溫德華士代數學

第一章

界說及符號

1. 量　凡可增可減者。統謂之量。同類之量。可以相比。

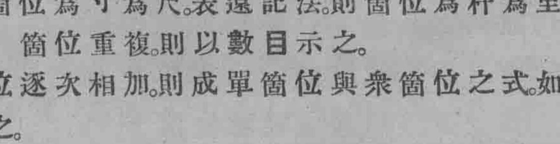
可度之量云者。謂其量可視爲等分所成也。欲量可度之量。必先擇一同類之量。爲之標準。以觀所度之量。爲標準量之幾倍。

2. 箇位. 凡測量大小與計算各物時。所用之準率。謂之箇位。

例如計算某校學童。其箇位爲一學童。若以打數賣蛋。其箇位爲一打蛋。千數計磚。其箇位爲一千磚。至於表近記法。則箇位爲寸爲尺。表遠記法。則箇位爲杆爲里。

3. 數. 箇位重復。則以數目示之。

將箇位逐次相加。則成單箇位與乘箇位之式。如下法足以表之。



凡此乘羣。代表一二三四五六七八九十諸數。此等代

表之乘羣。不論所計者爲何種箇位。其意恆同。

4. 幾何. 任何具名箇位之數。俱爲幾何。幾何分爲二部。一爲箇位之名。一爲幾何所有箇位之數。

注意. 幾何恆謂之帶名數.因其於所計箇位.附以名而記其數也.若但以數目表示箇位之倍數.則不論爲眞數爲代數.俱謂之獨立數.例如四桶麵粉.意卽四倍一桶麵粉.如十棵木.卽十倍一棵木。

5. 代數學 代數與算術同。亦論數之學也。

6. 算術數號. 算術所用數號。非如前列直集乘羣之號。係用通行符號 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 卽亞拉伯之數目字讀爲一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九。其十之號。乃將1字變換位置。令之表十而不表一。變換其位置時。須另用一0號。0之數號。或稱零數。乃表虛無之數者也。

表箇位之一。則置 1 於第一位。如數繼續增加。達至十箇。則自右而左。置 1 之數號於第二位。至百箇。則置 1 於第三位。至千箇。則置 1 於第四位。餘可類推。

7. 代數學之數號. 代數學非獨用算術數號表數。且以字母中之字目代表。定值之數。爲其數之公號。是以某字值量。對於某該問題。通前澈後俱等。

8. 算術中表數之數號謂之數。代數中表數之字號。亦謂之數。用字爲號。謂之字目。用數爲號。謂之數目。凡字目所表之數。爲字之值。亦如數目所表之數。爲數之值也。

9. 算術與代數共用之名稱. 算術與代數共用之名稱。卽如加法,和數,減法,被減數,減數,差,等等。二者所用命意相同。雖或代數間之命意有時推擴。然與算術之意符合。

代數通用符號

10. 演算符號. 代數學通常之演算。亦如算術。含有加法,減法,乘法,除法,乘方,開方,等等。凡數經此演算。所示標記。謂之演算符號。

11. 加法符號, +. 此+符號。讀加。例 $4+3$ 讀4加3。意謂3箇加於4箇上。$a+b$ 讀 a 加 b。意謂 b 數加於 a 數上。

12. 減法符號, −. 此−符號。讀減。例 $4-3$ 讀4減3。意謂由4箇減去3箇。$a-b$ 讀 a 減 b。意謂由 a 數減去 b 數。

13. 乘法符號, ×. 此×符號。讀乘或倍。例 4×3 讀4乘以3。意謂4箇被3箇乘。$a\times b$ 讀 a 乘以 b。意謂 a 數被 b 數乘。有時亦或用點代乘號。是故 $2\cdot3\cdot4\cdot5$ 卽 $2\times3\times4\times5$。此二符號後。有數繼之者。俱可讀爲被乘。例 $\$a\times b$ 或 $\$a\cdot b$ 讀爲 a 圓被 b 數乘。

14. 除法符號, ÷. 此÷符號。讀除。例 $4\div2$ 讀4除以2。意謂4箇被2箇除。$a\div b$ 讀 a 除以 b。意謂 a 數被 b 數除。除法示號。亦可於橫線上書被除數。橫線下書除數。或用斜線將被除數與除數隔開。

例如 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 適與 $a\div b$ 相同。

注意．加b於a，由a減b，用b乘a，與夫a被b除，等等演算．若二字目所連符號適對．則必完全無訛．

15．關係符號：

$=$，讀等　等於　必等種種。

$\neq$，讀不等種種。

$>$，讀大於。　如$9>4$。

$<$，讀小於。　如$4<9$。

$\ngtr$，讀不大於。

$\nless$，讀不小於。

$:\ \ ::$，比例符號。適與算術相同。

如$a:b::c:d$或$a:b=c:d$讀a比b如c比d。

16．語詞符號：

$\therefore$，讀故　於是。

$\because$，讀因　旣然。

例$\because a=b$。而$b=c$。$\therefore a=c$。讀a旣然等於b。而b等於c。故a等於c。

17．相續符號… 此…符號讀爲等等．

例1, 2, 3, 4, … 讀一，二，三，四，等等。$a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots a_n$讀副一$a$副二$a$副三$a$等等直至副$na$。$a', a'', a''', \cdots$讀第一$a$第二$a$第三$a$等等。

18．納結符號． 納結符號。分爲括弧(　)括弓[　]括帶{　}括線——括柱｜。凡此演算符號。表明所示之數。從先算結。視其總結。如爲單數。

例如$(a+b)\times c$。意謂b加於a之後。而其總結。被c所乘。$(a-b)\times c$。意謂由a減b。而c實乘其差。

凡式上書括線。卽表其爲單數。

例如$a-\overline{b+c}$適同$a-(b+c)$。意謂c加於b。而後由a減其總結。

生數，方，根

19. 生數. 設某數爲二數或二數以上相乘之合數則其各數或其二數相乘。及二數以上相乘之各合。均爲該數之**生數**也。

例 $2, a, b, 2a, 2b, ab$, 均爲$2ab$之生數。

凡字目所示之生數。謂之字生。數目所示之生數。謂之數生。

20. 字生連串相乘。或數生與字生併乘其間則無$\times$之符號。

例abc表示$a\times b\times c$。$63ab$表示$63\times a\times b$。

abc之合不可混視爲$a+b+c$之和。

設$a=2, b=3, c=4$,

則$abc=2\times 3\times 4=24$,

但$a+b+c=2+3+4=9$.

注意. 算術號法.惟省加法符號.至於代數號法。惟省乘法符號.例456意謂$400+50+6$。然$4ab$則謂$4\times a\times b$.

21. 設某合數有一生數爲0.則不論其餘各生數等於何值。其合必等於0. 凡生數爲0者。爲零生數。

例如 a, b, c, d 其間有一爲 0。則 $abcd=0$。

22. 係數. 凡數目或字目。冠於幾何之首。以示該幾何倍數者。謂之係數。

係數以字目代表者。謂之字係。以亞拉伯數目代表者。謂之數係。

例如 $7x$ 其 7 爲 x 之數係。ax 其 a 爲 x 之字係。

幾何之首。如無係數。則其係數爲 1。

23. 方. 數之方者。乃以該數自作乘數。以一爲其起始之被乘數。逐次自乘若干次之合也。凡此方法。謂之乘方。而其乘數名爲方之底數。陸續相乘次數。謂之方次。表方之次數者。謂之指數。書於底數上部右角之處。恆以小字表之。

例 $1\times a\times a$ 以 a^2 表之。(讀 a 平方)。a 爲底數。2 爲指數。a^2 爲 a 之二次方。

$1.c.c.c$ 以 c^3 表之(讀 c 立方)。c 爲底數。3 爲指數。c^3 爲 c 之三次方。

x^5 (讀 x 之第五次方)。x 爲底數。5 爲指數。x^5 爲 x 之五次方。

24. 指數既表底數自一陸續連乘之次。則 a^1 爲 a 之一次方。可以 $1\times a$ 表之。亦卽 a 也。

故 a^0 爲 a 之圈次方。明示 a 不相乘。換言之。卽謂此 a 不乘被乘數一。是以不論 a 值若何。a^0 恆等於 1.

25. 凡合之方次式。被乘數一恆漏而不書。適與不書一之係數相同。

例如不書$x^3=1\times x\times x\times x$。惟書$x^3=x\times x\times x$。此種表方之法。指數恆示底數作爲生數自乘之方次也。

26. **方之相比**。則以二次方大於一次方。三次方大於二次方。等等。

係數與指數。命意之不同。須當詳細釋明。

例 $4a=a+a+a+a$; $a^4=a\times a\times a\times a$。

設 $a=3$, $4a=3+3+3+3=12$; $a^4=3\times 3\times 3\times 3=81$。

27. **根** 與乘方相反者。謂之**開方**。開方云者。求數根次之演算也。數之根者。該數等生之一。如數開爲二相等生。則各爲**平方根**。如開爲三相等生。則各爲**立方根**。如開爲四相等生。則各爲**四次根**等等類推。

根號爲$\sqrt{}$。除平方根以外。餘皆於根號上書明數號。以示所求該數等生之次數。凡此數號。謂之**根指數**。

例如$\sqrt{64}$意謂64之平方根。$\sqrt[3]{64}$意謂64之立方根。

代數式

28. **代數式** 代數式者。以代數號代表數也。代數式中可含一代數號。或以符號連結數代數號。

例如a, $3abc$, $5a+2b-3c$ 爲代數式。

29. **項** 項者代數式之一號。亦或數號間無＋－符號相連者。

例 a, $5xy$, $2ab\times 4cd$, $\frac{3ab}{4cd}$各爲一項之代數式。而項亦可以×或÷符號分開爲段。

30 **相似項**. 凡項之字目及其指數各各相等者。謂之相似之項。

例 $3x^2y^3$, $5x^2y^3$, $7x^2y^3$, 爲相似項。

31. **簡式**. 祇含一項之代數式謂之簡式或獨項式。

例 $5xy$, $7a\times 2b$, $7a\div 2b$ 謂之簡式。

32 **複式** 含括二項。或二項以上之代數式。謂之複式。或多項式。

例 $5xy+7a$, $2x-y-3z$ 謂之複式。

33. 二項之多項式。謂之二項式。其三項者。謂之三項式。多項式亦名繁項式。

例 $3a-b$ 爲二項式 $3a-b+c$ 爲三項式。

34. **正負二項**. 項前冠有＋符號。謂之正項。如冠－符號者。謂之負項。凡獨項或多項式首項之前。可以不書＋符號。

35. 設若正負二項所等之數相同。則此二項相連時。可以抵消。

36. **換入**. 如二幾何或二數或二演算。其於代數式間。可以互換。不致有妨式之數值者。則各相等。

37. **式之數值**. 如將式中各字之值換入。且按所示符號以行演算。則其所得之數。稱爲式之數值。

簡式之數值

1. 設 $a=5$, 求 $4a$ 與 a^4 之數值。

$4a=4\times a=4\times 5=20$, $a^4=a\times a\times a\times a=5\times 5\times 5\times 5=625$。

2. 設 $a=3$, $b=4$, $c=5$, 求 $\frac{7}{15}abc$ 之數值。

$\frac{7}{15}abc=\frac{7}{15}\times 3\times 4\times 5=28$。

3. 設 $x=3$, $y=4$, 求 $2x^3y^2$ 之數值。

$2x^3y^2=2\times 3^3\times 4^2=2\times 27\times 16=864$。

4. 設 $x=4$, $y=5$, 求 $\frac{3}{4}xy^2$ 之數值。

$\frac{3}{4}xy^2=\frac{3}{4}\times 4\times 5^2=\frac{3}{4}\times 4\times 25=75$。

5. 設 $a=2$, $b=3$, $c=4$, 求 $8a^2b\div 3c^3$ 之數值。

$$\frac{8a^2b}{3c^3}=\frac{8\times 2\times 2\times 3}{3\times 4\times 4\times 4}=\frac{1}{2}。$$

6. 設 $x=3$, 求 (i) $\sqrt{4x^2}$, (ii) $2\surd(9x^2)$, (iii) $\surd 4x^2$ 之各數值。

(i) $\sqrt{4x^2}=\sqrt{4\times 3^2}=\sqrt{36}=6$。

(ii) $2\surd(9x^2)=2\surd(9\times 3^2)=2\times 9=18$。

(iii) $\surd 4x^2=\surd 4\times 3^2=2\times 9=18$。

注意. 如無括線括弧, 根號祇與其右接近所示有關.

習 問 1

設 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $x=5$, $y=6$, $z=0$, 求下各式之數值。

1. $7x$.
2. $8b^2$.
3. $7c^3$.
4. $5bc$.
5. $6c^2d$.
6. $2c^2dx$.
7. $14c^3yz$.
8. b^3c^2y.
9. $3a^4b^2x$.

10. $\frac{3}{8}d^2x$.

11. $\frac{2}{9}c^3d$.

12. $\frac{3}{10}b^2xy$.

13. $\frac{5}{18}a^3dy^2$.

14. $\frac{2}{3}x^2y^3z$.

15. $\frac{4}{15}c^2x^2$.

16. $\frac{5}{12}xy^2$.

17. $\frac{7}{10}d^2x^2$.

18. $\frac{13}{12}c^2d^2$.

19. $\dfrac{4b^4x^2}{5d^3}$.

20. $\dfrac{7c^3x^2}{5by^2}$.

21. $\dfrac{x^2y^2}{5c^2d^2}$.

22. $\dfrac{9cdz}{dy}$.

23. $\dfrac{5a^5d^3}{4b^3x^2}$.

24. $\sqrt{b^2dx^2}$.

25. $\sqrt{dy}$.

26. $\sqrt[3]{27}\,d^2$.

27. $\sqrt{(bcy)}$.

28. $\sqrt{x^2y^3z^3}$.

29. $\sqrt[3]{9bcd}$.

30. $2\sqrt{c^2dx^2}$.

31. $cd\sqrt{dy^2}$.

32. $abc\sqrt{2cx^2y}$.

33. $\frac{3}{4}d\sqrt{dy^2}$.

34. $abcdxyz$.

35. $cx\sqrt[3]{b^2cdy^2}$.

36. $b^2c\sqrt[3]{d^2z^2}$.

37. b^2dx^2y.

複式之數值

38. 先須算結項間所示演算符號。然後按該項所冠符號而演算。

注意. 各項須遵代數之式. 凡二字生間 × 符號. 可以不書. 而數生與字生之間. 其 × 符號亦不書.

39. **項之各段.** 係按 × 與 ÷ 之符號次序。由左而右以相合併。

式之各項. 乃按 + 與 − 之符號次序。由左而右以相合併。

例 $60-40\div5\times3-20=60-\dfrac{40}{5}\times3-20=16$.

40. 二數之和。任爲第一加於第二。或爲第二加於第一。其和恆等。

代以字號。 $a+b=b+a$。 **此謂之加法交換定律。**

41. 三數之和。任爲第二與第三之和數加於第一。或第三加於第一與第二之和數。其總恆等。

代以字號。 $a+(b+c)=(a+b)+c$。 **此謂之加法組合定律。**

1. 設 $a=2, b=10, x=3, y=5$。求 $6b\div(b-y)-3x+2bxy\div 10a$ 之數值。

$$6b\div(b-y)-3x+2bxy\div 10a=\frac{6\times 10}{10-5}-3\times 3+\frac{2\times 10\times 3\times 5}{10\times 2}$$
$$=12-9+15=18。$$

2. 設 $a=6,\ b=4$, 求 $(a+b)(a-b)+\frac{a+b}{a-b}$ 之數值。

$$(a+b)(a-b)+\frac{a+b}{a-b}=(6+4)(6-4)+\frac{6+4}{6-4}$$
$$=10\times 2+\frac{10}{2}=20+5=25。$$

習 問 2

設 $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ f=0$。求下各式之數值。

1. $9a+2b+3c-2f$.
2. $4e-3a-3b+5c$.
3. $8abc-bcd+9cde-def$.
4. $\frac{4ac}{b}+\frac{8bc}{d}-\frac{5cd}{e}$.
5. $7e+bcd-\frac{3bde}{2ac}$.
6. $abc^2+bcd^2-dea^2+f^3$.

7. $e^4+6e^2b^2+b^4-4e^3b-4eb^3$.

8. $\dfrac{8a^2+3b^2}{a^2b^2}+\dfrac{4c^2+6b^2}{c^2-b^2}-\dfrac{c^2+d^2}{e^2}$.

9. $\dfrac{d^e}{b^e}$.

10. $\dfrac{e^e+b^a}{c^b-b^e}$.

11. $\dfrac{b^e+d^e}{b^2+a^2-bd}$.

12. $\dfrac{e^e+d^e}{e^2+ed+d^2}$.

設 $a=2$, $b=10$, $x=3$, $y=5$。求下各式之數值。

13. $xy+4a\times2$.

14. $xy+15b\div5$.

15. $3x+7y\div7+a\times y$.

16. $6b-8y\div2y\times b-2b$.

17. $(6b-8y)\div2y\times b+2b$.

18. $(6b-8y)\div(2y\times b)+2b$.

19. $6b-(8y\div2y)\times b-2b$.

括弧

42 括弧前冠+符號 設某有錢十元。其後收入三元。又後收入二元。如將三元與二元總結。加於十元。與夫先加三元於十元。而後再加二元。所得之數。無有差異。

前法可以 $10+(3+2)$ 表之。 後法可以 $10+3+2$ 表之。

故 $10+(3+2)=10+3+2$。 (1)

設某有錢十元。其後收入三元。又後付出二元。如由三元之中付出二元。以其所餘加於十元。與夫先加三元於十元。而後再由其和付出二元。所得之數。無有差異。

前法可以$10+(3-2)$表之。 後法可以$10+3-2$表之。

故$10+(3-2)=10+3-2$。 (2)

設以公號代入(1)(2)諸式。則得

$$a+(b+c)=a+b+c。$$

$$a+(b-c)=a+b-c。$$

括弧前冠＋符號者之公法.

括弧冠有＋符號者。及去該括弧時。其式中各項之符號。無所變更。

括弧以外任衛何種括號。俱以此法例之。

43. 括弧前冠－符號. 設某有錢十元。付還二賬。一爲三元。一爲二元。其於十元之中同時取出三元二元。與夫逐次取出三元二元。所餘之數。無有差異。

前法可以$10-(3+2)$表之。 後法可以$10-3-2$表之。

故$10-(3+2)=10-3-2$。 (1)

設某有錢十元。係爲二張五元鈔票。用以付償三元之債。付出五元之票。收回二元。

此法可以$10-5+2$表之。

所償之債。既爲三元。即$(5-2)$元也。則所餘之錢。又可以$10-(5-2)$表之。

故$10-(5-2)=10-5+2$ (2)

設以公號代入(1)(2)諸式。則得

$$a-(b+c)=a-b-c。$$

$$a-(b-c)=a-b+c。$$

括弧前冠 − 符號者之公法。

括弧冠有 − 符號者。及去該括弧時。其式中各項之符號如爲 + 者。則改爲 −。如爲 − 者。則改爲 +。

注意. 如用括線. 則其所蓋第一項前之號. 適爲括線前之符號. 例 $a+\overline{b-c}$ 適同 $a+(b-c)$. 而 $a-\overline{b-c}$ 適同 $a-(b-c)$.

習問 3

撤去括弧。合併各項。

1. $7+(5+3)$.
2. $7+(5-3)$.
3. $8+(6+2)$.
4. $8+(6-2)$.
5. $7-(5-3)$.
6. $9-(5+3)$.
7. $8-(6+2)$.
8. $8-(6-2)$.
9. $(12-8)-(7-4)$.
10. $(10-4)-(2+3)$.
11. $(14-6)+(8-6)$.
12. $(7+3)-(4-2)$.

設 $a=8, b=5, c=6, d=3$。求下各值。

13. $(a+b)+(c+d)$.
14. $(a+b)-(c+d)$.
15. $(a+b)+(c-d)$.
16. $(a+b)-(c-d)$.
17. $(a-b)+(c-d)$.
18. $(a-b)-(c-d)$.
19. $(a-b)+(c+d)$.
20. $(c+d)-(a-b)$.

複生乘以單生所得之合

44. 計算 $4(5+3)$ 之合。以 5 與 3 之和。用 4 倍之。或 4 乘 5 與 4 乘 3 二合相加。凡此二法所得之數。無有差異。

前法算草 $4(5+3)=4\times8=32$。

後法算草 $4(5+3)=(4\times5+4\times3)=32$,

準此。$4(5-3)=4\times2=8$, $4(5-3)=(4\times5-4\times3)=8$。

代以公號。$a(b+c)=ab+ac$。

$a(b-c)=ab-ac$。

故曰。不論何數乘複項式所得之數。適等其數乘該複式各項。

此謂之**乘法分配定律**。

45. 生數之序。與其值無關。

例 $4(5+3)=4\times5+4\times3=32$。

$(5+3)4=5\times4+3\times4=32$。

代以公號。$ab=ba$。

此謂之**乘法交換定律**。

照下所示以行演算。

1. $x+3(a-b)$。 2. $x-3(a-b)$。

1. $x+3(a-b)=x+(3a-3b)=x+3a-3b$。

2. $x-3(a-b)=x-(3a-3b)=x-3a+3b$。

習 問 4

例如 $a=4$, $b=3$, $c=2$。照下所示演算求各數值.

1. $5(ab+c)$. 4. $7(ab-c)$.

2. $4(ac+b)$. 5. $6(ac-b)$.

3. $3(a+bc)$. 6. $5a(b-c)$.

7. $2ab-a(bc-a)$.
8. $c+2ab(ac-b)$.
9. $3ac-c(b+c)$.
10. $5ab-(b^2+b)$.
11. $6bc-4(ab-3c)$.
12. $ab+b(a-c)$.
13. $(a-c)b-bc$.
14. $(a-b)c+3ac$.
15. $(2a+3b)b-2ab$.
16. $(a^2-b^2)c-(a^2-c^2)$.
17. $(a^2-c^2)b-(b^2-c^2)$.
18. $2(bc+ac)-c(b^2+c^2)$.

複式除以單式所得之商

46. 計算$(8+4)\div 2$之商。以2除8與4之和。或2除8與2除4二商相加。凡此二法所得之數無有差異。

前法算草$(8+4)\div 2=12\div 2=6$。

後法算草$(8+4)\div 2=(8\div 2+4\div 2)=6$。

代以公號。$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$。

$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}。$$

故曰。不論何數除複項式所得之數。適等其數除該複式各項。

此謂之**除法分配定律**。

1. 按式所示以行演算。

$$x+(3a+3b)\div 3。$$

$x+(3a+3b)\div 3=x+(a+b)=x+a+b$。