智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

立体几何 微积分

上海科学普及出版社

智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

立体几何
微积分

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题精编. 立体几何、微积分/李正兴著.
--上海：上海科学普及出版社，2014.8
ISBN 978-7-5427-6172-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 147135 号

责任编辑 张建青

高中数学专题精编
立体几何 微积分
李正兴 著
上海科学普及出版社出版发行
（上海中山北路 832 号 邮政编码 200070）
http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 上海叶大印务发展有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 15.5 字数 378 000
2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-6172-9 定价：28.00 元

序

300余万字的《高中数学专题精编》丛书，由昂立智立方中学生教育研究院院长卢影精心策划，经历了我整整两年的笔耕，终于如愿完成并付梓在即. 这是我退休之后完成的第六套数学教育专著，也是我15年来出版的所有数学教育专著中篇幅最长、花费工夫最大、写作时间最长的一套.

《高中数学专题精编》分为8册，根据课程标准以及近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲、注重思维、立足各版教材，目标是在专题上有所突破，在夯实基础的同时，全面提升学生的能力和素质. 它涵盖了高中数学的所有知识板块，并以知识板块为分册依据，每个分册针对一至两个板块，满足学生在这些知识点上的学习需求. 而在谋篇布局上，既考虑了高一、高二学生新授知识的需要，又考虑到高三学生迎考冲刺的需求，每个分册都由基础篇和拓展提高篇组成，力求层次清楚、坡度平稳，基础一般的学生和优秀学生都能使用.

一、基础篇中章与章之间、讲与讲之间环环相扣. 每讲从"知识储备"、"双基回眸"、"例题精讲"、"易错警示"、"链接高考"、"专项训练"等六个方面实施"推进式"辅导，每章最后给出若干份阶段检测卷来对整章知识进行全面考核.

1. "知识储备"：重要知识点一览无余，从而达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标. 你想要完整地夯实数学基础，你想在数学高考中获得高分，对知识点的整理归纳是必不可少的重要步骤.

2. "双基回眸"：复习过程中的"热身"，通过3～5题紧扣本讲知识的基础小题，巩固"通识"，掌握"通法"，带给高中学生攻克数学堡垒的灵感.

3. "例题精讲"：针对每讲应掌握的知识点，给出若干紧扣考纲、能呈现基础知识和解题通法的典型例题，并给出"策略点击"与详细的解法步骤. 例题的涉及面广，题型多样，通过一题多解的方式，倡导多角度、多维度地分析问题、突破难点，引导学生拓展思维、循序渐进、由此及彼、逐步深入，进而能举一反三，掌握若干解题方法.

4. "易错警示"：帮助学生寻找易错点，进行查漏补缺. 对大多数学生而言，在数学学习过程中常有一个瓶颈存在，就是在每次测试中低级错误不断，问题出在对知识点以及解题通法不能做到"了然于胸". 解决这一问题，是短时间内提高成绩的有效途径.

5. "链接高考"：高中阶段的数学学习完成后，大多数学生总是要参加数学高考的，所以在高一、高二阶段的数学学习过程中，渗透高考的要求是必需的. 这里所选的例题通常是经历时间洗礼或近年来在高考(或自主招生考试)中出现的具有创新精神的精彩好题，这些例题典型性强，能启迪思维，揭示规律性. 同时，对近年来高考命题的走向进行科学分析，展示解题过程中的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.

6. "专项训练"：每讲至少给出一份专项训练卷(重点专项给出A、B两份甚至A、B、C三份专项训练卷)，题型新而全，基础题、中档题、难题合理布局，并大多给出详解. 通过专项

训练可以激发学生的潜能,进一步深入理解和掌握相关知识点,提高解题的能力和技巧.

二、拓展提高篇所讲的是体现能力要求的重点专题,充满了知识的交汇、方法与技巧的展示、数学思想的顿悟,是高考中常出压轴题之所在,也是名牌大学自主招生的"主打板块".所选例题大多是近年来出现的一些极其典型的试题,浓缩了一种纯粹的高考精华,体现了一种全新的备考理念,既是基本方法的科学总结,又是决战千里的锦囊妙计.剑指难点,迎战不慌!

本人从事高中数学教育工作30余年,退休至今一直沉潜在这一领域也已有7年,我认为一名优秀的高中数学教师对教学过程应当有通盘考虑,对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控.如对每一节课如何引入和展开,知识层面上如何发散,如何抓住学生的注意力,如何激发学生的兴趣,课后如何精选习题和巩固练习,如何进行检测反馈,都要作出独具匠心的安排.我崇尚戏剧式的数学教学,追求完美的有节奏感的深入推进,上每堂专题课都如同导演一场舞台剧,序幕、情节展开、高潮、升华、思考,一环紧扣一环,引领学生走向成功.

胡适有言:"成功不必在我,功力必不唐捐".在丛书完稿之时,填词一首,是生命的感受,不吐不快.

金缕曲

数苑四十载,在教坛,华发染鬓,才情尽送.
叹高次方程无解,世事原来不公.
难将息,灵泉源涌,五色尚存生花笔,向人间,纸墨相吟弄.
夜深沉,海上风.
青春岁月消踪,想当年,意气勃发,今已成空.
一曲清歌浦江畔,汗牛也要充栋.
君不见,江湖澒洞.
得失无关文章事,勤耕耘.
莘莘学子有用,脚乃健,心犹雄.

每当我想起钱锺书先生的诗句:"睡乡分境隔山川,枕坼槐安各一天,那得五丁开路手,为余凿梦两通连",更激励我无怨无悔地做学生们的"开路手",为具有梦想的学生们写作,他们的受益是我的快乐.我不会在喧闹的人世间迷失方向,我找到了最适合我的天性的生活,对我而言是理想的生活.感谢我的妻子杨惠芬,没有她的支持,我的2 000余万字、35部专著是不可能写出来的,亲情使我获得生命的享受,我坚信,大自然提供的只是素材,唯有亲情才能把素材创造成完美的作品,我获得的任何细小的成功都有她的陪伴,这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福.我还要感谢昂立智立方中学生教育研究院高中数学教研组长李璐璐老师帮我校对了一部分书稿,责任编辑张建青先生8年来为出版我的书所付出的辛勤劳动.

限于本人水平,书中难免存在的疏漏之处,欢迎读者批评指正.

李正兴

2014年夏于海上述而斋

目　录

基　础　篇

（每讲配有专项训练）

拓展提高篇

基 础 篇

JICHUPIAN

第一章　空间直线与平面

第一讲　平面及其基本性质

一、知识储备

1. 四个公理及等角定理：

(1) 公理 1：如果一条直线上两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内.

(2) 公理 2：过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

(3) 公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面有且只有一条过该点的公共直线.

(4) 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(5) 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

2. 证明共面的条件：

(1) 过不共线的三点有且仅有一个平面.

(2) 过直线和直线外一点有且仅有一个平面.

(3) 过两条相交直线有且仅有一个平面.

(4) 过两条平行直线有且仅有一个平面.

二、双基回眸

1. 判断下列各命题是否正确，并说明理由：

(1) 三点确定一个平面.

(2) 经过同一点的三条直线确定一个平面.

(3) 设 A 表示点、a 表示直线、α 表示平面，若 $A\in a$，$A\in\alpha$，则 $a\subsetneqq\alpha$.

(4) 平面 α 和平面 β 有不在同一直线上的三个公共点 A、B、C.

(5) 两两相交的三条直线不共面.

2. 求证：两两相交且不过同一个点的三条直线在同一个平面内.

3. 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$（四条线段首尾相接，且联结点不在同一平面内，所组成的空间图形叫空间四边形）各边 AB、AD、CB、CD 上的点，且直线 EF 和 HG 交于点 P. 求证：点 B、D、P 在同一条直线上.

解法导析：1. (1) 假命题. 根据公理 3，只有不在同一直线上的三点才能确定一个平面，若三点共线，则经过三点有无数个平面.

(2) 假命题. 经过一点的两条直线确定一个平面,但经过一点的三条直线则不一定确定一个平面,可能一个也可能三个.

(3) 假命题. 根据已知条件,直线 a 上只有一个点在平面内,而根据公理 1,直线 a 上必须有两个不同的点在平面 α 内,直线 a 才能在平面 α 内. 故该命题为假.

(4) 假命题. 根据公理 2,平面 α 和平面 β 的公共点一定在同一直线上.

(5) 假命题. 两两相交的三条直线,若不共点,则必共面;但若共点,则不一定共面.

2. 如图 1－1 所示,本题改写为已知、求证形式. 已知:直线 AB、BC、CA 两两相交. 交点分别为 A、B、C. 求证 AB、BC、CA 在同一平面内.

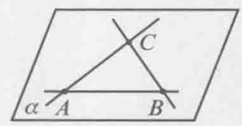


图 1－1

证明:由直线 AB、AC 相交于点 A,可知直线 AB 和 AC 确定一个平面 α(推论 2).

$\because$ $B\in AB$、$C\in AC$,$\therefore$ $B\in\alpha$,$C\in\alpha$. 可得 $BC\subsetneqq\alpha$(公理 1)
因此,直线 AB、BC、CA 在同一平面内.

3. **证明**:如图 1－2 所示.

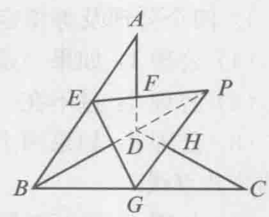


图 1－2

$\because$ 直线 $EF\cap$直线 $HG=P$,

$\therefore$ $P\in$直线 EF. 而 $EF\subsetneqq$平面 ABD,

$\therefore$ $P\in$平面 ABD.

同理,$P\in$平面 CBD,即点 P 是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点.

显然,点 B、D 也是平面 ABD 和平面 CBD 的公共点,由公理 2 知,点 B、D、P 都在平面 ABD 和平面 CBD 的交线上,

即点 B、D、P 在同一条直线上.

三、例题精讲

例 1　如图 1－3 所示. 已知 P、Q、R、S、M、N 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1、A_1D_1、A_1A 的中点,求证:P、Q、R、S、M、N 共面.

策略点击:证明空间点共面问题,可根据公理 2. 先取三点(不共线的三点)确定一个平面,再证其他各点都在这个平面内.

证明:如图 1－3 所示. 连结 QP 并延长交 DA 的延长线于 H_1,连结 MN 并延长交 DA 延长线于 H_2.

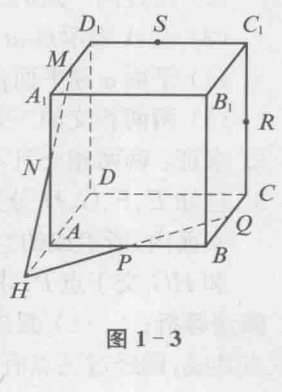


图 1－3

由 Q、P 均为中点,且 $BC/\!/AD$,易证:$AH_1=BQ=\frac{1}{2}BC$.

同理可证:$AH_2=A_1M=\frac{1}{2}A_1D_1$.

$\because$ $A_1D_1=BC$,$\therefore$ H_1,H_2 重合,不妨设为 H.

若设过 N、P、Q 的平面为平面 α,易知 $H\in\alpha$.

$\because$ $N\in\alpha$,$\therefore$ $M\in\alpha$.

同理可证:$R,S\in\alpha$,$\therefore$ P、Q、R、S、M、N 共面.

例 2　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 B_1D 与平面 A_1BCD_1 相交于点 P. 求证：B、P、D_1 三点共线.

策略点击：当一个问题从正面解决它有困难时就考虑从反面去解决. 这是一种变换思想，所谓变换即是运用一定的措施和手段. 把面临的数学问题转换成与之等价的一个或几个简单的数学问题，从而使原问题得到解决的方法. 当我们证明原命题有困难时，往往变换为证明它的等价命题——逆否命题，这就是反证法的一种重要形式. 反证法是从否定欲证结论，即从假定结论的反面成立出发，经过正确、严格的推理，得到与已知(假设)或已成立的数学命题相矛盾的结果，检查产生矛盾的原因，不是推理之错，乃是否定结论所致. 本题由题设易证 C、P、A_1 都是平面 A_1BCD_1 和平面 A_1B_1CD 的公共点，若 $P\notin BD_1$ 就会得出平面 A_1BCD_1 与平面 A_1B_1CD 有两条交线 CA_1 和 CP，与公理 2 矛盾. 本题宜用反证法证明.

证明：如图 1-4 所示，连结 A_1D、B_1C.

由 $C\in$ 平面 A_1B_1CD 且 $C\in$ 平面 A_1BCD_1 得 $C\in$(平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 A_1B_1CD).

同理可得 $A_1\in$(平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 A_1B_1CD).

故平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 $A_1B_1CD=CA_1$.

假设点 $P\notin BD_1$，则由 $B_1D\cap$ 平面 $A_1BCD_1=P$，知

$P\in B_1D\subsetneqq$ 平面 A_1B_1CD 且 $P\in$ 平面 A_1BCD_1.

$\therefore$ $P\in$(平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 A_1B_1CD).

由此得平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 $A_1B_1CD=CP$.

这样，平面 A_1BCD_1 与平面 A_1B_1CD 有两条不同的交线 CA_1 和 CP，这与公理 2 相矛盾. 因此，$P\in BD_1$，即 B、P、D_1 三点共线.

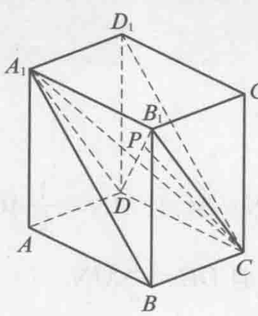


图 1-4

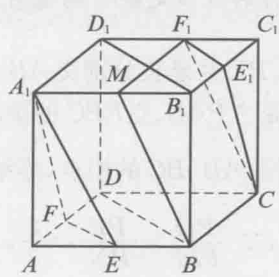


图 1-5

例 3　如图 1-5 所示. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 AB、AD 中点，E_1、F_1 分别为 B_1C_1、C_1D_1 中点.

求证：(1) $EF \underline{\mathbin{/\!/}} E_1F_1$；

(2) $\angle EAF_1=\angle E_1CF_1$.

策略点击：求证两直线平行，目前有两种途径：一是应用公理 4，即找到第三条直线，证明这两条直线都与之平行，二是证明在同一平面内，这两条直线无公共点. 求证角相等：一是用等角定理；二是用三角形全等或相似，本题的解答正是公理 4 与等角定理的应用.

解：(1) 连结 BD，B_1D_1，在 $\triangle ABD$ 中，

$\because$ E、F 分别为 AB、AD 的中点，$\therefore$ $EF \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$.

同理，$E_1F_1 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}B_1D_1$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1 \underline{\underline{\parallel}} DD_1$，

$\therefore$四边形 BB_1D_1D 为平行四边形，$\therefore$ $BD \underline{\underline{\parallel}} B_1D_1$.

又 $EF \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$，$E_1F_1 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}B_1D_1$，$\therefore$ $EF \underline{\underline{\parallel}} E_1F_1$.

(2) 取 A_1B_1 的中点 M，连结 F_1M、BM，则 $MF_1 \underline{\underline{\parallel}} B_1C_1$，

又 $B_1C_1 \underline{\underline{\parallel}} BC$，$\therefore$ $MF_1 \underline{\underline{\parallel}} BC$，$\therefore$ 四边形 BMF_1C 为平行四边形，$\therefore$ $BM /\!/ CF_1$.

$\because$ $A_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$，$BE = \frac{1}{2}AB$，且 $A_1B_1 \underline{\underline{\parallel}} AB$，$\therefore$ $A_1M \underline{\underline{\parallel}} BE$.

$\therefore$ 四边形 BMA_1E 为平行四边形.

$\therefore$ $BM /\!/ A_1E$，$\therefore$ $CF_1 /\!/ A_1E$.

同理可证 $A_1F /\!/ CE_1$.

$\because$ $\angle EA_1F$ 与 $\angle E_1CF_1$ 的两边分别对应平行，且方向都相反，

$\therefore$ $\angle EA_1F = \angle E_1CF_1$.

例 4 如图 1－6 所示. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，D、E 分别是 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的垂心. 求证 $DE /\!/ AC$，$DE = \frac{1}{3}AC$.

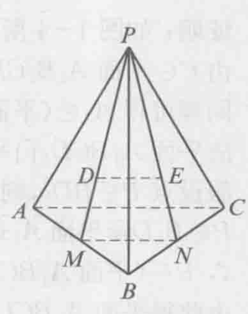


图 1－6

策略点击：利用三线平行公理时，关键是找到与两条待证平行线都平行的直线. 为此经常借助线面平行的性质定理等构造第三条直线.

解：连结 PD、PE 并延长分别交 AB、BC 于 M、N.

$\because$ D、E 分别是 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$ 的垂心.

$\therefore$ M、N 分别是 AB、BC 的中点，连结 MN，则 $MN /\!/ AC$ 且 $MN = \frac{1}{2}AC$. ①

在 $\triangle PMN$ 中，$\because$ $\frac{PD}{PM} = \frac{PE}{PN} = \frac{2}{3}$，$\therefore$ $DE /\!/ MN$ 且 $DE = \frac{2}{3}MN$. ②

由①②根据公理 4 得 $DE /\!/ AC$.

且 $DE = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$.

四、易错警示

例 如图 1－7 所示. 已知在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 边上的点，且 $\frac{BG}{GC} = \frac{DH}{HC} = 2$. 求证：直线 EG、FH、AC 相交于一点.

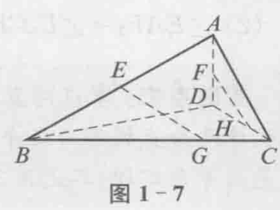


图 1－7

错证：如图 1-8 所示，

$\because$ E、F 分别是 AB、AD 的中点，连结 EF，

$\therefore$ $EF /\!/ BD, EF=\frac{1}{2}BD$.

又 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，连结 GH，$\therefore$ $GH /\!/ BD, GH=\frac{1}{3}BD$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

设梯形的两腰 EG、FH 相交于一点 T.

$\because$ $\frac{DH}{HC}=2$，F、H 分别是 AD、DC 上的点，

$\therefore$ AC 与 FH 交于一点. $\therefore$ 直线 EG、FH、AC 相交于一点.

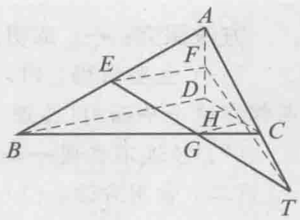


图 1-8

评析及正解：上述证法是错误的，究其原因是对平面的基本性质应用不正确. 对三个公理认识不足，尤其是对公理 3 的理解有误. 正确的证明如下：

$\because$ E、F 分别是 AB、AD 的中点，连结 EF，$\therefore$ $EF /\!/ BD, EF=\frac{1}{2}BD$.

又 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，$\therefore$ $GH /\!/ BD, GH=\frac{1}{3}BD$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

设两腰 EG、FH 相交于一点 T. $\because$ $EG \subsetneq$ 平面 ABC，$FH \subsetneq$ 平面 ACD.

$\therefore$ $T \in$ 平面 ABC，且 $T \in$ 平面 ACD，又平面 $ABC \cap$ 平面 $ACD=AC$.

$\therefore$ $T \in AC$. $\therefore$ 直线 EG、FH、AC 相交于一点 T.

五、链接高考

例 1 如图 1-9 所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O，AC、BD 交于点 M，求证：点 C_1、O、M 共线.

方法探究：证明若干点共线问题，通常采用如下方法：找出某两个平面的交线，然后证明各个点是这两个平面的公共点，根据公理 2，这些点都在交线上. 解决这一类问题的关键是找到这条交线，有时是选择其中两点确定一条直线，将这条直线作为两个平面的交线.

证明：$A_1A /\!/ C_1C \Rightarrow A_1A$、$C_1C$ 确定平面 A_1ACC_1，

$$\left.\begin{array}{l}A_1C \subsetneq \text{平面 } A_1ACC_1 \\ \text{又 } O \in A_1C\end{array}\right\} \Rightarrow O \in \text{平面 } A_1ACC_1.$$

平面 $BC_1D \cap$ 直线 $A_1C=O \Rightarrow O \in$ 平面 BC_1D，

O 在平面 A_1ACC_1 与平面 BC_1D 的交线上. $AC \cap BD=M \Rightarrow M \in$ 平面 BC_1D 且 $M \in$ 平面 A_1ACC_1，平面 $BC_1D \cap$ 平面 $A_1ACC_1=C_1M$，$\therefore$ $O \in C_1M$，即 O、C_1、M 三点共线.

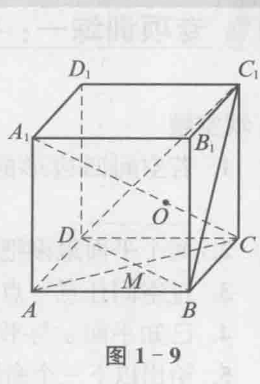


图 1-9

例 2 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 D_1C_1、C_1B_1 的中点. $AC \cap BD=P$，$A_1C_1 \cap EF=Q$. 求证：

(1) D、B、F、E 四点共面；

(2) 若 A_1C 交平面 $DBFE$ 于 R 点，则 P、Q、R 三点共线.

方法探究：一、证明点线共面问题：

(一) 主要依据：(1) 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内(公理 1).

(2) 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(公理 2).

(二) 常用方法：(1) 纳入平面法：先确定一个平面，再证明有关点线在此平面内.

(2) 辅助平面法：先根据有关的点、线确定平面 α，再根据其余元素确定平面 β，最后证明平面 α、β 重合.

(3) 反证法(见本讲例题精讲：例 3).

二、证明三点共线问题：

(一) 主要依据：公理 3. 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他的公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线. 也就是说一个点若是两个平面的公共点，则这个点在这两个平面的交线上.

(二) 常用方法：(1) 首先找出两个平面，然后证明这三点都是这两个平面的公共点，根据公理 3 知，这些点都在交线上.

(2) 选择其中两点确定一条直线，然后证明另一点也在其上.

解：(1) 如图 1－10 所示，$\because$ EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线，

$\therefore$ $EF /\!/ B_1D_1$.

在正方体 AC_1 中，$B_1D_1 /\!/ BD$，$\therefore$ $EF /\!/ BD$.

$\therefore$ EF、BD 确定一个平面，即 D、B、F、E 四点共面.

(2) 在正方体 AC_1 中，设平面 A_1ACC_1 确定的平面为 α，又设平面 $DBFE$ 为 β.

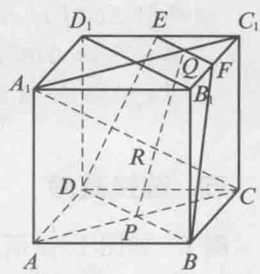


图 1－10

$\because$ $Q \in A_1C_1$，$\therefore$ $Q \in \alpha$.

又 $Q \in EF$，$\therefore$ $Q \in \beta$. 则 Q 是 α 与 β 的公共点.

同理，P 点也是 α 与 β 的公共点，$\therefore$ $\alpha \cap \beta = PQ$.

又 $A_1C \cap \beta = R$，$\therefore$ $R \in A_1C$，$R \in \alpha$，且 $R \in \beta$，则 $R \in PQ$，故 P、Q、R 三点共线.

专项训练一：平面及其基本性质

一、填空题

1. 若空间四边形的对角线长度相等，则顺次连结它的各边中点所成的四边形是________.
2. 两个平面最多把空间分成________部分，三个平面最多把空间分成________部分.
3. 过空间任意一点引三条直线，它们所确定的平面个数是________个.
4. 已知平面 α 与平面 β、平面 γ 都相交，则这三个平面可能的交线有________条.
5. 给出以下三个命题：① 若空间四点不共面，则其中无三点共线；② 若直线 l 上有一点在平面 α 外，则 l 在 α 外；③ 两两相交的三条直线共面. 其中正确的命题是________.（写出所有正确命题的序号）

6. 以下命题正确的是________.（填序号）
① 三点确定一个平面
② 线段 AB 在平面 α 内，但直线 AB 不在平面 α 内
③ 三条直线两两相交时不一定共面
④ 两个平面可以有两条公共直线

7. 空间三条直线，如果其中一条直线和其他两条直线都相交，那么这三条直线能确定的平面个数是________.

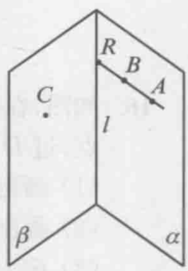
8. 空间三条直线两两相交，点 P 不在这三条直线上，那么由点 P 和这三条直线最多可以确定的平面的个数为________.

二、选择题

9. 若直线上有两个点在平面外，则（　　）.
A. 直线上至少有一个点在平面内　　B. 直线上有无穷多个点在平面内
C. 直线上所有点都在平面外　　D. 直线上至多有一个点在平面内

10. 空间四点 A、B、C、D 共面而不共线，那么四点中（　　）.
A. 必有三点共线　　B. 必有三点不共线
C. 至少有三点共线　　D. 不可能有三点共线

11. 如图，$\alpha\cap\beta=l$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\beta$，$C\notin l$，又 $AB\cap l=R$，设 A、B、C 三点确定的平面为 γ，则 $\beta\cap\gamma$ 是（　　）.
A. 直线 AC
B. 直线 BC
C. 直线 CR
D. 以上皆错



第 11 题图

12. 已知 A、B、C、D 是空间四点，命题甲：A、B、C、D 四点不共面，命题乙：直线 AC 和 BD 不相交. ① 若甲，则乙，② 若乙，则甲，则（　　）.
A. ①成立，②不成立　　B. ①不成立，②成立
C. ①②都成立　　D. ①②都不成立

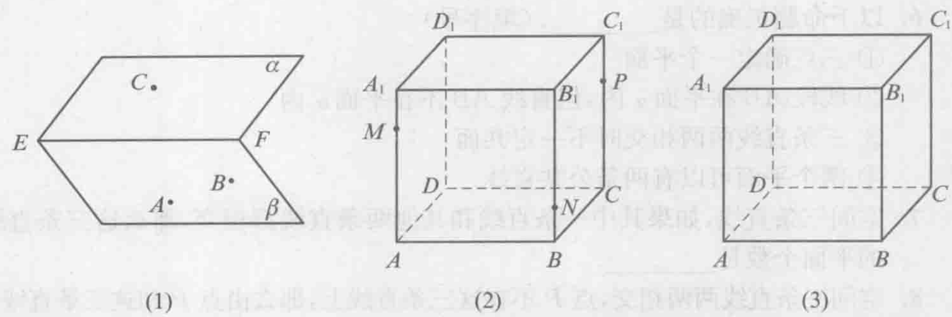
三、作图题

13. (1) 如图(1)，已知：平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 EF，$A\in\beta$，$B\in\beta$，$C\in\alpha$，画出过点 A、B、C 的平面.
(2) 如图(2)，已知：$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，M、N、P 分别为棱上的点，试画出过 M、N、P 的截面.
(3) 如图(3)，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，试作出截面 BB_1D_1D 与截面 A_1C_1B 的交线，截面 AB_1D 与截面 A_1C_1B 的交线.

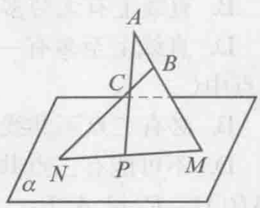
四、解答题

14. (1) 求证：三条互相平行的直线和一条直线都相交，这四条直线必在同一个平面内；
(2) 已知 a、b、c、d 是两两相交且不共点的四条直线，求证：a、b、c、d 共面.

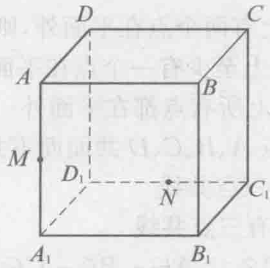
15. 已知△ABC 在平面 α 外，其三边所在的直线满足 $AB\cap\alpha=M$，$BC\cap\alpha=N$，$AC\cap\alpha=P$，如图所示，求证：M、N、P 三点共线.



第 13 题图



第 15 题图



第 16 题图

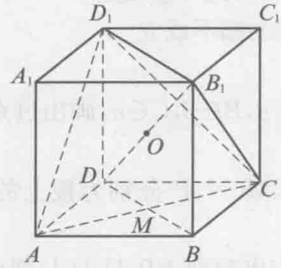
16. 如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中. M、N 分别为 AA_1、D_1C_1 的中点，过 D、M、N 的平面 α 与正方体下底面相交于直线 l.

(1) 画出直线 l;

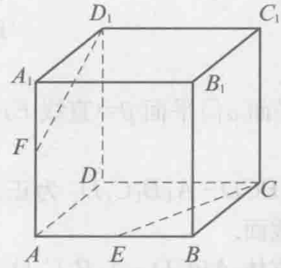
(2) 画出 α 与正方体的各面的交线;

(3) 记 $l\cap A_1B_1=P$，求 PB_1 的长.

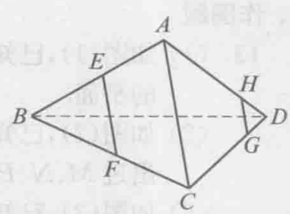
17. 如图所示. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，B_1D 与平面 ACD_1 交于点 O，BD 与平面 ACD_1 交于点 M，求证：M、O、D_1 三点共线.



第 17 题图



第 18 题图



第 19 题图

18. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点，F 为 AA_1 的中点. 求证：(1) E、C、D_1、F 四点共面.

(2) CE、D_1F、DA 三线共点.

19. 在四面体 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB 和 BC 的中点，G、H 分别是 CD 和 AD 上的点，且 $\frac{DG}{DC}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{3}$. 求证：$EH$、$FG$、$BD$ 相交于一点.

第二讲　几何体的直观图与三视图

一、知识储备

1. 水平放置的平面图形的直观图：画水平放置的平面直线形的直观图一般用斜二测画法. 这种画法的规则是：

① 在已知图形中取互相垂直的轴 Ox、Oy，画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使$\angle x'O'y'=45°$(或 $135°$). 它所确定的平面表示水平面.

② 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段.

③ 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中，保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，其长度为原来的一半.

2. 三视图：将空间体放正并摆在三投影面体系中，然后利用正投影将该立体分别向三个投影面投射，即可得到该立体的正面投影、水平投影和侧面投影. 三个投影分别叫做：

主视图——向正立投影面(V 面)投射得到的视图；

俯视图——向水平投影面(H 面)投影得到的视图；

左视图——向侧立投影面(W 面)投射得到的视图.

二、双基回眸

1. 已知正三角形 ABC 的边长为 a，那么$\triangle ABC$ 的平面直观图$\triangle A'B'C'$的面积为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

2. 已知$\triangle ABC$ 的直观图 $A'B'C'$是边长为 a 的正三角形，则原$\triangle ABC$ 的面积为________.

3. 如图 1－11 所示，网格纸上小正方形的边长为 1. 粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为(　　).

A. 6　　B. 9

C. 12　　D. 18

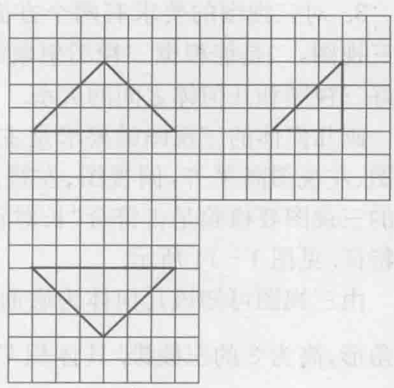


图 1－11

解法导析：上面三小题皆在巩固直观图与三视图知识. 1、2 两题是直观图问题，且正好从正反两个角度探求三角形的面积.

求直观图面积的关键是依据斜二测画法. 求出相应的直观图的底边和高，也就是原来实际图形中的高线，在直观图中变为与水平直线成 $45°$且长度为原来的一半的线段，以此为依据来求出相应的高线即可.