

好玩的

数学

修订版

张景中 主编

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

古算诗题探源

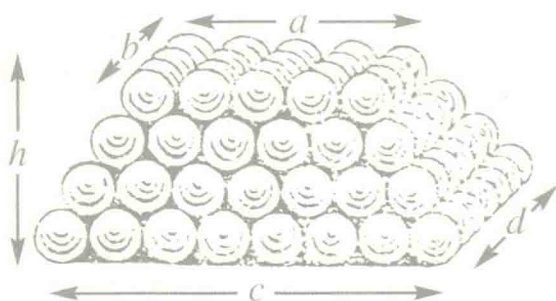
徐品方 徐伟_二著

诗言志，歌抒情。

古算诗词题，融数学于诗词之中，

不愧是智慧的光彩、思维的奇葩、

人类情感的结晶。



科学出版社

好玩的

数学

(修订版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

古算诗题探源



徐品方 徐伟 著

科学出版社

内 容 简 介

我国古代不少数学家以诗歌抒怀,他们把自己钟爱的、珍珠般的数学名题以及博大精深的数学思想方法,编成耐人寻味的诗词、口诀和歌谣。本书精选出其中的 140 多首进行诠释,译为白话,给出古今解法,探究来由(特别是源头),纵横联想,巧妙引申,并以充满情趣的生动描写、蕴含哲理的精辟议论使一些深奥的数学名题变得通俗易懂、生动有趣,给人以丰富的数学知识和启迪,激发读者对数学的兴趣。

本书可供大中学校师生课外阅读,可作为数学史教学参考,也可供数学史和文化史爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

古算诗题探源/徐品方,徐伟著,一修订本,一北京:科学出版社,2015.4

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-043570-5

I. 古… II. ①徐…②徐… III. ①古典数学—中国—通俗读物②古典诗歌—诗歌欣赏—中国 IV. ①0112-49②I207.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 044877 号

责任编辑:胡升华 霍羽升 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张倩 / 整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 4 月第 三 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 4 月第一次印刷 印张:14 3/4

字数:235 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自2004年10月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印10余次，平均发行量近45 000套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为B5开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编 者
2015年3月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是

人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第2个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这3个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无学生版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中

外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4) / 5$$

$$b = 4(x+4) / 25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1 / (113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

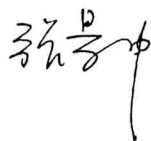
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

A handwritten signature in black ink, appearing to be '张中' (Zhang Zhong) with a stylized flourish at the end.

2004年9月9日

前言

诗言志，歌抒情，还可勉励、鼓舞、助兴、消愁和自娱等。宋朝理学家邵雍写有一诗：

一去二三里，烟村四五家。
亭台六七座，八九十枝花。

用 10 个数字入诗，勾勒出一幅朴实自然的乡村风俗画。

古算诗词题，是反映数学数量关系的内在联系及其规律的一种文学浪漫形式。我国古算家文理兼优，有的以数入诗，用生动活泼、押韵的语言，把珍珠般的古算名题和博大精深的算法算理，有意识地编成耐人寻味、朗朗上口的诗词词赋或歌谣，表达数学菁华的思想方法、传递数的信息、启迪后辈心智，使抽象难懂的数学题得到形象押韵的诗味表述，既有助于理解记诵，又可激起人们浓厚的兴趣。例如，清代梅穀成《增删算法统宗》(1761)一书上有下面二首诗题：

远望巍巍塔七层，红光点点倍加增。
共灯三百八十一，请问尖头几盏灯。

和

三寸鱼儿九里沟，口尾相衔直到头。
试问鱼儿多少数，请到对面说因由。

这些琳琅满目、风格各异的数学诗词题，是闪耀着古算家智慧的光彩，闪现着电光火石般璀璨的古算思维奇葩。因此，古算诗词题不愧是人类情感的结晶。

古算诗词题也很美，韵味浓郁，寓情寓理，惹人喜爱。读是享受，思是锻炼，用是丰收，美不胜收，不亦乐乎！

本书从卷帙浩繁的古今算史书中，精选出趣味古算诗词题 140 多首，进行注释，译为白话，给出古今解法（另外还涉及著名古算趣题很多道，也给出译文与古今算法）。此外，还把重点放在探寻诗词题的源头，进行追迹，纵横联想，巧妙引申，适当简介一些相关数学背景与史料以及古代数学家生平逸趣等。以富有诗意的细腻描述、充满情趣的生动阐述以及蕴涵哲理的精辟议论，融知识性、趣味性和文理史哲多学科为一体，紧扣现代数学教材，遵循研究古算原则——用现代数学知识和科学方法评价，它不是古算复述，也不是用现代知识来改写古算。它使古算诗题变得通俗化、大众化，尽力引起读者思想共鸣，激起读者对数学的热情，古为今用，擦燃创新火花，从而提高大众的数学文化素质。

笔者研究发现，我国创用诗歌表达古算题目、算法，且有文字记载最早的是《孙子算经》（公元 4 世纪，如卷下第 34 题）和南宋数学家杨辉（生活于 13 世纪）的著作。

中国古算诗词歌赋较多。例如，南宋杨辉的《日用算法》（1262）一书自序称“编诗括十有三首”，这是算法化、口诀化、大众化的代表作之一；元朱世杰《算学启蒙》（1299）和《四元玉鉴》（1303）；元贾享《算法全能集》（有许多是用歌诀形式表达）；明吴敬《九章算法比类大全》（1450）；明程大位《算法统宗》（1592）以及明代的刘仕隆（33 首）、王文素、柯尚迁和徐心鲁等人的著作中都有；清代有梅穀成（1681～1763）的《增删算法统宗》等。特别有趣的是，程大位著作中共有 110 首诗词题，他叫“难题”其中就有数学诗词题（其中，五言、七言诗题 71 首，词题 37 首，使用了“西江月”、“鹧鸪天”、“水仙子”、“浪淘沙”、“风栖梧”、“双捣练”、“梅气清”、“驻马听”八种词牌，以“西江月”为最多，共 26 题）。但程大位的诗词题，许多是选自吴敬的著作（共

331 题)。

古算家编写创作的诗词题，结构严谨、层次分明、脉络清晰、气韵流畅、格调高雅、绘声绘色、颇具魅力、发人深思，反映当时社会政治经济和生产生活，源于实践，用于现实，如丈量田亩、建筑施工、兴修水利、赋役纳税、宴客沽酒、牧童嬉戏，甚至描写名山大川、古塔庙宇、历史人物等。这些诗词题所涉及的数学知识内容有算术（本书至少有 33 首）；代数（本书至少有 60 首），如一、二、三次方程，无理方程，不定方程，等差等比数列等问题；几何（本书至少有 47 题），如勾股定理、面（体）积、作图与测量等问题。

古算诗词题在数学教育中十分重要，应占有一席之地，不能低估它的作用和效果。遗憾的是古今有人认识不到其价值与作用，如宋朝的荣棨（棨，音启，qǐ）在《九章算经·序》（载于 1261 年杨辉《详解九章算法》书前）中说：“奈何自靖康（1126）以来，罕有旧本^①，间有存者，徂^②于末习，不循本意。或隐问以欺众^③，或添歌象^④以炫己，乖万世益人之心，为一时射利之具……”从序文可知，在南宋首都临安（今杭州市）一带有各种各样的古算书，他在当时已经看到古算书上有诗词题（未录书目），但他把“歌象”加以贬斥，似有偏见。其实，古算诗词题除教育功能外，可以构建数学与人文科学之间的桥梁，让读者从中感悟到数学与文史、数学与文化的交融、汇合。

事实上，有的古算诗词题，因要照顾押韵，确有语言含糊难懂，译为白话也非易事，但是，大多古算诗词题是很好的，古代编者为了增加初学者的兴趣，编写的古算诗词题还是适合一般民

① 根据序文，指《九章算经》之类古代数学书。

② 徂，音纽，niǔ，意为因袭习俗，此作习惯解。

③ 此句指隐蔽问答蒙惑众人。

④ 歌象（象，音团，tuàn）指用诗歌表达数学问题。

众口味、受到欢迎的。如口呼歌词、算法算理，易懂易记；有的口诀呼出，即可按计算程序进行演算，如杨辉的“九归”、“化零歌”等，所以古算诗词题有一定帮助记忆的作用，容易在民间流传，许多流传至今未衰，散见于数学课本、读物等书刊之中。

为了弘扬我国古代优秀的传统文化，延续古算诗词题文化遗产，使其能薪尽火传，光照后代，本书尽可能浅显、通俗、生动、简明地加以介绍与评论，特别是探其由来。因此，本书具有可读性、实用性、趣味性、学术性以及收藏性，是一本素质教育和创新教育的好玩的数学读物。

教育部 2003 年颁布《普通高中数学课程标准》(实验)，开设数学史选修课，吹响了普及数学史的号角。因此，本书可供大中学校师生课外阅读或教学参考，亦可供数学史或文化史爱好者阅读。

本书许多初等数学的现代解法，是由徐伟完成的。

由于作者水平有限，本书不足之处，敬希读者不吝指示。

徐品方 徐 伟

2007 年 3 月

于四川西昌学院南校区

目 录

丛书修订版前言

第一版总序

前言

01 算术部分	1
1.1 纳税算账	1
“算”字的起源	
1.2 鱼儿有几	3
“算术”的起源	
1.3 苏武流放	4
程大位《算法统宗》	
1.4 唐僧取经	7
梅氏数学世家	
1.5 男女捉兔（鹧鸪天，又名思佳客 ^① ）	9
“数”字的起源	
1.6 庐山路程	11
横看成岭侧成峰	
1.7 推车求里	12
1.8 两求斤歌	13
杨 辉	
什么是数学	
1.9 绩麻分布	16
1.10 纺织分配（西江月）	18
笔算简史	
1.11 算题对联	19
1.12 经商本钱（水仙子）	20
1.13 船载油盐	21
程大位谈数学	