普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导 上册

第二版

经济类

吕　雄◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

第二版

上 册

高等数学学习指导

经济类

吕雄 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导．上册／吕雄主编．—2版．—北京：中国农业出版社，2013.8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17989-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①吕…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第150455号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路2号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　朱　雷

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2009年8月第1版　　2013年8月第2版

2013年8月第2版北京第1次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：12.75

字数：220千字

定价：22.00元

内容提要

本书是普通高等教育农业部“十二五”规划教材《高等数学》（经济类专业用）的配套教材。分上、下两册出版，上册内容为：函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用。本书从高等数学的教学目的与要求、知识结构、题型分析和典型例题等方面作了具体分析指导，有助于增强正确理解和掌握数学知识的能力与水平；每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以巩固和提高所学内容，检测对知识的掌握情况；最后还对原教材中的习题作了详细解答，有助于学生的学习。

本书内容具有相对独立性，可作为习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书。

编写人员名单

主　编　吕　雄

副主编　白树叶　戴云仙

编　者　（按姓名笔画排序）

白树叶　吕　雄　朱艳霞　杨丽英

吴国荣　姚贵平　高　莲　戴云仙

第二版前言

本书第二版是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材经济类《高等数学》(第二版)的配套教材。

本书第一版是全国高等农林院校“十一五”规划教材经济类《高等数学》的配套教材。

随着高等农林院校人才培养方案的修订，经济类《高等数学》课程的教学大纲与教学计划有较大变化，课程性质从公共基础课(必修)调整为公共基础课(必修)+拓展课(选修)，公共基础课的教学时数减少幅度较大，教学内容及教学要求需作出相应的调整，同时也要兼顾课程的科学性、系统性，还要考虑学生考研的需求。本学习指导书第二版是在第一版的基础上，结合配套教材第二版修订而成。

参加本书第二版修订工作的仍为第一版编写团队。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2013年5月

第一版前言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》(经济类专业用)的配套教材。分上、下两册出版，上册内容为：函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册内容为：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程。

高等数学是高等院校经济类等各专业学生必修的重要基础理论课之一，理解并掌握好高等数学的基础知识、基本理论、基本运算及分析方法，对后继课程的学习以及学生基本素质与数学素养的提高有着极其重要的作用，对其今后的发展与提高有着深远的影响。

本书可作为高等学校经济类专业、管理类专业或其他一些专业的习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书。

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、教学目的与要求和知识概要 通过各章的教学目的与要求、知识概要，用很短的时间了解教学要求和主要内容，以便于理解、记忆、掌握、巩固所学知识及各知识点间的联系。

二、题型分析和典型例题 通过题型分析和典型例题的精解，弄清分析问题和解决问题的过程，了解重点和难点，解决疑难问题，培养学生用数学的思想和方法分析问题、解决问题的能力。

三、自测题 每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以检测对知识的掌握情况，发现不足，进一步巩固和提

高所学知识。

四、习题解答 对原教材中的习题作了详细解答，有助于学生的学习。

参加本书编写工作的是具有丰富教学经验的一线教师，其中第一章由杨丽英编写，第二章由吴国荣编写，第三章由戴云仙编写，第四章和第八章由朱艳霞编写，第五章由吕雄编写，第六章由白树叶编写，第七章由姚贵平编写，第九章和第十章由高莲编写。全书编写大纲及统稿由吕雄完成。

由于编者水平有限，不足、疏漏之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月

目 录

第一章

函数、极限与连续性

第一节　教学目的与要求

1. 理解函数的概念(包括反函数、复合函数、初等函数的概念)，掌握函数的表示法，并会建立简单实际问题中的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性；掌握基本初等函数的性质及其图形.

3. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

4. 掌握极限的性质及四则运算法则.

5. 理解极限存在的两个准则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

6. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

7. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型，会讨论给定函数的连续性.

8. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(最值定理、介质定理、零点定理)，并会应用这些性质.

第二节　本章概要

一、函数的概念及性质

1. 函数的概念

构成函数的两个要素是：(1) 定义域；(2) 对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性；(2) 单调性；(3) 奇偶性；(4) 周期性.

3. 复合函数

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数．例如，函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为对任一 $x\in\mathbf{R}$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1, 1]$内．

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数构成，只要它们顺次满足构成复合函数的条件．

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

5. 经济学中常用的函数

(1) 成本函数；(2) 收益函数；(3) 利润函数；(4) 需求函数；(5) 供给函数．

二、极限的定义及运算性质

1. 极限的定义

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

2. 极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

3. 极限的性质

(1) 唯一性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则其极限唯一．

(2) 局部有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 局部保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，

则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（4）函数极限与数列极限的关系　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是对任何以 x_0 为极限的数列 x_n，$x_n\neq x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

对于 $x\to\infty$ 的情形也有相应的性质.

4. 极限的运算

以下讨论中，记号“lim”的下面没有标明自变量的变化过程，都是指在同一变化过程中，即 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$.

（1）极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

推论 1　若 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，则 $\lim[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim f(x)$.

推论 2　若 $\lim f(x)$ 存在，而 n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

（2）复合函数的极限运算

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

5. 极限存在准则

夹逼准则 1　若数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

（1）$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

上述数列极限存在准则可以推广到函数极限的情形.

单调有界准则 2　单调有界数列必有极限.

6. 两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

7. 无穷小与无穷大

（1）定义

若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $y=f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

若当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

(2) 无穷小与极限之间的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 为该极限过程中的无穷小.

(3) 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(4) 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(5) 无穷小的比较

设 α 与 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，又 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是这个变化过程中的极限，且 $\alpha \neq 0$.

① 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；

② 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

③ 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

④ 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，$k > 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

⑤ 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

(6) 无穷小的代换定理

设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

三、函数的连续性

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续的三个等价定义

$y = f(x)$ 在点 x_0 连续

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. $y=f(x)$在点 x_0 连续的充要条件

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

3. 函数的间断点及其分类

使函数不连续的点叫函数的间断点．通常把间断点分成两类：

(1) 若 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，但左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$和右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在，则 x_0 称为函数 $f(x)$的第一类间断点，在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点．

(2) 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点，第二类间断点中常见的类型有无穷间断点和振荡间断点．

4. 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数；连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数；一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理　闭区间上的连续函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值．

推论　闭区间上的连续函数在该区间上一定有界．

(2) 介值定理　设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且在该区间的两端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 1(零点定理)　设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)$和$f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0(a<\xi<b)$.

推论 2　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值．

第三节　题型分析和典型例题

题型Ⅰ　求函数的定义域

解题思路　在求函数的定义域时，应注意下列几点：

(1) 对有实际背景的函数，必须考虑变量的实际意义；

(2) 对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合；

(3) 求复杂函数的定义域，就是求简单函数的定义域所构成的不等式组的解集；

(4) 分段函数的定义域是各段定义域的并集．

例 1 已知函数 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求函数 $f(x+a)(a>0)$的定义域．

解 由于 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，因此求 $f(x+a)$的定义域就变成了求 x 的取值范围，使得 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$，所以 $f(x+a)(a>0)$的定义域为$[-a, 1-a]$.

题型Ⅱ 求极限问题

解题思路 灵活运用求极限的一些常用方法：

(1) 用极限的定义证明极限或用极限的运算法则求极限．

(2) 利用函数的连续性求极限．若 $y=f(x)$在点 x_0 连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(3) 对有理分式函数，当 $x\to\infty$时，用 x 的最高次方项去除分子、分母，且有以下的一般结论，即当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

(4) 利用无穷小与无穷大的倒数关系求极限．

(5) 分解因式，约去使分母极限为 0 的公因式法．

(6) 有理化法求极限．

(7) 利用有界函数与无穷小的乘积是无穷小求极限．

(8) 利用等价无穷小代换求极限．熟记一些常用的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x;\ \tan x\sim x;\ \arcsin x\sim x;\ \arctan x\sim x;$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x;\ \ln(1+x)\sim x;\ \mathrm{e}^x-1\sim x.$$

(9)利用两个重要极限求极限．

(10) 利用夹逼准则和单调有界准则求极限．

以上就常用的几种方法进行了列举，随着学习内容的增加，以后还将学到其他求极限的方法．

需注意的问题　(1) 在利用极限的四则运算法则时，要注意每个参与运算的极限都必须存在，且分母的极限不为零；和、差或乘积的运算只适用于有限项或有限个因子，对于无限的情形，应设法变形，等差、等比数列的求和公式及裂项是常用的方法.

(2) 等价无穷小代换只能在乘除法中进行，在加减运算中不能代换.

(3) 在具体计算极限时，通常需要多种方法结合使用，有时同一个极限有不同的计算方法，要根据具体问题选择较简便的方法.

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$.

解　由于
$$\frac{1}{k\times(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$
所以有
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]=1.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+1}{x^3-2x+5}$.

解　这是有理分式函数，当 $x\to\infty$ 时，分子与分母的极限都不存在(趋于无穷大)，这种情形称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，不能直接用极限运算法则，我们需对这个分式作适当变形，即分子、分母同除以它们的最高次幂 x^3，然后使用极限运算法则.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+1}{x^3-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=2.$$

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$.

解　这里的极限仍属“$\frac{\infty}{\infty}$”型，也可用上例类似的方法，即分子、分母同除以 n，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}.$$