overline{V}_1$）或（$\overline{V}_1,V_1$）来确定。如果一个割集S_i是按（$V_1,\overline{V}_1$）来定向的，则S_i的一条边（V_i，V_j），当其顶点V_i在V_1中，V_j在$\overline{V}_1$中，该边的方向就与S_i方向一致，否则就是相反。

【例4】求例1中图G的割集矩阵。

图G共有七个割集，各割集的方向在图中标出，其中割集S_1的方向由顶点集合$\{V_1\}$指向$\{V_2, V_3, V_4\}$，割集S_2的方向由顶点集合$\{V_1, V_2, V_4\}$指向$\{V_3\}$，割集S_3的方向由割点集合$\{V_1, V_2, V_3\}$指向$\{V_4\}$，割集S_7的方向由顶点集合$\{V_2, V_3\}$指向$\{V_1, V_4\}$，等等。割集矩阵可写为

$$
D=\begin{array}{cc}
\text{割集} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\
\begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\\S_7\end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

不难看出，上述割集矩阵D的行不是线性独立的，这就是说这七个割集不是独立的。割集矩阵的秩是$n-1$，也就是与基本关联矩阵B_K的秩相同。由于割集矩阵的秩是$n-1$因此没有必要把D的全部行都写出来。可用$(n-1)\times m$阶基本割集矩阵D_K来表示割集与边的关联性质，因为它包含了D的全部信息。我们知道，任何连支集合不能构成一个割集，因为把全部连支移去剩下一个树仍是连通的，所以每一个割集应至少包含一条树支。由一条树支与一些连支就构成一个割集，这种由树的一条树支与相应连支所构成的割集称为单树支割集或基本割集。一个树共有$n-1$条树支，因此就有$n-1$个独立的基本割集，割集方向一般取树支方向。