

迈向尖子生

9 年级

# 初中数学 培优题典

侯义新 编著

分类  
分项  
分级



南京大学出版社

# 尖

# 9 年级

# 初中数学 培优题典

侯义新 编著

分类  
分项  
分级



南京大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

初中数学培优题典. 9 年级/侯义新编著. —南京: 南京大学出版社, 2010. 1 重印

(迈向尖子生系列)

ISBN 978-7-305-05396-2

I. 初… II. 侯… III. 数学课—初中—习题  
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 053459 号

出版者 南京大学出版社  
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093  
网 址 <http://www.NjupCo.com>  
出版人 左 健  
丛 书 名 迈向尖子生系列  
书 名 初中数学培优题典(9 年级)  
编 著 者 侯义新  
责任编辑 王向民 编辑热线 025-83594275  
照 排 南京南琳图文制作有限公司  
印 刷 南京人文印刷厂  
开 本 787×1092 1/16 印张 17.5 字数 462 千  
版 次 2010 年 1 月第 1 版第 4 次印刷  
ISBN 978-7-305-05396-2  
定 价 20.00 元  
发行热线 025-83594756  
电子邮箱 [Press@NjupCo.com](mailto:Press@NjupCo.com)  
[Sales@NjupCo.com](mailto:Sales@NjupCo.com)(市场部)

\* 版权所有, 侵权必究

\* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购  
图书销售部门联系调换

# 写在前面的话

题典≠题海！分类、分项、分级——迈向尖子生的阶梯。

如果你已经是尖子生，不妨一读；如果你还不是尖子生，但又很想成为尖子生，建议一读！

现实中有一些学生投入了大量的精力，习题做了一大摞，但成绩仍不理想，甚至感到学习数学是一件很烦恼的事情，不喜欢数学。究其原因，就是没有找到学数学的窍门，没有掌握学数学的规律，没有发现适合自己的学习方法，自然也就感觉不到学数学的快乐。

我们精心编写的这套“迈向尖子生”系列培优题典就是为了既能让学生少花时间，又能从每一天的数学学习中找到捷径、方法、窍门，从而不知不觉地激发起学数学的兴趣。

本套丛书是根据国家教育部颁布的新课程改革的理念，按照《国家数学课程标准》，紧密配合九年制义务教育教科书而编写的。

该丛书的编写不拘泥于一种版本的教材，而是在充分理解新大纲、吃透新课标的基础上，结合当今教学实践和教学动态，用新型的编写理念和编排格式进行丛书的整体设计和制作，在同类教辅图书中，更能突出“源于教材，宽于教材，高于教材”的特色。

丛书的内容系统全面，难易适度，编排合理，根据不同年级的学习内容，由易到难、层层深入、螺旋上升。编写上力求体现以下特点：

(1) **源于基础，选题典型。**各年级紧扣大纲、贴近教材，按照教材内容的编排顺序，从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发设置专题，便于学生在掌握课本单元基础知识的前提下自学，进行拓展提高。全书选题典型，例题和习题具有较强的代表性，通过典型题的分析、讲解、演练以及练习题的训练巩固，旨在掌握课本知识的核心内容，发现解题的一般方法和规律。

(2) **题型全面，层次细致。**全面改变一般教辅书题型老套的模样，力求出题形式灵活、新颖、多样。各类题型能基本覆盖教学重点和考试要点，并突出趣味性、实用性、典型性。分类、分项、分级的编写体例，层次分明，对于拓宽解题思维、提高解题技巧和培养学生良好的数学修养大有裨益。

(3) **辅导便利，自学精点。**全书文字编写深入浅出，通俗易懂，引人入胜，貌如循循善诱的老师上课。清晰的思路分析、严谨的解题步骤、分明的题典体例，可以与各种版本的教材配套使用，也可以作为学生的课外读物，还可供家长辅导孩子或兴趣小组活动时使用。

这种认识理念和编写模式能否得到大家的认同和市场的接受，我们衷心地希望广大一线教师、关注孩子学习的家长以及同学们给我们提出宝贵的意见，并把你们的经验和体会告诉我们，以便使这套丛书更加完善。

在编写过程中，我们参考了一些优秀题目，为了简明，书中不一一注明，在此谨表谢意！

编者

# 目 录

## 上学期

专题一	再探等腰三角形	( 1 )
专题二	直角三角形的再认识	( 6 )
专题三	探究中心对称的四边形	( 12 )
专题四	梯形——特殊的四边形	( 17 )
专题五	与中点有关的问题	( 22 )
专题六	数据的波动	( 27 )
专题七	二次根式	( 33 )
专题八	一元二次方程及应用(1)	( 38 )
专题九	一元二次方程及应用(2)	( 43 )
专题十	圆的基本性质	( 48 )
专题十一	直线与圆、圆与圆	( 53 )
专题十二	与圆有关的计算	( 59 )
专题十三	二次函数的图像与性质	( 65 )
专题十四	二次函数的应用(1)	( 70 )
专题十五	二次函数的应用(2)	( 75 )
专题十六	直角三角形的边角关系	( 81 )
专题十七	三角函数的应用(1)	( 86 )
专题十八	三角函数的应用(2)	( 91 )
专题十九	统计的应用	( 96 )
专题二十	概率的应用	( 104 )

## 下学期

专题一	如何解选择、填空题	(110)
专题二	数学应用问题	(116)
专题三	方案设计问题	(122)

专题四	图表信息问题	(128)
专题五	格点中的数学问题	(134)
专题六	几何计算问题	(140)
专题七	与几何画图有关的问题	(146)
专题八	动手操作,实践数学	(152)
专题九	开放的数学问题(1)	(158)
专题十	开放的数学问题(2)	(162)
专题十一	如何解探索性问题(1)	(167)
专题十二	如何解探索性问题(2)	(172)
专题十三	如何解动态问题(1)	(178)
专题十四	如何解动态问题(2)	(184)
专题十五	如何求几何定值与最值	(191)
专题十六	数学研究性学习	(199)
专题十七	让我们学会阅读	(207)
专题十八	让我们学会分类	(213)
专题十九	让我们学会转化	(218)
专题二十	数形结合百般好	(224)
参考答案		(232)

# 专题一 再探等腰三角形

## 知 识 要 点

等腰三角形的两个底角相等(简称“等边对等角”).等腰三角形是轴对称图形,它的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合(即等腰三角形的三线合一).

如果一个三角形的两个角相等,那么这两个角所对的边也相等(简称“等角对等边”).

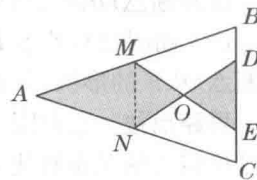
等边三角形的每个内角都等于  $60^\circ$ ;三个角都相等的三角形是等边三角形.

线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等;到一条线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

三角形的三边的垂直平分线交于一点.

研究等腰三角形,要充分利用它的轴对称性,考虑它的特殊性质,寻求角之间、线段之间的特殊关系,同时全等三角形的知识也是重要的工具,将等腰三角形与全等三角形的知识综合起来可以使我们对等腰三角形有更深入的认识.

**典型题一** 如图,在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC$ ,  $M$ 、 $N$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $D$ 、 $E$  为  $BC$  上的点,连结  $DN$ 、 $EM$ . 若  $AB=13$  cm,  $BC=10$  cm,  $DE=5$  cm, 求图中阴影部分的面积.



**思路点拨** 通过分割将阴影部分转化为几个规则图形,分别求解后再组合起来便可解决问题.

**详细解答** 连接  $MN$ , 设  $ME$  交  $DN$  于点  $O$ .

因为  $AB=AC$ ,  $M$ 、 $N$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点,  $BC=10$  cm,

所以  $MN = \frac{1}{2}BC = 5$  cm =  $DE$ , 且  $MN \parallel BC$ .

所以  $\angle MNO = \angle EDO$ ,  $\angle NMO = \angle DEO$ .

所以  $\triangle MNO \cong \triangle EDO$ .

由等腰三角形的性质和勾股定理,可得  $BC$  边上的高为 12 cm.

所以  $\triangle AMN$ 、 $\triangle MON$ 、 $\triangle EOD$  可以看成底同为 5 cm 的同底三角形,且这条底上的高之和为 12 cm.

所以阴影部分的面积为  $S_{\triangle AMN} + 2S_{\triangle DOE} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$  (cm<sup>2</sup>).

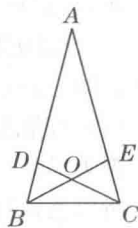
**题后反思** 本题在探求阴影部分的面积时,可以运用特殊化的计算方法,比如当点  $D$  与点  $B$  重合时,较易求出阴影部分的面积,从而为解决问题找到思路.

**典型题二** 如图,  $D$ 、 $E$  分别为  $\triangle ABC$  的边  $AB$ 、 $AC$  上的点,  $BE$  与  $CD$  相交于  $O$  点. 现有四个条件:

①  $AB=AC$ , ②  $OB=OC$ , ③  $\angle ABE = \angle ACD$ , ④  $BE=CD$ .

(1) 请你选出两个条件作为题设,余下的两个作为结论,写出一个正确的命题:

命题的条件是 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_, 命题的结论是 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_



(均填序号).

(2) 证明你写出的命题.

**思路点拨** 四个条件选出两个条件作为题设,余下的两个作为结论,可以写出六个命题,对它们分别进行判断便可找到正确的命题.

**详细解答** (1) ①、③,②、④.

(2) 已知: $D$ 、 $E$ 分别为 $\triangle ABC$ 的边 $AB$ 、 $AC$ 上的点,且 $AB=AC$ , $\angle ABE=\angle ACD$ .

求证: $OB=OC$ , $BE=CD$ .

证明:因为 $AB=AC$ , $\angle ABE=\angle ACD$ , $\angle BAE=\angle CAD$ ,所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$ .

所以 $BE=CD$ .

又 $\angle BCD=\angle ACB-\angle ACD=\angle ABC-\angle ABE=\angle CBE$ ,

所以 $\triangle BOC$ 是等腰三角形.所以 $OB=OC$ .

**题后反思** ①、④为题设,②、③为结论的命题不正确,其他组合构成的命题均正确.在选择命题时,要选择最简单的进行证明.

**典型题三** (1) 如图(1),直角 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$ ,点 $D$ 、 $E$ 是线段 $AC$ 上两动点,且 $AD=EC$ , $AM$ 垂直 $BD$ ,垂足为 $M$ , $AM$ 的延长线交 $BC$ 于点 $N$ ,直线 $BD$ 与直线 $NE$ 相交于点 $F$ .

试判断 $\triangle DEF$ 的形状,并加以证明.

(2) 如图(2),若点 $D$ 、 $E$ 是直线 $AC$ 上两动点,其他条件不变,试判断 $\triangle DEF$ 的形状,并说明理由.

**思路点拨**  $\triangle DEF$ 的形状比较容易看出,但证明有较大难度.在这里将边的关系转化为角的关系,充分利用条件,抓住等腰直角三角形的性质构造全等是较好的方法.对于问题(2),可尝试问题(1)同样的方法,抓住不变的东西.

**详细解答** (1)  $\triangle DEF$ 是等腰三角形.

证明:如图(3),过点 $C$ 作 $CP\perp AC$ ,交 $AN$ 延长线于点 $P$ .

因为直角 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$ ,所以 $\angle BAC=90^\circ$ , $\angle ACB=45^\circ$ ,

所以 $\angle PCN=\angle ACB$ , $\angle BAD=\angle ACP$ ,

因为 $AM\perp BD$ ,所以 $\angle ABD+\angle BAM=\angle BAM+\angle CAP=90^\circ$ .

所以 $\angle ABD=\angle CAP$ ,所以 $\triangle BAD\cong\triangle ACP$ ,

所以 $AD=CP$ , $\angle ADB=\angle P$ .

因为 $AD=CE$ ,所以 $CE=CP$ .

因为 $CN=CN$ ,所以 $\triangle CPN\cong\triangle CEN$ .

所以 $\angle P=\angle CEN$ ,所以 $\angle CEN=\angle ADB$ ,所以 $\angle FDE=\angle FED$ .

所以 $\triangle DEF$ 是等腰三角形.

(2)  $\triangle DEF$ 为等腰三角形.

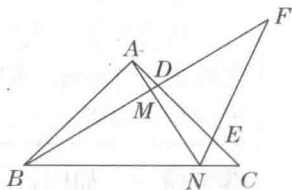
证明:过点 $C$ 作 $CP\perp AC$ ,交 $AM$ 的延长线于点 $P$ .

因为直角 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$ ,所以 $\angle BAC=90^\circ$ , $\angle ACB=45^\circ$ ,所以 $\angle PCN=\angle ACB=\angle ECN$ .

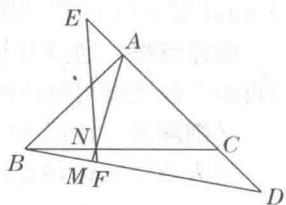
因为 $AM\perp BD$ ,所以 $\angle ABD+\angle BAM=\angle BAM+\angle CAP=90^\circ$ ,所以 $\angle ABD=\angle CAP$ .

所以 $\triangle BAD\cong\triangle ACP$ .

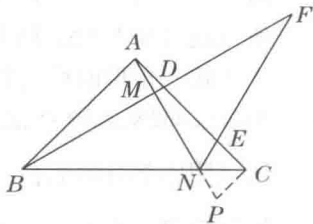
所以 $AD=CP$ , $\angle D=\angle P$ ,因为 $AD=EC$ ,所以 $CE=CP$ .



(1)



(2)



(3)



又因为  $CN=CN$ , 所以  $\triangle CPN \cong \triangle CEN$ . 所以  $\angle P = \angle E$ , 所以  $\angle D = \angle E$ .

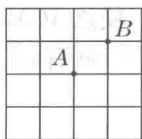
所以  $\triangle DEF$  为等腰三角形.

**题后反思** 本题充分利用等腰直角三角形的性质, 抓住线段之间、角之间的关系, 构造全等三角形, 从而实现角与角之间关系的转化, 得出结论. 本题也可以构造  $BC$  边上的高来解决问题.

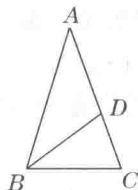
## ★ A 选择题

\_\_\_月\_\_\_日星期\_\_\_

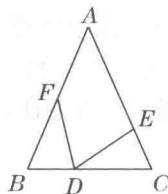
1. 等腰三角形的两边长分别为 4 和 5, 则它的周长为 ( )  
 A. 13 或 14      B. 13      C. 14      D. 9
2. 若等腰三角形的一个角为  $30^\circ$ , 则另两个角为 ( )  
 A.  $75^\circ, 75^\circ$       B.  $30^\circ, 120^\circ$       C.  $75^\circ, 75^\circ$  或  $30^\circ, 120^\circ$       D.  $60^\circ, 90^\circ$
3. 等腰三角形一腰上的高与腰长之比为  $1:2$ , 则等腰三角形的顶角为 ( )  
 A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $150^\circ$       D.  $30^\circ$  或  $150^\circ$
4. 已知在正方形网格中, 每个小方格都是边长为 1 的正方形,  $A, B$  两点在小方格的顶点上, 位置如图所示, 点  $C$  也在小方格的顶点上, 且以  $A, B, C$  为顶点的三角形是等腰三角形, 则点  $C$  的个数为 ( )  
 A. 2 个      B. 4 个      C. 6 个      D. 8 个



第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

5. 如图, 已知等腰  $\triangle ABC$  中, 顶角  $\angle A = 36^\circ$ ,  $BD$  为  $\angle ABC$  的平分线, 则:  $\frac{AD}{AC}$  的值为 ( )  
 A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$       C. 1      D.  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
6. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC$ ,  $D$  为  $BC$  上一点,  $BF=CD$ ,  $CE=BD$ , 那么  $\angle EDF$  等于 ( )  
 A.  $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$       B.  $90^\circ - \angle A$   
 C.  $180^\circ - \angle A$       D.  $45^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

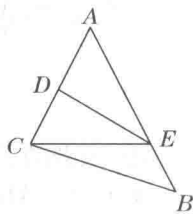
## ★ B 填空题

\_\_\_月\_\_\_日星期\_\_\_

7. 已知等腰  $\triangle ABC$  的腰  $AB=AC=13$  cm, 底边  $BC=10$  cm, 则  $\angle A$  的平分线的长是 \_\_\_\_\_ cm.

8. 如图,  $ED$  为  $\triangle ABC$  的  $AC$  边的垂直平分线, 且  $AB=5$ ,  $\triangle BCE$  的周长为 8. 则  $BC=$  \_\_\_\_\_.

9. 某小区有一块面积为  $160 \text{ m}^2$  的等腰三角形草地, 测得其一边长为 20 m, 为美化小区环境, 现要给这块三角形草地围上白色的低矮栅栏, 则其长度



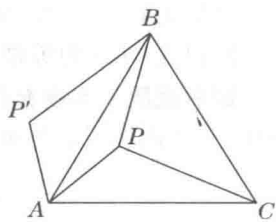
第 8 题图

为\_\_\_\_\_ m.

10. 如图,  $P$  是等边三角形  $ABC$  内的一点, 且  $PA=6, PB=8, PC=10$ . 若将  $\triangle PAC$  绕点  $A$  逆时针旋转后, 得到  $\triangle P'AB$ , 则点  $P$  与点  $P'$  之间的距离为\_\_\_\_\_,  $\angle APB=$ \_\_\_\_\_°.

11. 从边长为 10 的等边三角形  $ABC$  内的任意一点  $P$  作三边的垂线段, 这三条垂线段长度之和=\_\_\_\_\_.

12.  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC$ , 过  $\triangle ABC$  某一顶点的直线可将  $\triangle ABC$  分成两个等腰三角形, 则  $\triangle ABC$  各内角的度数为\_\_\_\_\_.



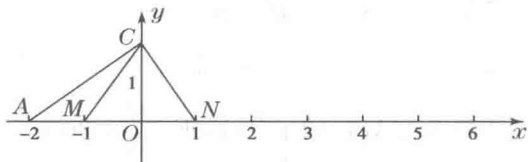
第 10 题图

## ★ 解答题

\_\_\_月\_\_\_日星期\_\_\_

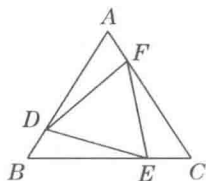
13.  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC, \angle A=120^\circ$ ,  $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $N$ , 交  $BC$  于点  $M$ , 请判断  $CM$  与  $BM$  的数量关系, 并证明之.

14. 如图, 在直角坐标系中,  $\triangle CMN$  是等边三角形, 且  $OM=ON=1, OA=2, P$  是  $x$  轴正半轴上的一点, 当点  $P$  在  $x$  轴正半轴上移动时, 是否存在这样的一点  $P$ , 使  $\triangle ACM$  与以  $C, N, P$  为顶点的三角形相似? 若存在, 请确定点  $P$  的位置并画出  $\triangle CNP$ , 且给予解释; 若不存在, 也请说明理由.



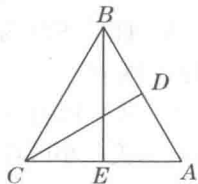
15. 如图,  $\triangle ABC$  是等边三角形.

- (1) 若  $AD=BE=CF$ , 问  $\triangle DEF$  是等边三角形吗? 试证明你的结论;
- (2) 若  $\triangle DEF$  是等边三角形,  $AD=BE=CF$  成立吗? 试证明你的结论.



16. 如图在  $\triangle ABC$  中, 点  $D, E$  分别在边  $AB, AC$  上, 给出 5 个论断:  
①  $CD \perp AB$ , ②  $BE \perp AC$ , ③  $AE=CE$ , ④  $\angle ABE=30^\circ$ , ⑤  $CD=BE$ .

- (1) 如果论断①、②、③、④都成立, 那么论断⑤一定成立吗?



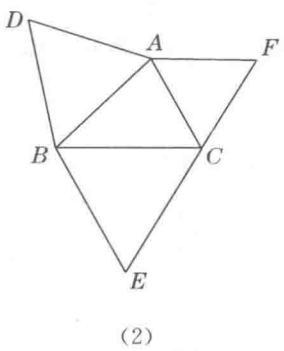
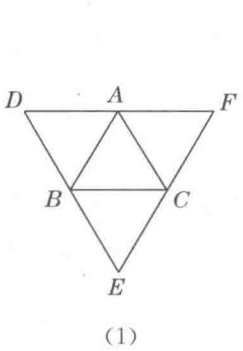
(2) 从论断①、②、③、④选取 3 个作为条件, 将论断⑤作为结论做成一道真命题, 那么你选的 3 个论断是 \_\_\_\_\_; (只需填论断的序号)

(3) 用你选的 3 个论断作为条件, 论断⑤作为结论组成一道证明题, 画出图形, 写出已知、求证并加以证明.

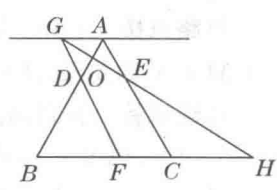
17. 已知 $\triangle ABC$ , 分别以  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  为边向外作等边三角形  $ABD$ 、等边三角形  $BCE$ 、等边三角形  $ACF$ .

(1) 如图(1), 当 $\triangle ABC$  是等边三角形时, 请你写出满足图中条件、四个成立的结论;

(2) 如图(2), 当 $\triangle ABC$  中只有 $\angle ACB=60^\circ$ 时, 请你证明  $S_{\triangle ABC}$  与  $S_{\triangle ABD}$  的和等于  $S_{\triangle BCE}$  与  $S_{\triangle ACF}$  的和.



18. 已知: 如图, 等边三角形  $ABC$  的边长为 6, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上, 且  $AD=AE=2$ . 若点  $F$  从点  $B$  开始以每秒 1 个单位长的速度沿射线  $BC$  方向运动, 设点  $F$  运动的时间为  $t$  秒, 当  $t > 0$  时, 直线  $FD$  与过点  $A$  且平行于  $BC$  的直线相交于  $G$ ,  $GE$  的延长线与  $BC$  的延长线相交于点  $H$ ,  $AB$  与  $GH$  相交于点  $O$ .



- (1) 设 $\triangle EGA$  的面积为  $S$ , 写出  $S$  与  $t$  的函数关系式;
- (2) 当  $t$  为何值时,  $AB \perp GH$ ?
- (3) 请你证明 $\triangle GFH$  的面积为定值;
- (4) 当  $t$  为何值时, 点  $F$  和点  $C$  为线段  $BH$  的三等分点?

## 专题二 直角三角形的再认识

### 知 识 要 点

直角三角形的两个锐角互余. 直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方(勾股定理).  
两锐角互余的三角形是直角三角形. 如果一个三角形有两边的平方和等于第三边的平方, 那么这个三角形是直角三角形(勾股定理的逆定理).

直角三角形全等的判定方法有: 可用判定一般三角形全等的方法(即 SAS, ASA, AAS, SSS)判定直角三角形全等. 还可用“斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等”(简称为“HL”)判定直角三角形全等.

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

直角三角形中,  $30^\circ$ 角所对的直角边等于斜边的一半.

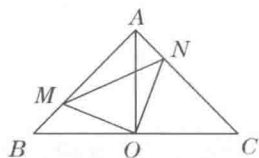
角平分线上的点到这个角的两边的距离相等; 在一个角的内部, 到角的两边距离相等的点, 在这个角的平分线上.

三角形的三条角平分线交于一点.

研究直角三角形, 要充分利用直角三角形的性质和判定方法, 解决如计算线段、证明线段倍分关系、证明线段平方关系等问题. 另外, 全等或相似的知识和方法也常用于研究与直角三角形有关的问题. 有些看似与直角三角形无关的问题通过构造垂直关系也可转化为直角三角形问题.

6

**典型题一** 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC$ ,  $\angle BAC=90^\circ$ , 点  $O$  为  $BC$  的中点, 如果点  $M$ 、 $N$  分别在线段  $AB$ 、 $AC$  上移动, 在移动过程中保持  $AN=BM$ , 请猜想 $\triangle OMN$ 的形状, 并证明你的猜想.



**思路点拨** 利用等腰直角三角形的性质, 观察图形, 通过全等寻找  $OM$ 、 $ON$  的关系, 从而对 $\triangle OMN$ 的形状作出判断.

**详细解答** 在直角 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC$ ,  $\angle BAC=90^\circ$ , 点  $O$  为  $BC$  的中点, 所以  $\angle OAN=\angle OBM=45^\circ$ ,  $OA=OB$ .

又因为  $AN=BM$ , 所以  $\triangle AON \cong \triangle BOM$ . 所以  $ON=OM$ ,  $\angle AON=\angle BOM$ .

因为  $\angle AOB=\angle BOM+\angle AOM=90^\circ$ , 所以  $\angle MON=\angle AON+\angle AOM=90^\circ$ .

所以 $\triangle OMN$ 是等腰直角三角形.

**题后反思** 本题的研究中, 全等起到了重要的作用. 在确定 $\triangle OMN$ 的形状时, 同学们可能只确定它是等腰三角形, 实际上只要注意操作、观察, 就会有更多的发现.

**典型题二** 已知: 在直角 $\triangle ABC$ 中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 设 $\triangle ABC$ 的面积为  $S$ , 周长为  $l$ .

(1) 填表:

三边 $a, b, c$	$a+b-c$	$\frac{S}{l}$
3, 4, 5	2	
5, 12, 13	4	
8, 15, 17	6	

(2) 如果  $a+b-c=m$ , 观察上表猜想:  $\frac{S}{l} = \underline{\hspace{2cm}}$  (用含有  $m$  的代数式表示).

(3) 证明(2)中的结论.

**思路点拨** 填表后观察, 提出猜想, 再加以证明.

**详细解答** (1) 填表:

三边 $a, b, c$	$a+b-c$	$\frac{S}{l}$
3, 4, 5	2	$\frac{1}{2}$
5, 12, 13	4	1
8, 15, 17	6	$\frac{3}{2}$

(2)  $\frac{S}{l} = \frac{m}{4}$ .

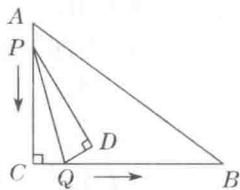
(3) 证明: 因为  $a+b-c=m$ , 所以  $a+b=m+c$ , 所以  $a^2+2ab+b^2=m^2+c^2+2mc$ .

因为  $a^2+b^2=c^2$ , 所以  $2ab=m^2+2mc$ . 所以  $\frac{ab}{2} = \frac{1}{4}m(m+2c)$ .

所以  $\frac{S}{l} = \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b+c} = \frac{\frac{1}{4}m(m+2c)}{m+c+c} = \frac{m}{4}$ .

**题后反思** 本题体现了从特殊到一般的认识事物的规律.

**典型题三** 如图, 在直角  $\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=12$ ,  $BC=16$ , 动点  $P$  从点  $A$  出发沿  $AC$  边向点  $C$  以每秒 3 个单位长的速度运动, 动点  $Q$  从点  $C$  出发沿  $CB$  边向点  $B$  以每秒 4 个单位长的速度运动.  $P, Q$  分别从点  $A, C$  同时出发, 当其中一点到达端点时, 另一点也随之停止运动. 在运动过程中,  $\triangle PCQ$  关于直线  $PQ$  对称的图形是  $\triangle PDQ$ . 设运动时间为  $t$  (秒).



(1) 设四边形  $PCQD$  的面积为  $y$ , 求  $y$  与  $t$  的函数关系式;

(2)  $t$  为何值时, 四边形  $PQBA$  是梯形?

(3) 是否存在时刻  $t$ , 使得  $PD \parallel AB$ ? 若存在, 求出  $t$  的值; 若不存在, 请说明理由;

(4) 通过观察、画图或折纸等方法, 猜想是否存在时刻  $t$ , 使得  $PD \perp AB$ ? 若存在, 请估计  $t$  的值在括号中的哪个时间段内 ( $0 \leq t \leq 1$ ;  $1 < t \leq 2$ ;  $2 < t \leq 3$ ;  $3 < t \leq 4$ ); 若不存在, 请简要说明理由.

**思路点拨** 本题是与直角三角形有关的综合型问题, 对于每个问题都要认真分析、重新构图, 充分利用图形的性质来解决问题.

**详细解答** (1) 由题意知  $CQ=4t$ ,  $PC=12-3t$ , 所以  $S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}PC \cdot CQ = -6t^2 + 24t$ .

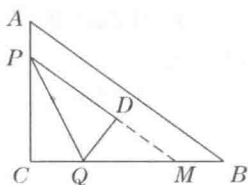
因为  $\triangle PCQ$  与  $\triangle PDQ$  关于直线  $PQ$  对称, 所以  $y = 2S_{\triangle PCQ} = -12t^2 + 48t$ .

(2) 当  $\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB}$  时, 有  $PQ \parallel AB$ , 而  $AP$  与  $BQ$  不平行, 这时四边形  $PQBA$  是梯形,

因为  $AC=12, BC=16, CQ=4t, PC=12-3t$ , 所以  $\frac{12-3t}{12} = \frac{4t}{16}$ , 解得  $t=2$ .

所以当  $t=2$  秒时, 四边形  $PQBA$  是梯形.

(3) 设存在时刻  $t$ , 使得  $PD \parallel AB$ , 延长  $PD$  交  $BC$  于点  $M$ , 如图, 若  $PD \parallel AB$ , 则  $\angle QMD = \angle B$ , 又因为  $\angle QDM = \angle C = 90^\circ$ ,



所以直角 $\triangle QMD \sim$ 直角 $\triangle ABC$ ,

从而 $\frac{QM}{AB} = \frac{QD}{AC}$ ,

因为 $QD = CQ = 4t, AC = 12, AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ , 所以 $QM = \frac{20}{3}t$ .

若 $PD \parallel AB$ , 则 $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB}$ , 得 $\frac{12-3t}{12} = \frac{4t + \frac{20}{3}t}{16}$ ,

解得 $t = \frac{12}{11}$ . 所以当 $t = \frac{12}{11}$ 秒时,  $PD \parallel AB$ .

(4) 存在时刻 $t$ , 使得 $PD \perp AB$ . 时间段为:  $2 < t \leq 3$ .

题后反思 对于问题(4), 通过计算可得到当 $t = \frac{36}{13}$ 时,  $PD \perp AB$ .

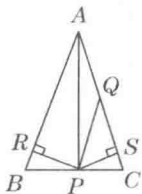
## ★ 选择题

\_\_\_月\_\_\_日 星期\_\_\_

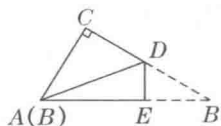
1. 满足下列条件的两个三角形一定全等的是 ( )
- A. 腰相等的两个等腰三角形      B. 一个角对应相等的两个等腰三角形
- C. 斜边对应相等的两个直角三角形      D. 底相等的两个等腰直角三角形

2. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中,  $AQ = PQ, PR = PS, PR \perp AB$ 于 $R, PS \perp AC$ 于 $S$ , 有以下三个结论: ①  $AS = AR$ ; ②  $QP \parallel AR$ ; ③  $\triangle BRP \cong \triangle CSP$ , 其中 ( )

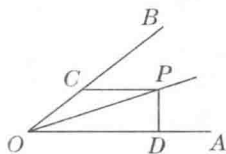
- A. 全部正确      B. 仅①正确      C. 仅①、②正确      D. 仅①、③正确



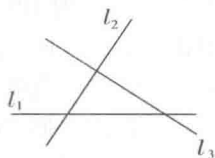
第2题图



第3题图



第4题图



第5题图

3. 如图, 将直角边 $AC = 6$  cm、 $BC = 8$  cm的直角 $\triangle ABC$ 纸片折叠, 使点 $B$ 与点 $A$ 重合, 折痕为 $DE$ , 则 $CD$ 等于 ( )

- A.  $\frac{25}{4}$       B.  $\frac{22}{3}$       C.  $\frac{7}{4}$       D.  $\frac{5}{3}$

4. 如图所示,  $\angle AOP = \angle BOP = 15^\circ, PC \parallel OA, PD \perp OA$ , 若 $PC = 4$ , 则 $PD$ 等于 ( )

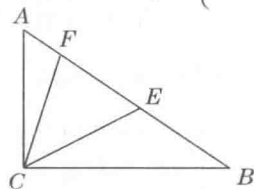
- A. 4      B. 3      C. 2      D. 1

5. 如图,  $l_1, l_2, l_3$ 表示三条相互交叉的公路, 现要建一个货物中转站, 要求它到三条公路的距离相等, 则可选择地址有 ( )

- A. 一处      B. 二处      C. 三处      D. 四处

6. 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB = 90^\circ, AC = AE, BC = BF$ , 则 $\angle ECF$ 的度数为 ( )

- A.  $60^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $30^\circ$       D.  $15^\circ$

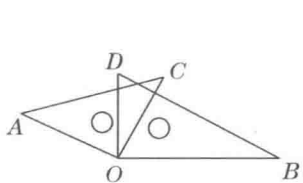


第6题图

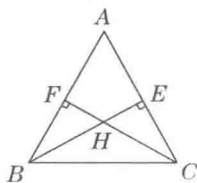
## ★ B 填空题

\_\_月\_\_日星期\_\_

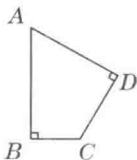
7. 等边三角形的边长为 20, 则它的面积为\_\_\_\_\_.
8. 如图, 将一副直角三角板叠在一起, 使直角顶点重合于点  $O$ , 则  $\angle AOB + \angle DOC$  =\_\_\_\_\_.
9. 已知: 如图,  $BE$ 、 $CF$  为  $\triangle ABC$  的高, 且  $BE=CF$ ,  $BE$ 、 $CF$  交于点  $H$ , 若  $BC=10$ ,  $FC=8$ , 则  $EC$  =\_\_\_\_\_.



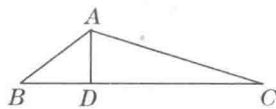
第 8 题图



第 9 题图



第 10 题图



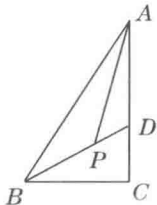
第 12 题图

10. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ,  $BC = 2$ ,  $CD = 3$ , 则  $AB$  =\_\_\_\_\_.
11.  $\triangle ABC$  是等腰三角形, 由顶点  $A$  所引  $BC$  边的高线恰等于  $BC$  边长的一半, 则  $\angle BAC$  =\_\_\_\_\_.
12. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 120^\circ$ ,  $AD \perp BC$  于  $D$ , 且  $AB + BD = DC$ , 那么  $\angle C$  =\_\_\_\_\_.

## ★ C 解答题

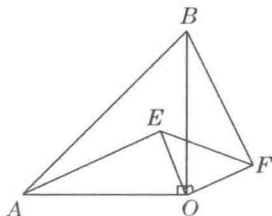
\_\_月\_\_日星期\_\_

13. 如图, 已知: 在直角  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BD$  平分  $\angle ABC$  且交  $AC$  于  $D$ .
- (1) 若  $\angle BAC = 30^\circ$ , 求证:  $AD = BD$ ;
- (2) 若  $AP$  平分  $\angle BAC$  且交  $BD$  于  $P$ , 求  $\angle BPA$  的度数.



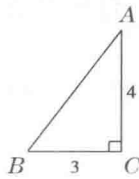
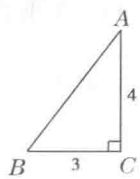
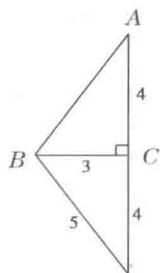
14. 如图, 已知, 等腰直角  $\triangle OAB$  中,  $\angle AOB = 90^\circ$ , 等腰直角  $\triangle EOF$  中,  $\angle EOF = 90^\circ$ , 连结  $AE$ 、 $BF$ .

求证: (1)  $AE = BF$ ;  
(2)  $AE \perp BF$ .



15. 如图,在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ , $AC=4$ , $BC=3$ . 在直角 $\triangle ABC$ 的外部拼接一个合适的直角三角形,使得拼成的图形是一个等腰三角形,如图所示.

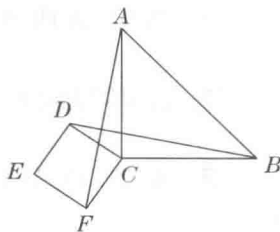
要求:在两个备用图中分别画出两种与示例不同的拼接方法,并在图中标明拼接的直角三角形的三边长.



16. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,其中 $CA=CB$ ,四边形 $CDEF$ 是正方形,连接 $AF$ 、 $BD$ .

(1) 观察图形,猜想 $AF$ 与 $BD$ 之间有怎样的关系,并证明你的猜想;

(2) 若将正方形 $CDEF$ 绕点 $C$ 按顺时针方向旋转,使正方形 $CDEF$ 的一边落在 $\triangle ABC$ 的内部,请你画出一个变换后的图形,并对照已知图形标记字母,题(1)中猜想的结论是否仍然成立? 若成立,直接写出结论,不必证明;若不成立,请说明理由.





17. 如图(1),一架长4米的梯子  $AB$  斜靠在与地面  $OM$  垂直的墙壁  $ON$  上,梯子与地面的倾斜角  $\alpha$  为  $60^\circ$ .

(1) 求  $AO$  与  $BO$  的长;

(2) 若梯子顶端  $A$  沿  $NO$  下滑,同时底端  $B$  沿  $OM$  向右滑行.

① 如图(2),设  $A$  点下滑到  $C$  点, $B$  点向右滑行到  $D$  点,并且  $AC:BD=2:3$ ,试计算梯子顶端  $A$  沿  $NO$  下滑多少米;

② 如图(3),当  $A$  点下滑到  $A'$  点, $B$  点向右滑行到  $B'$  点时,梯子  $AB$  的中点  $P$  也随之运动到  $P'$  点.若  $\angle POP'=15^\circ$ ,试求  $AA'$  的长.

