高等学校试用教材

线性规划

殷沐雨　陆汉京　马进军　编著

中国商业出版社

经济数学基础（四）

线　性　规　划

殷沐雨　陆汉京
马[illegible]军　编著

＊经济数学基础之一＊

线性规划

殷沐雨　陆汉京
马进军　编著

＊

中国商业出版社出版　中南发行站发行
湖南商业专科学校印刷厂印刷

＊

850×1168　32开　6.75印张　169千字
1988年9月第1版　1988年9月长沙市第1次印刷
印数：1—5000册
统一书号：9237·007　定价1.80元

前　言

一九八五年十一月在扬州召开的全国商业专科学校数学研究会上，决定编写一套体现经济类专科学校特色的《经济数学基础》教材。内容力求简明扼要，通俗易懂，编选了数学在经济中应用的实例，每章都附有一定数量的习题，在附录中给出了部分习题答案和提示。带*号的章节为选学内容，删舍后不影响全书的连贯性，本书可作为经济类专科学校各专业的教材，也可供电大、职大作为教学参考书，亦可供经济管理部门的职工数学教学和自学使用。

全书共分四册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》，全部讲完约需200个学时。参加本书编写的有殷沐雨、陆汉京、马进军等同志，由殷沐雨主编，周晓三主审。

本书在编写和成稿过程中，得到全国各商业专科学校数学教研室老师们的大力支持。初稿完成后，充分听取了兄弟学校老师们的意见和建议，使本书添色不少，在此向他们表示衷心的感谢。

本书还得到湖南大学应用数学系副教授胡锡炎，郭忠两位先生的热情关心和指导。湖南商业专科学校数学教研室的同志们为本书做了许多技术性的工作，谨在此致谢。

由于编写者水平有限，加上编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

《经济数学基础》编委会

一九八七年六月

目　　录

第一章　线性规划问题的数学模型及解

§1.1　线性规划绪论

线性规划是运筹学的重要分支之一。虽然运筹学的某些分支的创立可以追溯到本世纪初期，但是运筹学这一名称最早却是在第二次世界大战期间提出的。在三十年代后期，英国为了研究空防预警系统的有效使用问题，成立了第一个运筹学小组，他们所研究的问题大都是一个复杂系统的有效使用问题，这类问题当时起名为“Operational Research”。1942年，美国也成立了运筹学小组，所研究的问题大都与军事有关，也取得了成功的经验。我国运筹学工作者从“运筹策帷幄之中，决胜于千里之外”一语中取“运筹”二字作为这门科学的名称，表示其渊源于军事。

二次世界大战之后，运筹学的研究对象已不只局限于军事问题，大都是经济管理方面的问题，即研究在一定的条件下，如何改善经营管理，以获得最佳的经济效益。

现在，运筹学方法广泛地应用于经济管理的各个领域，运筹学本身也获得了坚实的数学基础，在理论上日趋完善、成熟，现在运筹学已发展成为包括许多分支在内的庞大学科。一般认为，运筹学的主要分支有规划论（包括线性规划、非线性规划、整数规划，多目标规划、动态规划等）、排队论、存贮论、对策论（亦称博奕论）与决策分析、模型论等分支。线性

规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用较广、比较成熟的一个分支。

研究线性规划问题最早的是苏联数学家康托洛维奇（Ė.Канторович）早在1939年，他从运输问题入手开始研究，写出了《生产组织与计划中的数学方法》一书，在书中讨论了运输问题和下料问题等线性规划问题，但未给出一般地有效的解法。与此同时，美国的希奇柯克（F.L.Hitchcock）、柯普曼（T.C.Korpmans）也讨论了类似的问题，到1947年，美国数学家旦茨基（G.B.Dantzig）进一步研究了这方面的问题，发明了求解线性规划问题的单纯形解法，从而使线性规划的理论和方法得到较快的发展，为线性规划作为一门学科奠定了基础。D.盖尔（D.Gale）、库恩（H.W.Kuhn）和塔克（T.W.Twker）在发展对偶理论上作出了重要贡献。从而使线性规划成功地运用于工业、农业、交通、财贸和军事等各方面。随着电子计算机的迅速发展和广泛应用，线性规划的理论和方法在经济领域中的应用更为迅速。据美国国际商用电子计算机公司1970年的统计，在计算机上进行的科学计算中，约有25%用到了线性规划及其有关的方法。

我国在这方面的研究开始于50年代，并在实践中创造了物资调运的图上作业法，丰富了线性规划的内容。图上作业法直观易懂，便于推广，对我国线性规划方法的普及起了积极作用。

线性规划所研究的问题，一方面是在任务一定的情况下，如何进行统筹安排，使人力、物力消耗最少、成本最低；另一方面是在人力、物力一定的条件下，怎样合理使用它们，使所完成的任务最多、经济效益最大。这是一个问题的两个方面，总的来说，就是要用最少的消耗换取最大的经济效益。这样的问题广泛地存在于工农业生产、交通运输、商业贸易、管理会计、计划统计等各项经济活动中。比如，物资最佳调运问题，

资源最优利用问题、进销库余问题、生产任务的分配问题，等等，都是这方面的典型问题。这些问题的研究，对于进行科学管理、提高经济效益，加速现代化建设都具有非常现实的意义。

§1.2 线性规划问题的数学模型

线性规划所能解决的问题是各式各样的，为了寻求解能决这些问题的一般方法，必须研究它们的共同性质并抽象为数学模型，进而利用数学方法和电子计算机解决问题。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式。下面通过几个具体经济问题的分析来介绍如何建立线性规划问题的数学模型。

一、资源最优利用问题

决策人员在企业的经营管理中，总想充分运用自已能够调动的资源，包括原材料、能源、设备、人力等等，以最少的消耗获得最大的经济效益。在资源有限的条件下，如何科学地安排生产计划，以便能够充分合理地利用这些资源，使获得的产品总值（或利润）最大，或使产品成本最低等等。这就是企业管理人员需要研究的资源最优利用问题。

例1.某工厂生产甲、乙两种产品，根据这个工厂的生产条件及过去的经验知道，生产1吨甲产品需要消耗煤9吨、电力4千瓦、劳动力3个。生产1吨乙产品需要消耗煤4吨、电力5千瓦，劳动力10个。而1吨甲产品的价格为70元，1吨乙产品的价格为120元。现在这个工厂有煤360吨、电力200千瓦、劳动力300个，问在这种条件下应生产甲、乙两种产品各多少，才能使所获得的产值最大？

为了使问题中的各种关系清晰直观，通常把甲、乙产品对各种资源的消耗定额、产品的单价以及现有各种资源的数量列成表格（表1—1）如下：

表1—1

消耗定额 产品 / 资源	甲	乙	现有资源数
煤（吨）	9	4	360
电力（千瓦）	4	5	200
劳动力（个）	3	10	300
单价（元/吨）	70	120	

设x_1与x_2分别表示甲、乙两种产品的计划生产量，S为总产值。按照这个计划进行生产共需要消耗煤$9x_1+4x_2$，电力$4x_1+5x_2$，劳动力$3x_1+10x_2$，根据消耗的数量不能超过现有资源数量的关系，可列出不等式，即：

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360 \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 \end{cases}$$

因为甲、乙两种产品的计划生产量不能为负数，所以有$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，又要求所获得的总产值最大，就是要二元函数

$S=f(x_1, x_2)=70x_1+120x_2$的值最大。

因此，这个问题可以构造成如下形式的数学模型。

求x_1，x_2的值，使它们满足条件组

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360 \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

并使二元函数 $S=f(x_1,x_2)=70x_1+120x_2$ （2）的值最大。

在线性规划问题的数学模型中，通常把所设的变量x_1，x_2称为决策变量，并称条件组（1）为约束条件，多元函数式（2）为目标函数。

资源最优利用问题的一般提法：

设用A_1，A_2，……，A_m种资源，可以生产B_1，B_2，……，Bn种产品，各种资源的现有数为b_1，b_2，……b_m，各种产品的单价为C_1，C_2，……Cn，产品B_j对资源Ai的消耗定额为a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），把这些数据列成表格，如表1—2所示。

表1—2

消耗定额 产品 / 资源	B_1　B_2　$\cdots B_n$	现有资源数
A_1	a_{11}　a_{12}　$\cdots a_{1n}$	b_1
A_2	a_{21}　a_{22}　$\cdots a_{2n}$	b_2
…	……	…
A_m	a_{m1}　a_{m2}　$\cdots a_{mn}$	b_m
单　价	c_1　c_2　$\cdots c_n$	

问在现有资源条件下，如何组织生产，才能获得最大的产值

设x_j为B_j种产品（$j=1, 2, \cdots n$）的计划生产数量，那么资源最优利用问题的一般数学模型为：

求x_j的值（$j=1, 2, \cdots, n$）使它满足：

约束条件
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \text{（生产各种产品消耗资源}A_1\text{的总数不超过现有数}b_1\text{）} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \text{（生产各种产品消耗资源}A_2\text{的总数不超过现有数}b_2\text{）} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ \text{（生产各种产品消耗资源}A_m\text{的总数不超过现有数}b_m\text{）} \\ x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0 \\ \text{（各种产品的计划生产数不能为负数）} \end{cases}$$

并使目标函数 $S=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$的值最大（总产值最大）。

利用和号Σ，上述模型可化简化表示为

求x_j（$j=1, 2, \cdots n$）的值，使它们满足

约束条件
$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

并使目标函数 $S=\sum\limits_{j=1}^{n} C_jx_j$的值最大。

二、物资最佳调运问题

物资的合理调运是关系到工厂生产、市場供应和运输部门经济效益的重要问题。实现物资的最佳调运，能够节约费用和时间，并能充分利用现有的运输工具，对促进生产，活跃市場都起着重要作用，因此，研究最佳运输方案具有很大的经济价值。

例2　某种商品有A_1，A_2，A_3三个产地，要将这三个产地的商品调往B_1、B_2、B_3、B_4四个销地（假设产销平衡），A_1、A_2、A_3三个产地的产量（单位：吨），B_1、B_2、B_3、B_4四地的销量（单位：吨）以及各产地运到各销地的单位运价（单位：元/吨）如表1－3所示：

表1－3

单位运价　销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销　量	3	6	5	6	20

问如何调运，才能使所花费的总运费最省？

设由A_1运往B_1、B_2、B_3、B_4的数量分别为x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{14}；由A_2运往B_1、B_2、B_3、B_4的数量分别为x_{21}、x_{22}、x_{23}、x_{24}、；由A_3运往B_1、B_2、B_3、B_4的数量分别

调为x_{31}、x_{32}、x_{33}、x_{34}；根据收发量相等的条件，以及运量不能是负值的要求，可得数学模型：

求 x_{ij}（$i=1$、2、3；$j=1$、2、3、4）的值，使它们满足

约束条件

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7$

（A_1运往各地的数量之和等于A_1的产量）

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4$

（A_2运往各地的数量之和等于A_2的产量）

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9$

（A_3运往各地的数量之和等于A_3的产量）

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3$

（A_1、A_2、A_3运往B_1的数量之和等于B_1的销量）

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=6$

（A_1、A_2、A_3运往B_2的数量之和等于B_2的销量）

$x_{13}+x_{23}+x_{33}=5$

（A_1、A_2、A_3运往B_3的数量之和等于B_3的销量）

$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6$

（A_1、A_2、A_3运往B_4的数量之和等于B_4的销量）

$x_{ij}\geqslant 0$（$i=1$、2、3；$j=1$、2、3、4；）

（调运量不能为负值）

并使目标函数 $S=3x_{11}+11x_{12}+3x_{13}+10x_{14}+x_{21}+9x_{22}+2x_{23}+8x_{24}+7x_{31}+4x_{32}+10x_{33}+5x_{34}$ 的值最小（总运费最少）。

物资最佳调运的一般提法：

设某种物资有m个始发点：A_1、A_2、……，A_m，其发量分别为a_1，a_2，…，a_m；有n个接收点：B_1，B_2，……，B_n；

其收量分别为b_1，b_2，……b_n；（$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$）

始发点A_i（$i=1$，2，……，m）运往接收点B_j（$j=1$，2，……n）的单位运价（或者A_i到B_j的距离）为C_{ij}，如表1—4所示：

表1—4

单位运价（元/吨）收点 / 发点	B_1 B_2 …… B_n	发量（吨）
A_1	C_{11} C_{12} …… C_{1n}	a_1
A_2	C_{21} C_{22} …… C_{2n}	a_2
……	……	…
A_m	C_{m1} C_{m2} …… C_{mn}	a_m
收量（吨）	b_1 b_2 …… b_n	

问应如何调运，才能使总运费最少（或吨公里最小）？

设由始发点A_i运往接收点B_j的数量为x_{ij}（$i=1$，2，……，m；$j=1$，2，……n）则上述运输问题的数学模型为：

求x_{ij}的值（$i=1$，2，……m；$j=1$，2，……，n），使它们满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\cdots\cdots+x_{1n}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{2n}=a_2\\
\cdots\cdots\\
x_{m1}+x_{m2}+\cdots\cdots x_{mn}=a_m\\
x_{11}+x_{21}+\cdots\cdots+x_{m1}=b_1\\
x_{12}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{m2}=b_2\\
\cdots\cdots\\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots\cdots+x_{mn}=b_n\\
x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots\cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots\cdots,\ n\ )
\end{cases}
$$

并使目标函数 $S=C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\cdots\cdots+C_{1n}x_{1n}+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}+\cdots\cdots+C_{2n}x_{2n}+\cdots\cdots+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\cdots\cdots+C_{mn}x_{mn}$的值最小。

用Σ表示为：

求x_{ij}的值($i=1,2,\cdots\cdots,m,j=1,2,\cdots\cdots,\ n$)使它们满足

约束条件

$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$

（始发点A_i发到各接收点的发量总和应等于A_i的发货量）

$\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$，

（各始发点发到接收点B_j的发量总和应等于B_j的收量）

$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m;\ j=1,2,\cdots\cdots,\ n)$

（调运量不能为负数）

并使目标函数$S=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$的值最小。

如果运输问题中，没有$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$这一限制，在$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i>\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$的情况下，这一问题的数学模型应为：

求一组变量x_{ij}（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,$

n）的值，使它们满足：

约束条件
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \\ \text{（始发点}A_i\text{发到各销地的发量总和不超过}A_i\text{的发量）} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \\ \text{（各始发点到接收点}B_j\text{的发量总和应等于}B_j\text{的收量）} \\ x_{ij} \geqslant 0 \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,n) \\ \text{（调运量不能为负数）} \end{cases}$$

并使目标函数$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$的值最小。

当$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$的情况下，类似地有如下的数学模型：

求一组变量x_{ij}（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）的值，使它们满足：

约束条件
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \\ \text{（始发点}A_i\text{发到各销地的发量总和应等于}A_i\text{的发量）} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j \ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \\ \text{（各始发点发到接收点}B_j\text{的发量总和不超过}B_j\text{的收量）} \\ x_{ij} \geqslant 0 \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,m,\ j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n) \\ \text{（调运量不能为负数）} \end{cases}$$

并使目标函数$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$的值最小。

三、进销库余问题

商业部门在制定商品的采购与销售计划时，为了保障供给，必须要储存一定数量的商品。如何合理地制定采购、库存与销售的计划，达到促进资金周转、降低支出、增加利润的目的。这就是商业部门管理人员需要研究的商品进销库余问题。

例3．某商店制定某种商品7－12月进货售货计划，已知商店仓库容量不得超过500件，6月底已存货200件，以后每月初进货一次，经预测各月份某商品买进售出单价如表1－5所示，问各月进货、售货各多少，才能使总收入最多？

表1－5

月	7	8	9	10	11	12
买进（元）	28	24	25	27	23	23
售出（元）	29	24	26	28	22	25

设7－12月份各月初进货数量为x_i件，而各月售货数量为y_i件（i＝1，2，……，6），S为总收入。

按照这个计划安排进销，根据每个时期的销售量不能大于期初库存量与每个时期的进货量之和的关系，可列出不等式组：

$$\begin{cases} y_1 \leqslant 200+x_1 \\ y_2 \leqslant 200+x_1-y_1+x_2 \\ y_3 \leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3 \\ y_4 \leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4 \\ y_5 \leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4 \\ \qquad -y_4+x_5 \\ y_6 \leqslant 200+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4 \\ \qquad -y_4+x_5-y_5+x_6 \end{cases}$$