博采各地优秀的高考试题，启发学生的思维
试题蕴含深刻的思想，凝练解题的通性通法
问题经典，适合高考、自主招生的学生使用

浙大优学

高中数学经典题选

导数

党效文 安振平 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学经典题选
导　数

主　编　党效文　安振平
作　者　党效文　安振平　杨宏军
孙玲芳　焦小龙　朱　虹

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学经典题选．导数 / 党效文，安振平主编．
—杭州：浙江大学出版社，2014.4
ISBN978-7-308-12950-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①党… ②安… Ⅲ.①中学数学课—
高中—习题集 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 036051 号

高中数学经典题选·导数
党效文　安振平　主编

责任编辑　杨晓鸣　冯慈璜(特邀)
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江时代出版服务有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　14.5
字　　数　265 千
版 印 次　2014 年 4 月第 1 版　2014 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN978-7-308-12950-3
定　　价　30.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：(0571) 88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

出版说明

恢复高考至今已有30多年，期间沉淀了一批优秀的试题. 迈入21世纪以来，高考数学命题逐步放权，由全国统一卷演变一考多卷（近20个省市自主命题）. 所以，全国高考数学试题每年都有四五百道，新颖试题层出不穷. 作为高中数学教师，研究试题、精选试题便是必做的功课；作为学生总是千方百计搜集各种典型试题训练. 面对浩如烟海的题目，如何取舍便是一门学问. 如果胡子眉毛一把抓，搞题海战术，必然事倍功半，甚至浪费学生的宝贵时间. 但对数学而言，没有一定数量的训练很难深入理解数学的本质、核心，掌握数学的基本技能、技巧，可能出现眼高手低的现象. 那么，怎么选择、如何取舍？数学家的体会是读经典，通过经典试题的训练达到举一反三、触类旁通的效果.

浙江大学出版社在全国范围内组织教学一线特级教师、高级教师，反复研究历年高考试题，耗时三年时间，从浩瀚的题海精选了一批经典的高考数学试题，分成八个分册出版（集合与函数、三角函数与平面向量、数列、不等式、解析几何、立体几何、导数、排列组合与概率）. 我们选题原则，一必须是考试过的试题，经得起检验，没有科学性、知识性差错；二具有深刻的数学背景、数学思想或蕴含解决问题的通性通法；三具有典型性，具备一定的评价、测量功能.

鉴于时间匆促，不妥之处在所难免，请各位读者提出宝贵意见！

目　　录

1

第一章　极　限

第 1 节　函数的极限

1. 利用 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限的定义解题（12 题）

1. 一般地，当自变量 x 无限趋近于常数 x_0（但不等于 x_0）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 a，就说当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限为 a. 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$；或当 $x \to x_0$ 时，$f(x) \to a$.

注：当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是否存在极限与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关，因为 $x \to x_0$ 并不要求 $x = x_0$.（当然，$f(x)$ 在 x_0 处是否有定义也与 $f(x)$ 在 x_0 处是否存在极限无关. 故函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的既不充分又不必要条件.）

2. 如果 x 从 $x = x_0$ 的单侧无限趋近于 x_0 时，$f(x)$ 无限趋近于一个常数 a，那么 a 叫做 $f(x)$ 单侧的极限.

当 $x \to x_0^-$ 时，$f(x)$ 的极限 a_1 叫做左极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a_1$；

当 $x \to x_0^+$ 时，$f(x)$ 的极限 a_2 叫做右极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a_2$.

只有当 $a_1 = a_2 = a$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 才存在. 即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

显然，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ 是双侧极限.

1. 计算 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} =$　　　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 不存在

2. 计算 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9} =$ (　　)

A. $-\dfrac{1}{6}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

3. 若 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+3}{x^3+3} = 2$,则 $a =$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 下列命题正确的是 (　　)

A. 若 $f(x) = \sqrt{x-1}$,则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

B. 若 $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+2}$,则 $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -2$

C. 若 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

D. 若 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geqslant 0) \\ x+1 & (x < 0) \end{cases}$,则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

5. 计算 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2} - \dfrac{1}{x-1}\right) =$ ________ .

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1+x^2 & (x < 0) \end{cases}$,则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ______ .

7. 考察当 $x \to -1$ 时,函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的变化趋势,并求 $x \to -1$ 时的极限.

8. 求函数 $f(x) = 1 + \dfrac{|x+1|}{x+1}$ 在 $x = -1$ 处左、右极限,并说明在 $x = -1$ 处是否有极限?

9. 求下列函数在指定处的左极限、右极限,其中哪些函数在指定处极限不存在?

(1) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x+2}$(在 $x = -2$ 处);

(2) $h(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x \geqslant -2) \\ x+1 & (x < -2) \end{cases}$(在 $x = -2$ 处);

(3) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$(在 $x = 0$ 处).

10. 讨论下列函数在 $x = -2$ 的左极限、右极限,其中哪些函数在 $x = -2$ 处极限不存在?

(1)$g(x)=4x^3+3$；　　　(2)$v(x)=\begin{cases}x^2-3 & (x\geqslant -2)\\ x^3 & (x<-2)\end{cases}$.

11. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(\dfrac{1}{x}+3)^2-x(\dfrac{1}{x}+2)^3\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{9+x}-3}$.

12. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}(a>0$ 且 $b\neq 0)$.

2. 利用 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的定义解题（12 题）

1. 当自变量 x 取正值并且无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 a，就说当 x 趋向于正无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限是 a，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$（或当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to a$）.

2. 当自变量 x 取负值并且绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 a，就说当 x 趋向于负无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限是 a，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$（或当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to a$）.

3. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$，那么就说当 x 趋向于无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限是 a，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

4. 函数 $f(x)$ 的变化趋势与极限的关系见下表：

变化方式	自变量 x 的变化趋势		函数 $f(x)$ 值的变化趋势		极限表示
	从数值上看	从数轴 x 上看	从图象、表格上看	从 $\|y-a\|$ 看	
$x\to+\infty$	x 取正值并且无限增大	单方向，向右无限增大	$f(x)$ 无限趋近于常数 a	差式 $\|y-a\|$ 无限趋近于 0	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$
$x\to-\infty$	x 取负值并且绝对值无限增大	单方向，向左绝对值无限增大	$f(x)$ 无限趋近于常数 a	差式 $\|y-a\|$ 无限趋近于 0	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$
$x\to\infty$	x 取正值并且无限增大，x 取负值并且绝对值无限增大	双方向，向右无限增大和向左绝对值无限增大	$f(x)$ 无限趋近于常数 a	差式 $\|y-a\|$ 无限趋近于 0	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$

13. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^{5}}{(x^2+1)^{50}}=8$,则 a 的值为 ( )

A. 1 B. 2 C. $\sqrt[5]{8}$ D. 均不对

14. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}+2^n}=$ ________.

15. 计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=$ ________.

16. 若 $a>0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=$ ________.

17. 讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限.

(1)$y=\dfrac{1}{x}$; (2)$y=2^x$.

18. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-7x^2+6x-9}{5x^4+8x^3-7x+1}$.

19. 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}$.

20. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$.

21. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{2x^4-x-2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

22. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

23. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+4n-3}}{5n^2-4n+9}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+7^n+9^n+11^n}{5^{n+1}+7^{n+2}+9^{n+3}+11^{n+4}}$.

24. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}$.

3. 利用函数极限的四则运算法则解题(8 题)

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$，那么

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = a \pm b$，

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = a \cdot b$，

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

特别的(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$($C$ 为常数)，

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n (n \in \mathbf{N}^*)$，

(3) 这些法则对 $x \to \infty$ 的情况仍然成立，

(4) 两个常用极限$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$，$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

25. 设$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^\alpha} = \beta$，则 α，β 的数值为 (　　)

A. $\alpha = 1, \beta = \dfrac{1}{3}$　　B. $\alpha = 5, \beta = \dfrac{1}{3}$　　C. $\alpha = 5, \beta = \dfrac{1}{3^5}$　　D. 均不对

26. 已知 $m \in \mathbf{N}^*$，$a, b \in \mathbf{R}$，若$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^m + a}{x} = b$，则 $a \cdot b =$ (　　)

A. $-m$　　B. m　　C. -1　　D. 1

27. 计算$\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 2x - 3)$.

28. 计算$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

29. 计算 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x - 7}{2x^2 + 5x - 9}$.

30. 计算$\lim\limits_{x \to 2}(3x - 1)$.

31. 计算$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x^5 - x + 3}$.

32. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2(\sin x - \cos x - x^2)$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

4. 求“$\frac{0}{0}$”型函数的极限(14 题)

要分别通过“约去使分母为零的因式、同除以分子、分母的最高次幂、有理化分子”等变形,转化为极限存在的式子再求极限.

33. 计算$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

34. 计算$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 不存在

35. 计算$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}=$ ________.

36. 计算$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}=$ ________.

37. 计算$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(x-\pi)\cos x}{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}=$ ________.

38. 计算$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=$ ________.

39. 计算$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$ ________.

40. 计算$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

41. 求$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

42. 计算$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7-1}{x^{10}-1}$.

43. 计算$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

44. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$;　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;　(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

45. 求极限$\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

46. 求极限 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+7x^2+16x+12}$.

5. 求"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型函数的极限(5 题)

要分别通过"约去使分母为无穷大的因式、同除以分子、分母的最高次幂、有理化分子"等变形,转化为极限存在的式子再求极限.

47. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2004n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$ (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

48. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n(1+2+3+\cdots+n)}=$ (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

49. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+a)n+1}{n+a}=2$,则 $a=$ ________.

50. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

51. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}$.

6. 求"$\infty-\infty$"型函数的极限(6 题)

求解 $\infty-\infty$ 型极限通常是分子有理化或将分母进行通分,以消去分母中的零因子,从而解出函数极限.

52. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1})=$ (　　)

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. ± 1

53. 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=$ ________.

54. 若 a 为常数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-ax)=0$,则 a 的值是________.

55. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

56. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

57. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-3}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

7. 函数极限的综合应用(18 题)

58. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 a 的值为 ( )

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

59. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2+x+1}{bx^2+2x}=2012$,则动点 $M(a,b)$ 描绘的图形是 ( )

A. 直线　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

60. 若$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^2}\right)=1$,则常数 a,b 的值为 ( )

A. $-2,-4$　　B. $2,-4$　　C. $-2,4$　　D. $2,4$

61. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=0$,则 $a=$ __________,$b=$ ____________.

62. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na]}{[nb]}$($b\neq 0$,$[x]$ 为不超过 x 的最大整数).

63. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+n+1}{3-5n^2}=\dfrac{5}{2}$,求常数 a 的值.

64. 若 $f(x)=\begin{cases}2x+b & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ 1+2^x & (x<0)\end{cases}$,试确定 b 的值,使$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.

65. 已知$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+mx+2}{x+2}=n$，求 m,n 的值.

66. 若 $f(x)$ 为多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3}{x^2}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5$,求 $f(x)$.

67. 设$\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2-3x+1}+ax)=b$,求 a,b.

68. 已知 $f(x)=\begin{cases}a\sin x+b & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ \cos x+1 & (x<0)\end{cases}$,当 a,b 取何值时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,其值为多少.

69. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一个偶函数,且$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to -2}f(x)=-3$,求出这一函数的最大值.

70. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

71. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{(x+1)^3}$；　　(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-r^x}{1+r^x}(r>0)$；

72. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+3}}$.

73. 求满足条件 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ 的实数 a 与 b.

74. 已知函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-x^n}{2^n+x^n}$，试求：

(1) $f(x)$ 的定义域，并画出图象；

(2) $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$，并指出 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ 是否存在.

75. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

第 2 节　数列的极限

1. 利用数列极限的定义解题（26 题）

1. 一般地，如果当项数 n 无限增大时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 无限地趋近于某个常数 a 时（即 $|a_n-a|$ 无限地接近于 0 时），那么就说数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，或者说 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，表示为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

2. 数列极限的表示方法

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$；　　(2) 当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$.

3. 几个常用极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$　（$k\in\mathbf{N}$，k 是常数）.

(3) 对于任意实常数 a，

当 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$；

当 $|a|=1$ 时，若 $a=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$；若 $a=-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在；

当 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ 不存在.

1. 下列数列中，不存在极限的是　　（　　）

A. $1,-\frac{1}{8},\frac{1}{27},\cdots,\frac{(-1)^{n-1}}{n^3},\cdots$　　B. $\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},\cdots,\frac{1}{n(n+1)},\cdots$

C. $-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$　　D. $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$

2 下列极限正确的个数是　　(　　)

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$　　② $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($q$ 为常数)

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}=-1$　　④ $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$ 为常数)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 都不正确

3. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{n+2})\right]=$　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 命题:① 单调递减的无穷数列不存在极限;② 常数列的极限是这个常数本身;③ 摇摆的无穷数列不存在极限. 以上命题正确的个数是　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-a}{2a}\right)^n=0$,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $a=1$　　B. $a<-1$ 或 $a>\frac{1}{3}$

C. $-1<a<\frac{1}{3}$　　D. $a<-\frac{1}{3}$ 或 $a>1$

6. 已知数列$\{\log_2(a_n-1)\}(n\in\mathbf{N}^*)$为等差数列,且 $a_1=3,a_2=5$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n})=$　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

7. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1^2\times 2^2}+\frac{5}{2^2\times 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\times(n+1)^2}\right]=$　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

8. 已知二次函数 $y=a(a+1)x^2-(2a+1)x+1$,当 $a=1,2,\cdots,n,\cdots$ 时,其抛物线在 x 轴上截得的线段长依次为 $d_1,d_2,\cdots,d_n,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(d_1+d_2+\cdots+d_n)$的值是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 数列的通项公式为 $a_n=(3-5x)^n$,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,则 x 的取值范围是

________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$ ________.

11. 数列$\{\frac{1}{4n^2-1}\}$的前n项和为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ______.

12. 判断下列数列是否有极限，若有，写出极限；若没有，说明理由.

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ ；

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$；

(3) $-2,-2,-2,\cdots,-2,\cdots$；

(4) $-0.1,0.01,-0.001,\cdots,(-0.1)^n,\cdots$；

(5) $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

13. 观察下列数列的变化趋势，并写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$；　　(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$；

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$；　　(4) $x_n=4$.

14. 判断下列命题的真假.

(1) 数列$0,1,0,1,\cdots,\frac{1+(-1)^n}{2},\cdots$的极限是0和1.

(2) 数列$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},-\frac{1}{2^3},\cdots,(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$的极限是0.

(3) 数列$\sin 1,\sin\frac{1}{2},\sin\frac{1}{3},\cdots,\sin\frac{1}{n},\cdots$的极限不存在.

(4) 数列$1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^{10000}}$的极限是0.

15. 已知数列$1.9,1.99,1.999,\cdots,1.\overbrace{99\cdots99}^{n个},\cdots$.

(1) 写出它的通项a_n；

(2) 计算$|a_n-2|$；

(3) 第几项以后所有的项与2的差的绝对值小于0.01?

(4) 第几项以后所有的项与2的差的绝对值小于0.001?

(5) 指出这个数列的极限.

16. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+2}+(m+2)^n}=\frac{1}{16}$，求实数$m$的取值范围.