21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU

# 线性代数

王 娟 李秋颖◎编著

中国人民大学出版社

# 线性代数

21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU

# 线性代数

王 娟 李秋颖◎编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/王娟，李秋颖编著. —北京：中国人民大学出版社，2014.11
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-20216-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王…②李… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 243120 号

21 世纪高等院校创新教材
**线性代数**
王娟　李秋颖　编著
Xianxing Daishu

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511770（质管部） |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京民族印务有限责任公司 | | |
| **规　　格** | 185 mm×260 mm　16 开本 | **版　　次** | 2015 年 1 月第 1 版 |
| **印　　张** | 8.25 插页 1 | **印　　次** | 2015 年 1 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 190 000 | **定　　价** | 18.00 元 |

# 内容简介

本书根据独立学院经管类专业线性代数课程的教学大纲编写而成，考虑到独立学院学生的特点，内容设计更简明，但结构体系上又不失完整，其中包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等知识。本书弱化定理的证明，注重基础知识的训练，配套习题便于学生课上练习以及课下复习。

本书适合高等院校少课时专业、独立学院、高职院校作为相应专业的数学基础课程教材。

# 前　言

本书根据独立学院教学现状，结合日常教学经验编写而成，其中包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型等知识. 本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院的办学特色及教学需求，适当降低理论难度，强化概念与实例的结合；突出运算方法，强化基本技能的训练而不过分追求技巧，突出解决问题的思想方法，强化基本题目的训练，从而提高学生对数学学习的兴趣，有利于学生能力的发展，体现新的教学理念.

本书由李秋颖和王娟编著而成，第一、二章由李秋颖完成，第三、四章由王娟完成，在编写过程中张银生教授、张智广副教授、姚静副教授给予了很多的建议与帮助，教研室邓铁婧老师对于题目的搜集付出了辛苦的劳动，王天宝老师对于促成本书的出版提供了支持，在此一并感谢.

由于本书作者水平有限，如有不妥之处，敬请广大师生不吝指正.

# 目　　录

# 第一章

# 行列式

行列式是 $n^2$ 个元素按 $n$ 行 $n$ 列排成数表并按指定规则计算得到的一个数值或表达式，它源于解特殊的线性方程组（方程个数与未知量个数相等），1750 年，瑞士数学家克莱姆将它总结为解线性方程组的重要方法——克莱姆法则. 本章我们将系统介绍行列式的概念、运算并在最后给出方程组解的一般理论——克莱姆法则.

## §1.1 二阶与三阶行列式

中学我们就学过解二元一次方程组、三元一次方程组. 我们用到的主要方法是：消元法. 但当未知量个数较多时，消元法的运算量明显增加. 能不能找到一个求解二元一次方程组、三元一次方程组等 $n$ 元线性方程组的一个公式形式的解法呢?

我们先从二元一次方程组入手. 利用加减消元法，我们很容易得到二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}, \tag{1.1}$$

其解为$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0.$

大家一定疑惑，这么容易就能得到的公式，为什么以前不讲呢? 问题是这个公式很难记住. 一个公式如果很难记住，它的作用自然不能很好地发挥. 当我们引入行列式的概念时，改变一下这个公式的形式，这个公式就很容易记住，上面的公式用起来就灵活了.

### 一、二阶行列式

**定义 1.1** 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{11}$，$a_{12}$，$a_{21}$，$a_{22}$ 叫做行列式的**元素**，横排叫**行**，竖排叫**列**. 元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 叫做**行标**，表明该元素位于第 $i$ 行，第二个下标 $j$ 叫做**列标**，表明该元素位于第 $j$ 列. 二阶行列式的运算规律称为**"对角线法则"**，其中，把 $a_{11}$ 到 $a_{22}$ 的连线称为**主对角线**，把 $a_{12}$ 到 $a_{21}$ 的连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式就等于主对角线上元素之积减去副对角线上元素之积. 在有了二阶行列式的记号后，上述方程组（1.1）的求解公式就可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为系数行列式，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}(\text{与 } x_1 \text{ 的解对应})，D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}(\text{与 } x_2 \text{ 的解对应})，$$

当 $D\neq 0$ 时方程组有解，为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，此时公式就变得简单且易记.

**注** 从形式上看，这里分母 $D$ 是由方程组（1.1）的未知量系数所确定的二阶行列式，$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1$，$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}$，$a_{21}$ 所得的二阶行列式，$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1$，$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}$，$a_{22}$ 所得的二阶行列式.

**例 1** 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-12 \\ x_1+2x_2=1 \end{cases}$.

**解** 由系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0,$$

知方程组有解，又

$$D_1=\begin{vmatrix} -12 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-21,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14,$$

故所求方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{14}{7}=2$.

受二元一次方程组求解的启发，三元乃至 $n$ 元的一次方程组应该也有类似的公式解，只要合理定义三阶行列式、$n$ 阶行列式即可.

## 二、三阶行列式

**定义 1.2** 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**. 简记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，此法称为对角线法.

**例 2** 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**解** 由定义

$$\begin{aligned} D &=1\times4\times1+2\times(-2)\times(-2)+(-4)\times(-3)\times2 \\ &\quad -(-4)\times4\times(-2)-(-2)\times2\times1-2\times(-3)\times1 \\ &=14. \end{aligned}$$

**例 3** 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

**解** 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-6+2-(-1)-4-(-3)=-5\neq0,$$

故方程组有解，又

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=1$.

**例 4** 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

**解** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=(x-2)(x-3)=0$，所以有 $x_1=2$，$x_2=3$.

# §1.2 $n$ 阶行列式

由于解线性方程组的需要，我们可以仿照§1.1的方法定义四阶行列式乃至更高阶行列式. 但我们发现，计算三阶行列式的对角线法则已经很复杂，同时，对四阶及更高阶行列式的计算，已没有对角线法则，那又应该如何计算呢? 因此我们需要在总结二、三阶行列式计算规律的基础上，给出更具一般性的算法. 从三阶行列式的结果可发现：

(1) 三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和；

(2) 每项是行列式中不同行不同列的 3 个元素的乘积；

(3) 每项有确定的符号，正负各占一半.

由此可得，$n$ 阶行列式的值是不同行不同列的 $n$ 个元素乘积的代数和，共有 $n!$ 项，其中$\frac{n!}{2}$项符号为正，$\frac{n!}{2}$项符号为负. 为了说明符号的确定原则，我们要先介绍全排列及其逆序数，然后再给出 $n$ 阶行列式的完整定义.

## 一、排列与逆序

大家知道，由 1，2，3，4 四个数字构成的没有重复数字的排列共有 24 种，如 1234，3214，….

**定义 1.3** 由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的没有重复数字的每一种有确定顺序的排列，称为一个 ***n* 级排列**（简称为排列），其中，$123\cdots n$ 称为自然顺序排列.

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，12543 是一个 5 级排列.

**定义 1.4** 在一个 $n$ 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 $i_t$ 与 $i_s$ 构成一个逆序. 一个 $n$ 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，排列 1234 中没有一个逆序，故它的逆序数为 0；排列 3214 中有 3 个逆序 $(3, 2)$，$(3, 1)$，$(2, 1)$，故排列 3214 的逆序数为 3.

根据定义，在计算排列的逆序数时，可将每个元素与排在它前面的元素组成的逆序求和.

**例 1** 计算排列 32541 的逆序数.

**解** 从排列第二个位置上的数开始，逐个与它前面的所有数字比较，看是否构成逆序.

排在 2 前面且比 2 大的数有 1 个，故构成 1 个逆序；

排在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故构成 0 个逆序；

排在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故构成 1 个逆序；

排在 1 前面且比 1 大的数有 4 个，故构成 4 个逆序；

从而所求排列的逆序数为 $N(32541)=1+0+1+4=6$.

**例 2** 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

**解** $N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

**定义 1.5** 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

**例 3** 判断排列 32541 的奇偶性.

**解** 由例 1 可知 $N(32541)=6$，故其为偶排列.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

**定义 1.6** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **$n$ 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然数排列后，对应列标构成的排列的逆序数作为 $-1$ 的指数，以此来决定该项的符号，即当列标构成的排列为偶排列时取正号；为奇排列时取负号. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对列标所有的 $n$ 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项.

这里的定义对于 $n=2$, 3 同样适用. 特别地，当 $n=1$ 时，得到一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$（注意不要与绝对值混淆）.

一般来说，高阶行列式不能用定义的方法计算其值，因为计算量太大，但有些特殊的行列式用定义计算还比较容易.

**例 4** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & d \end{vmatrix}$.

**分析：** 按定义，行列式的值应为取自不同行不同列的元素乘积的代数和. 观察本题发现这个四阶行列式每行及每列都含有较多的 0，而在乘积运算中，若选到一个零元素，则结果为零，故行列式最后的取值应取决于非零元素乘积的代数和. 这样，从零最多的第三行考虑，只能取第二列上的 $c\neq 0$，而其他行就不能再取第二列的元素，这就影响第一行要想取到非零元素，只能取第四列上的 $a\neq 0$，而再往后二、四两行元素的选择，就不能选择第二、四列，所以第四行能选的非零元为第三列上的 $d\neq 0$，第二行能选的非零元为第一列上

的 $b\neq0$，这是唯一能够保证每行、每列都不选择零元素的唯一方案，故

**解** $D=\begin{vmatrix}0&a&0&a\\b&0&b&0\\0&c&0&0\\0&0&d&d\end{vmatrix}=(-1)^{N(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=(-1)^{N(4123)}abcd=-abcd.$

**例 5** 计算三角形行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

(2) $D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

(3) $D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&0&0\end{vmatrix}$.

(4) $D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$.

**解** (1) 分析：$n$ 阶行列式的一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，考虑不为零的项，$a_{nj_n}$ 取自第 $n$ 行，只有 $a_{nn}\neq0$，故 $j_n=n$；$a_{n-1,j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，有 $a_{n-1,n-1}\neq0$，$a_{n-1,n}\neq0$，因 $j_n=n$，故 $j_{n-1}=n-1$；同理，$j_{n-2}=n-2$，…，$j_1=1$，从而，不为零的一般项只有

$$(-1)^{N(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式的特点是主对角线以下的元素都是零（$i>j$，$a_{ij}=0$），这种行列式称为**上三角形行列式**.

(2)与 (1) 的解法类似，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式的特点是主对角线以上的元素都是零($i<j$，$a_{ij}=0$)，这种行列式称为**下三角形行列式**.

**一般的，$n$ 阶三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.**

类似地，可将上述行列式变形为以副对角线为分界的三角形行列式，其结果为副对角线上元素的乘积，但应注意符号项的确定. 仿照 (1)、(2) 的解法，可解下面的 (3)、(4).

(3) $D=(-1)^{N(n\ (n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1}$.

(4) $D=(-1)^{N(n\ (n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1}$.

**例 6** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都是 0.

**解** 因该行列式既是上三角形，又是下三角形，可按 (1) 或 (2) 的结果计算，故

$$D=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

**注** 只有主对角线上元素非零的行列式称为**对角行列式**，其值等于主对角线上元素的乘积.

同理 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

**归纳小结：** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(上三角形行列式)，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,\ n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\text{(下三角形行列式)},$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,\ n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,\ n-1}\cdots a_{n1}.$$

# §1.3 行列式的性质与计算

在§1.2中给出了关于$n$阶行列式的一般定义，发现对四阶及更高阶的行列式，只能计算一些特殊形式的行列式，而对一般的行列式，我们该如何有效地处理呢？为此，我们有必要系统地研究一下它的性质，以解决我们的问题. 在行列式的定义中，涉及排列的逆序数，因此要研究行列式的性质，我们先要研究与排列逆序数有关的性质.

## 一、对换

**定义1.7** 在排列中，对调两个元素的位置，而其余的元素不动，这样的操作称为**对换**. 相邻元素的对换，称为**相邻对换**.

**定理1.1** 一次对换改变排列的奇偶性.

**注1 相邻对换改变排列的奇偶性.**

如将排列52314中相邻数字3、1对换，得到排列52134。此次相邻对换对于排列逆序数的影响可理解为：数字3与数字5、2、4；数字1与数字5、2、4及数字5、2、4之间的逆序均不受影响，而只有3、1原来构成逆序，现在不是. 从而排列逆序数减少一个，奇偶性必然改变. 同理，对于其他任何相邻两数字的对换，对排列逆序数的影响也只体现为减少一个或增加一个，而这样奇偶性必然改变.

**注2 一般对换可通过奇数次相邻对换来实现.**

如排列465321对换数字2、6，得到排列425361，这一对换可分解为6与5、3、2的3次相邻对换，而成排列453261，然后再由2与3、5的2次相邻对换而得到. 这样就一共做了5次相邻对换，排列的奇偶性必然改变.

**推论** 奇数次对换改变排列的奇偶性；偶数次对换不改变排列的奇偶性.

下面考虑另外一个问题：现有两个排列

$$\begin{cases} i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n \end{cases}$$

同时做对换

$$\begin{cases} i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n \end{cases} \to \begin{cases} i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n \end{cases},$$

那么它们逆序数的和有什么变化？

设

$$N(i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n) = t_1,$$
$$N(i_1 i_2 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n) = t_2,$$
$$N(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n) = s_1$$
$$N(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n) = s_2,$$

由于$t_1$与$t_2$奇偶性不同，$s_1$与$s_2$奇偶性不同，故$t_2-t_1$，$s_2-s_1$均为奇数，$(t_2-t_1)+(s_2-s_1)$