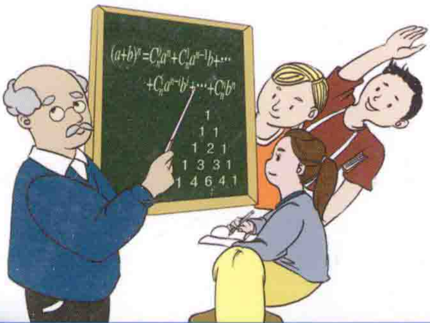


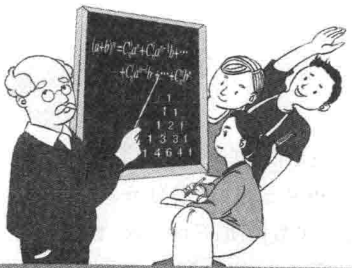
数林外传系列

跟大学名师学中学数学

Fibonacci数列

◎肖果能　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

Fibonacci数列

◎ 肖果能 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书详细介绍了 Fibonacci 数列的一般知识、基本理论及其应用，是作者学习和研究这个著名数列的心得和成果．全书分 6 章：Fibonacci 数列及其表示；Fibonacci 数列的代数性质；Fibonacci 数列与几何；Fibonacci 数列的相关数列；Fibonacci 数列与数论；Fibonacci 计数法及其应用．

作者花了数年的时间撰写本书，将普及性、系统性、趣味性、经典性和成果性等特色充分地展示了出来，可供中学生、中学程度自学青年、中学数学教师甚至大学数学专业的本科生、研究生阅读和参考．

图书在版编目(CIP)数据

Fibonacci 数列/肖果能编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2015.1

（数林外传系列：跟大学名师学中学数学）

ISBN 978-7-312-03609-5

Ⅰ.F… Ⅱ.肖… Ⅲ.斐波那契序列—青少年读物 Ⅳ.O156-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284624 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm 1/32 印张：7.75 字数：180 千

2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

定价：25.00 元

Fibonacci 数列

——数海中一颗璀璨的明珠

（代序）

（一）

说 Fibonacci 数列（斐波那契数列，简称 F-数列）是数学大海中一颗璀璨夺目的明珠绝非过誉，这个数列简洁优美，带给我们无尽的遐想.

F-数列是数学中历史悠久，影响广泛，在理论和应用上都很重要的一个数列. 自 1202 年意大利数学家 Fibonacci 提出“兔子问题”以后，即引起人们广泛的兴趣. 在兔子问题提出以后四百多年，德国天文学家及物理学家开普勒在 1611 年发现相继每个月的兔子数组成一个数列；英国西姆森在 1753 年发现这个数列与连分数的关系；法国比内在 1843 年得到数列的通项公式. 历时八百余年，特别是近二百年，其研究的深入可谓异彩纷呈，硕果累累. 为了对 F-数列的研究进行交流和切磋，美国学者 B. A. Brousseau 等发起成立了斐波那契协会；在美国数学会的支持下，于 1963 年创办和发行了《斐波那契季刊》（*The Fibonacci Quarterly*）；并且组织了每两年举行一届、由国际数学家参加的国际会议（International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications）.

F-数列说来简单，它就是数列

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，\cdots$$

小学生也能看出它的构成规律是:第 1,2 项都是 1,从第 3 项开始,每项都是其前面两项之和.任何一个智力正常的人不需一分钟的时间就能掌握这个规律,并且只要他愿意,便可按此规律从第 1 项开始写到这个数列的任何一项.

我们不禁要问:这样一个简单的数列为什么能够如此引人入胜,对它的研究历久不衰,而研究的发现和成果层出不穷呢?

原来,对于 F-数列,简单的是其外延,而其内涵则极其丰富.从哲学的观点看来,要认识一个事物,要深入到事物的内部,同时要认识这个事物与其他事物之间的联系.我们对于 F-数列的认识也是如此.由于事物内部的性质层层深入,人们的认识也就与时俱进,所以对于 F-数列的研究和认识没有终极,不可穷尽,永无止境.

(二)

面对这样一个简单的数列,我们对它的研究究竟是如何展开的呢?对于 F-数列我们已经知道些什么,还应该研究什么,怎样进行研究呢?

首先,F-数列是用递归方法定义的.但是我们可以从许多不同的角度考察 F-数列,给出 F-数列的各种表示.其中最重要的是通项表示,即 F-数列的通项公式(Binet(比内)公式).Binet 公式本质上是两个等比数列的通项公式的和.F-数列也可以借助矩阵或连分数来表示;对于固定的 n,Binet 公式表示的是下标为 n 的(即第 n 个)Fibonacci 数.而对于 Fibonacci 数,还有组合表示、取整表示、行列式表示等.显然这些表示都是等价的,它们都是数列的通项表示,都可以作为定义而成为讨论的出发点.每种表示都为我们开启

考察这个数列的一扇窗户，为研究这个数列提供一种方法或开辟一条路径.

其次，作为数列，我们应该研究 F-数列的代数性质. 已经建立了关于 F-数列的许多恒等式和不等式，统称 Fibonacci 恒等式或不等式，其中最重要的是 Cassini(卡西尼)恒等式和 Catalan(卡塔兰)恒等式；F-数列与几何有密切的联系，以 Fibonacci 数和著名的黄金数(它是相邻两个 Fibonacci 数之比当下标趋于无穷时的极限)为度量或度量关系的几何图形(三角形、正方形、矩形、椭圆等)往往有许多值得注意的性质，形成“Fibonacci 三角形”“Fibonacci 正方形(列)”“黄金矩形(列)”“黄金椭圆”等研究课题；F-数列又是由整数组成的数列，自然要讨论数列的数论性质，如 Fibonacci 数的整除性和倍数、F-数列与不定方程的联系等. 从代数、几何、数论三大领域或三个方面考察 F-数列，揭示了这个数列的丰富的内涵.

再次，由 F-数列可以生成许多相关的数列，如平方(立方)F-数列及一般的 k 方 F-数列、F-数列的子数列、Fibonacci 倒数列、带模的 F-数列等. 和 F-数列一样，这些数列也有各自的性质，而这些性质归根到底都是 F-数列的性质，它们丰富和加深了我们对 F-数列的认识. 例如，对任意模的 F-数列的周期性和周期的讨论，导致关于 F-数列的尾数(末 1 位、末 2 位、末 3 位等等)组成的数列的周期性问题的解决，因为后者不过是以 10，100，1 000 等为模的 F-数列.

最后，F-数列在数学的理论和应用中十分重要，在趣味数学和数学游戏中也经常出现. 在应用方面无疑当首推黄金数和 F-数列在搜索理论(优选法)中的应用及关于辗转相除法有效性的 Lame 定理的证明. 另外，Fibonacci 计数法及其用于正整数集合的一种划分和一个起源于中国的古老的博弈问题中的解决，也是 F-数列

应用的著名例子.

总之,现实世界(自然界、人类社会)中的许多实际现象(如植物的叶序、树木的枝条、蜜蜂的蜂房、蚂蚁的繁殖等等)中都存在着 F-数列的原型,许多数学问题(如上楼梯问题以及集论、组合中的问题)也导致 F-数列,F-数列与实际问题和数学问题有着千丝万缕的联系.正是实践和理论的需要使 F-数列充满活力,吸引着数学家和数学爱好者极大的关注和兴趣.

(三)

前面我们说过 F-数列有多种表示以及这些表示的意义.在这些表示中,最重要的有两类:递归表示和通项表示(Binet 公式).与此相应地,研究 F-数列也就有两类最重要的方法:递归方法和代数方法.

F-数列是用递归方法定义的.这种定义法的理论依据是关于自然数的皮亚诺公理体系中的数学归纳法原理,所以数学归纳法是 F-数列研究中常用的方法.许多结论往往由观察得到,然后用数学归纳法证明.F-数列是无穷数列,而我们的观察只能是有限的、特殊的,这时,数学归纳法就是联系和沟通有限和无穷、特殊与一般的必不可少的桥梁.在递归方法中,特征多项式与特征方程、母函数是重要的工具,例如对任意正整数 k,k 方 F-数列的递归式的一般形式就是利用特征多项式得到的.

Binet 公式是用下标 n 表示的 F-数列的通项公式.有了这个公式,在 F-数列的研究中得以广泛地使用代数方法.例如,经常利用一些熟知的代数恒等式或进行代数恒等变换.著名的 Catalan 恒

等式(Cassini 恒等式是其特例)就可以利用已知的代数恒等式来证明.

递归方法和代数方法是研究 F-数列的两类最重要的方法,它们相互补充,相得益彰.

F-数列的矩阵表示在 F-数列的研究中引入矩阵方法和行列式方法.这种方法有其独到之处,往往简洁明了,精美而巧妙.F-数列的求和公式可以用矩阵方法证明,而 F-数列的子数列的递归公式用矩阵方法进行处理时特别方便.行列式则是适合于讨论 F-数列、平方 F-数列的不变量的有用的工具.

F-数列的研究不仅内容丰富,方法也多样,蕴含着极为丰富的数学思想,这正好就是这个简单的数列的魅力之所在.

(四)

F-数列是数学工作者和数学爱好者都感兴趣的课题,在我国,这种兴趣由来已久.

1954 年,中国青年出版社出版了苏联科学出版社数学普及讲座中的《斐波那契数》一书的中译本(沃洛别也夫著,高彻译),新中国成立后的一代青年(其中包括笔者)中许多都是通过这本小书开始接触和了解这个著名数列的.浙江大学沈康身教授在他的四册鸿篇《数学的魅力》(上海辞书出版社,2006 年)中以"那一对兔子引起的八百年风波"为题共上、下两章以生动的笔触全面地介绍了 F-数列;吴振奎先生所著《数学问题赏析:斐波那契数列》(辽宁教育出版社,1993 年)则流传甚广.这些著作都堪称优秀,对 F-数列的普及与传播产生了很好的影响.但总的来说,这两部著作对于 F-数

列的论述偏重于“赏析”的层面. 另外还有许多关于 F-数列的研究成果则散见于各种杂志、报纸. 1993 年笔者参与了周持中、袁平之教授的专著《斐波那契-卢卡斯数列及其应用》的撰稿,此书对常系数线性齐次递归数列作了全面而深入的论述,并不限于讨论狭义的 F-数列,适合于专业数学工作者. 所以,笔者认为应该有一本普及性的反映 F-数列的全貌和发展的数学著作,因为这正好是广大数学爱好者、数学教师、数学专业研究生及有兴趣的高中学生所需要的. 有鉴于此,笔者早已萌生撰写这样一本著作的想法. 经多年努力终于脱稿;感谢中国科学技术大学出版社的支持,使之得以问世.

本书是笔者多年以来学习和研究 F-数列的心得和成果. 本书共 6 章 35 节,以翔实的内容,经过深入的思考,精心组织成严谨的体系,以期读者能通过本书对这个优美的数列一览全貌.

拙作将努力体现上面所述的对于 F-数列的意义、内容和方法的理解. 呈献于读者的这本书有以下特色:

1. 普及性. 这是一本入门书,从历史的缘起和定义出发全面地介绍 F-数列的一般知识. 读者只需具备高中数学(包括矩阵、行列式初步)知识,就可以顺利地阅读本书.

2. 系统性. 本书从代数、几何、数论几个方面对 F-数列进行全面的考察和系统的论述,结构严谨,脉络清晰,构成完整的理论体系.

3. 趣味性. 本书注重数学趣味,包含了许多数学趣题、数学游戏、博弈问题等,增强了趣味性.

4. 经典性及成果性. 本书包含了关于 F-数列的许多经典问题,同时提出和解决了一些新颖的问题(如提出了由 Fibonacci 数

生成的直角三角形的概念,具体讨论了 3 类这样的三角形的性质和判定,并且一般地给出了这类三角形的递归表示;讨论了带模的 F-数列及其周期性与周期,并用以解决了 F-数列的尾数的周期性问题;给出了 k 方 F-数列的特征多项式的递归表示及递归方程的明显表示及其证明,等等),读者可以以本书为平台,进入自己感兴趣的研究领域.

限于篇幅,本书不涉及专深的问题;限于水平,本书难免存在不足或错漏,希望读者不吝指教. F-数列是一个值得研究的有趣的课题,还有许多问题没有解决,还有许多工作要做,其中一些问题是极其艰深的(例如,F-数列中的素数是否有无限多个,哪些 Fibonacci 数恰是其下标的倍数,等等). 笔者愿与读者一道努力,使这颗璀璨的明珠更加灿烂.

目　次

第1章 Fibonacci数列及其表示

本章讨论 Fibonacci 数列的定义及表示.这个数列是用递归方法定义的,定义本身即数列的递归表示,因而递归方法成为研究这个数列的一类基本方法.此外还有通项表示、矩阵表示、连分数表示等.通项表示中最重要的是 Binet 公式,它是数列的代数表示,因而代数方法也是研究这个数列的重要方法.Fibonacci 数列的通项公式不唯一,通项还可以用取整函数、组合式或行列式来表示.当通项公式中的下标固定时,它表示 Fibonacci 数,故可以看成 Fibonacci 数的表示.这些表示为 Fibonacci 数列建立了多方面的联系,为考察数列开启了窗口,为研究数列开辟了途径.本章还利用 Cassini 恒等式 1 建立了 Fibonacci 数列的一阶递归表示,并且用以证明了 Fibonacci 数的判定定理.

1.1 Fibonacci 数列的定义及背景

Fibonacci 数列是用递归方法定义的,这个数列有着十分悠久的历史和广阔的实际背景.本节我们讨论 Fibonacci 数列的定义、缘起及实际背景.

1.1.1 Fibonacci 数列的定义

由递归方程

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, & n \geqslant 1 \\ f_1 = f_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

定义的数列$\{f_n : n \geqslant 1\}$称为 Fibonacci 数列(以下简称为 F-数列),其中的每个数(项)称为 Fibonacci 数.

方程式(1)表明,F-数列的前两项均为 1,而从第三项开始,每一项都等于其前面两项之和.据此,我们容易写出数列的前面的一些项:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

有时,为方便起见,我们还规定 $f_0 = 0$,这时,方程式(1)中的递推关系对$n \geqslant 0$均成立.

1.1.2 F-数列的缘起

F-数列的历史可以追溯到 800 年前“一对兔子引起的风波”.

公元 1202 年,杰出的意大利数学家、比萨的列昂纳多出版了他的著作《算盘书》,提出了著名的“兔子问题”,从而衍生出 Fibonacci 数列(Fibonacci 意为波那契之子,是作者的绰号).问题是这样的:

“某人有一对初生的兔子,养殖在四堵围墙封闭的庭院之中.成熟的兔子每月可产小兔一对,而初生的小兔要一个月才能成熟.如此经一年(12 个月)时间,问:庭院中的兔子能繁殖到多少对?”

我们逐月讨论兔子的对数,从中寻找规律.

1 月末时,庭院中有 1 对初生小兔;

2月末时，1月末新生的小兔成熟，庭院中仍只有1对成熟的兔子；

3月末时，2月末的兔子产下1对小兔，故兔子增加1对，共2对兔子；

4月末时，3月末新生的小兔成熟，而2月末的那1对兔子又产下1对小兔，故兔子增加1对，共3对兔子；

5月末时，4月末新生的小兔成熟，而3月末的那2对兔子又产下2对小兔，故兔子增加2对，共5对兔子；

一般地，以 f_{n+2} 记第 $n+2(n\geqslant 1)$ 月末时的兔子数，则第 $n+2$ 月末时，上月(第 $n+1$ 月)末新生的小兔成熟，而第 n 月末的 f_n 对兔子各产下1对小兔，故兔子增加了 f_n 对，达到 $f_{n+1}+f_n$ 对，即有

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\quad n\geqslant 1 \tag{2}$$

据此逐月计算如表1.1所示.

表 1.1

月末	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

由此可知年末时庭院里的兔子将繁殖到144对.

让此过程继续以至无穷，得到的数列就是F-数列.

附录3给出F-数列的前50项.一方面，我们可以从表中得到对于F-数列的感性认识，例如，可以看到，随着下标的增大，项也增大，增长的速度大于等差数列的增长速度(有趣的是，F-数列的一阶差分即由每相邻两项的差组成的数列仍为F-数列)，但小于公比为2的等比数列的增长速度；同时，可以用它来观察，探求和验证关于F-数列的各种性质，特别地，在应用数学归纳法时，用以验证

归纳基础.

1.1.3 F-数列的实际背景

F-数列产生于 800 多年前的“兔子问题”,但后来发现,这个数列的递推关系存在于许多的实际问题与数学问题之中,有着十分广泛的实际背景.在植物、动物的生长、繁衍及许多自然现象和人类活动中都不乏 F-数列的踪迹,在此不一一列举.我们仅列举几个与数学有关的例子.

1. 登楼问题

假设我们要登 $n(n\geqslant1)$ 级楼梯,而每步限登 1 级或 2 级,则登上 n 级楼梯共有多少种方法?

我们用 f_{n+1} 表示登上 n 级楼梯的方法数.

若 $n=1$,可一步而上,故只有一种方法,即 $f_2=1$.

若 $n=2$,可每步一级,逐级而上;或一步两级,一步而上,有两种方法,故 $f_3=2$.

一般地,考虑登上 $n+1$ 级楼梯的方法数 f_{n+2}.按第一步所登级数可将上楼的方法分为两类:

第一步登一级,则登上所剩 n 级有 f_{n+1} 种方法;

第一步登二级,则登上所剩 $n-1$ 级有 f_n 种方法.

于是得到

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\quad n\geqslant2 \tag{3}$$

若令 $f_1=1$,则式(3)对于 $n\geqslant1$ 成立,而由此得到的数列也是 F-数列.

2. 由数字“1”“2”组成的数

由数字“1”“2”能够组成多少个各位数字之和为 n 的数?