王金战
图书

金牌学习方法 备战考试升学

轻松搞定专题系列

读金战图书 助孩子成才
外研教辅
外研社·王金战图书工作室

轻松搞定

高中数学

概率统计与排列组合

主　　编：王金战
本册主编：李锦旭

哪不会学哪，哪不足练哪，
一个专题，一本搞定！

外语教学与研究出版社

王金战
图书

金牌学习方法 备战考试升学

轻松搞定专题系列

轻松搞定

高中数学

概率统计与排列组合

主　　编：王金战
本册主编：李锦旭

外语教学与研究出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

轻松搞定高中数学概率统计与排列组合 / 李锦旭主编. — 北京 : 外语教学与研究出版社, 2014.6
(轻松搞定专题系列 / 王金战主编)
ISBN 978-7-5135-4772-7

Ⅰ. ①轻… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

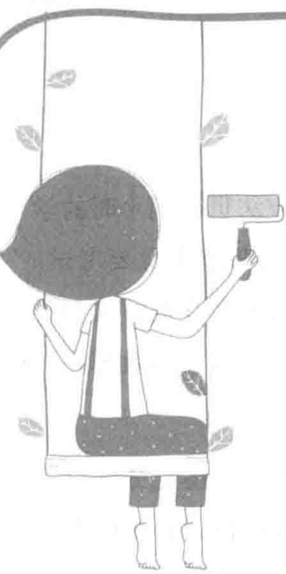
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 133607 号

出 版 人　蔡剑峰
总 策 划　关　淼
责任编辑　潘瑞芳
执行编辑　李永辉
封面设计　高　佳
出版发行　外语教学与研究出版社
社　　址　北京市西三环北路 19 号（100089）
网　　址　http://www.fltrp.com
印　　刷　保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　10
版　　次　2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5135-4772-7
定　　价　23.00 元

外研社教辅出版分社：
咨询电话：010-88819610（编辑部）　010-88819436 / 9050（市场部）
传　　真：010-68469248
新浪 / 腾讯官方微博：@ 外研社教辅（更多信息，更多交流）
电子信箱：jiaofu@fltrp.com
购书电话：010-88819928 / 9929 / 9930（邮购部）

购书咨询：（010）88819929　电子邮箱：club@fltrp.com
外研书店：http://www.fltrpstore.com
凡印刷、装订质量问题，请联系我社印制部
联系电话：（010）61207896　电子邮箱：zhijian@fltrp.com

物料号：247720001



学会学习，轻松学习

谁都想轻松把学习搞好，但当过学生的人都知道，仅靠一套课本是很难学好的，所以一定要有一些辅助的参考书，其中要包括对重点难点深入浅出的剖析、对重要知识点的针对性训练以及基于课本知识的加深拓宽。参考书多了不但会增加学习负担，造成重复性的劳动，而且一旦质量不好还会误导学习，所以挑选一套合适的参考书是学习中的一件大事。作为教师，多少年来我一直在帮学生寻找这样的书，但很少能选到理想的，后来我就干脆自己编写，讲到哪里编到哪里，并以讲义的形式发给学生，效果非常好。

2010 年，我与外研社合作，将我的讲义书稿按专题整理出来，定名为《轻松搞定高中数学》系列，同时把我书稿中的理念和体例拓展到了初中数学，定名为《轻松搞定初中数学》系列。这两个系列出版后均受到广泛好评，许多学生反映这套书给他们的学习带来了很大的帮助，让他们既可以轻松、全面、深刻、系统地掌握课本的内容，又能够针对自己的弱项进行专门的学习和训练。近两年来，一直有很多学生呼吁把数学系列拓展到其他学科。

十八大以后，我们国家在各行各业都开始了深度改革，中高考的改革更会有大动作，其中最引人注目的一点就是：很多学科将采取学完就考、考完就清的模式，这样会在很大程度上解决一次考试决定命运的弊端，也能在很大程度上减轻学生中高考的压力。但这样的变化也对学生平时的学习提出了更高的要求，为了不留后患，必须做到一步到位，门门过关，于是我们的这套专题辅导材料就显得尤为重要了。

我们挑选了一批工作在第一线的初、高中各科骨干教师，经过一年多的研究，终于推出了这套《轻松搞定》专题系列丛书，其核心理念就是帮助学生学会学习，轻松学习。

本套丛书共包括初中系列 5 个学科 19 册，高中系列 9 个学科 34 册。与同类图书相比，本套丛书有如下突出的创新点：

1. 哪不会学哪，哪不足练哪，一个专题，一本搞定

我们将每个学科的重要知识、技能划分成若干专题模块，对每一个专题模块进行专讲专练，将轻松的学习方法、记忆方法渗透其中，力求让学生轻松吃透每个模块的重要知识、技能。哪不会学哪，哪不足练哪，一个专题，一本搞定，轻松拿下薄弱环节。

2. 平时学习时的得力助手，中/高考复习时的重要法宝

本套丛书力求成为同学们平时学习的得力助手，将轻松学习的方法贯彻到平时的学习中，帮助同学们轻松突破学科中的重要知识、技能，轻松应对期中、期末等重要考试。本套丛书也是同学们中/高考复习时的重要法宝，它可以帮助中/高考考生在复习之初将各学科知识技能、重难疑点进行快速系统的梳理和学习，大大提高中/高考复习效率。

3. 最科学的专题划分，最完整的专项宝典

本套丛书专题模块的划分，除了考虑到学科本身的知识结构体系外，还充分结合了教学实际，基本符合学生各个学段的学习顺序，学生在每个学段都可以找到相应的专题分册。它涵盖了学生各个学段的重点专题模块，是一套完整的专项学习宝典。

4. 简洁清晰的层次安排，轻松明快的栏目设置

各分册层次安排简洁清晰，一目了然；各讲内的栏目编排充分体现出轻松明快的特点，“基础知识 · 轻松学”、“重难疑点 · 轻松破”、“课时作业 · 轻松练”、“中/高考试题初体验”、“我的错题本”等栏目，都让学生体会到轻松学习的乐趣。

本套丛书还配有“轻松搞定”系列名师视频课程，同学们可以登录宽高学习网 http://www.kgedu.net 或拨打 400－686－8661 咨询。如果你在学习中还有什么困难，也可以给我来信，我的邮箱地址是 wangjinzhan100@sina.com，或到我的博客 http://blog.sina.com.cn/wangjinzhan 中留言。

让学生在这套书中享受到轻松学习的快乐，让这套书成为学生不二的选择，让学生一旦拥有此书便可以轻松搞定所有学科，是我们编写这套丛书的初衷。期待你的好消息！

王金战

编者序
——爱上数学，享受数学

“不求面面俱到，但求招招有效。”

这是我们的教育专家王金战老师经常提到的一句话。在这个理念之下，王老师与全国数学名师一起编写了《轻松搞定高中数学》系列图书，将高中数学知识按专题模块划分，专讲专练，旨在帮助同学们轻松学好高中数学。

《轻松搞定高中数学》系列图书包括《轻松搞定高中数学 · 函数与导数》《轻松搞定高中数学 · 立体几何与空间向量》《轻松搞定高中数学 · 三角函数与平面向量》《轻松搞定高中数学 · 解析几何》《轻松搞定高中数学 · 数列与不等式》和《轻松搞定高中数学 · 概率统计与排列组合》，共6册。

本系列图书按照新课标编写，为通用的专题类图书，适合高中全程使用. 既可以在高一、高二同步学习时使用（具有一定的综合性），也可以在高考复习初期使用，尤其适合中等学生。

“专题 + 方法”是我们帮助同学实现轻松学习的基本思路。

高中数学是按知识模块来划分的，而在高考中常常是将不同模块的知识综合考查（例如：函数与导数、数列与不等式等）。本书按专题划分，将知识结合紧密的模块放在同一专题中讲解，能够加深同学们对该部分内容的理解，理解知识间的关联，提高解决综合问题的能力。同时这种专题分册也方便同学们有针对性地选择，做到“哪里不会学哪里，哪里不足练哪里”，轻松搞定薄弱环节。

不讲究方法的学习是枯燥的，好的学习方法可以使学习变得简单，提高同学们的学习效率。每册图书我们都针对该模块知识的重难疑点进行精讲，指导解题方法，并精选了有代表性的习题，通过习题巩固知识、提炼方法。比如：在《轻松搞定高中数学 · 数列与不等式》一书中的第2讲等差数列中，老师总结了基本量法和数列性质法两种求解数列通项公式的方法，并映射到后面等比数列的学习中。诸如此类的方法会使数学学习变

得不再枯燥，变得轻松有趣。

本系列图书主要的特色栏目：

【篇首语】总体介绍本篇内容的重要程度、知识框架及学习重点，使同学们在进入该篇的具体学习之前先对要学习的内容有一个总体的了解，帮助同学理顺学习思路、把握学习重点。

【学习目标】通过分析课标，用简洁的语言列出本讲要学习的主要知识、技能以及要达到的学习效果，指明学习方向。既可提高学习的针对性，又便于同学检测学习效果。

【考情分析】概括分析本讲内容在高考中的考查方向、考查特点，及其在高考中所占的比例和重要程度，将平时学习与最后高考紧密结合。

【基础知识 · 轻松学】将重要的基础知识进行系统地提炼、归纳，列出知识清单。在重要知识点后面配以精讲，并在梳理基础知识的同时进行知识关联、学法指导、易错提醒、技巧点拨等，以帮助同学们轻松、快速地掌握本讲知识内容。

【重难疑点 · 轻松破】针对本讲的重点、难点和疑点进行专门讲解，总结解题方法，整理解题技巧和易错点攻克方法，轻松提升解题能力。

【变式练习】针对例题设置变式练习，变换考查方式，拓展相似、相关联知识点或题目类型，以帮助同学们理解并掌握该知识点或题型。

【课时作业 · 轻松练】本部分练习充分、全面，包括 A 基础题组和 B 提升题组两个等级，涵盖本讲涉及的重要考点或考查方式，目的是让同学们循序渐进地将该讲内容彻底掌握。

【高考试题 · 初体验】选取典型高考试题，让同学们初步了解本讲内容在高考中是如何考查的，体验高考试题的形式及难度，使同学们的学习与高考紧密结合。

【我的错题本】每讲最后设置“我的错题本”，方便同学对做错的题目进行记录，分析错误原因，统计错误知识点，便于后期进行错题回顾，避免再错。

【阶段检测和综合检测】书中穿插设置了阶段检测，以便对前一段的学习效果进行检测，了解不足，及时改进. 书中最后设置了综合检测，目的在于整体检验同学们的学习效果，查漏补缺。

我们希望，《轻松搞定高中数学》系列图书，可以让更多的同学踏上轻松学习数学之路，从此不再惧怕数学，爱上数学，学好数学，享受数学带来的无穷乐趣！

目录

学会学习,轻松学习(丛书序) …… I

爱上数学,享受数学(编者序) …… Ⅲ

1 第一篇 排列与组合

第1讲 计数原理与排列 …… 3

第2讲 组合 …… 9

第3讲 排列组合综合应用 …… 17

第4讲 二项式定理 …… 24

阶段检测一 …… 31

33 第二篇 统计与概率

第5讲 古典概型 …… 34

第6讲 几何概型 …… 43

第7讲 统计 …… 49

第8讲 互斥与独立事件的概率、条件概率 …… 63

第9讲 分布列、数学期望与方差 …… 73

第10讲 统计检验简介 …… 84

第11讲 正态分布简介 …… 94

阶段检测二 …… 100

综合检测 …… 104

参考答案 …… 107

第一篇 排列与组合

本篇是进一步学习概率论的基础知识,从内容到方法都是比较独特的,其中分类计数原理和分步计数原理是本篇的基础,它是学习排列、组合、二项式定理和计算事件的概率的预备知识. 在对排列与组合内容的考查中,经常要运用分类计数原理或分步计数原理对问题进行分类或分步来分析、求解,如何灵活利用这两个原理对问题进行分类或分步往往是解应用题的关键.

从两个原理上看,完成一件事的"分类"和"分步"是有区别的,因此,在应用上,要注意将两个原理区分开. 鉴别的要领在于:所分类中"每一类"中的"每一种方法"都能独立完成这件事,而"分步"中的"步"完成"这一步",整件事并没有完成,只有每一步都完成以后整件事才算完成.

排列、组合是本篇的两个主要概念. 定义中从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素"按一定的顺序排成一列"与不管怎样的顺序"并成一组"是有本质区别的,体现的是"有序"与"无序". 有些问题的"有序"是暗含在问题与元素的本质属性之中的,要注意鉴别. 只有准确、全面把握这两个概念,才能正确区分是排列问题还是组合问题. 具体解决手段之一是取出 2 个元素交换,看结果是否有变化.

二项式定理中,公式一般都能记住,但与其相关的概念,如二项式系数、系数、常数项、项数、奇数项与偶数项、奇次方项与偶次方项、有理项与无理项等,容易混淆,需在平时加以对比分析,对通项公式进行重点训练.

对于二项展开式的通项公式,在应用上要注意:(1) 它表示二项展开式中的任意项,只要 n 与 r 确定,该项随之确定;(2) 公式表示的是第 $(r+1)$ 项;(3) 公式中 a, b 的位置不能颠倒,它们的指数和为 n;(4) r 的取值从 0 到 n,共 $(n+1)$ 个.

还要注意对二项式的灵活应用,如将三项甚至多项式转化为二项式问题来处理,以及二项式中的赋值法,等等.

高考命题特点及趋向:

本篇内容在高考中所占比重较大,一般有 1 ~ 2 道客观题和 1 道解答题,试题设计新颖、平实,有时又具有一定的灵活性、机敏性和综合性.

高考对排列、组合内容的考查,一般以实际应用题的形式出现,这是因为排列、组合的应用性强,充满思辨性,其解法多样化,符合高考选题的特点,易于考查学生的能力,试题大致可分两类:① 有附加条件的排列问题,此类题多数只有一个附加条件,且以学生熟悉的数学问题或排队问题为主;② 有附加条件的组合问题,此类题常以"至少取 n 个"或以几何为背景的分类组合问题为主. 多数时候是排列、组合的混合应用,必要时,还需用两个原理体现分类或分步求解的策略.

高考对二项式定理的考查,以二项展开式及其通项公式内容为主,要有目标意识和构造意识,要注意展开式的通项公式正、反两方面的应用. 选题也可分两类:① 直接运用通项公式求特定项的系数或与系数有关的问题;② 需用转化思想化归为二项式问题来处理的问题.

本篇试题的特点:

(1) 综合性强. 如排列、组合题大多能与集合、数列、立体几何等内容组合构成小型综合题,使每题涉及的知识点在两个以上.

(2) 对运用数学思想的要求高. 如解排列、组合问题时,需分类讨论或分步讨论,以几何为背景的排列、组合题需用数形结合的思想,在解非二项式问题时,需用转化思想化归为二项式问题求解等,这种命题特点在以后的高考中仍会保持下去.

应试策略:

(1) 根据题目特点和属性来鉴别模型、构建思维模式,造就思维依托和思维的合理定式,如对排列应用题可用:① 某元素排在某位上;② 某元素不排在某位上;③ 某几个元素排在一起;④ 某几个元素不得相邻;⑤ 某几个元素顺序一定等基本问题,加强思维的规范训练.

(2) 抓好破势训练.为提高能力,运用变式题目,在熟练掌握常规题型的基础上向典型问题转化,进行多种解法训练,从不同角度、不同侧面对题目进行全面分析,结合典型的错解分析,查找思维的缺陷,提高灵活分析问题、解决问题的能力.

(3) 抓好"操作"训练.面对问题,具体排一排、选一选,运用分类计数原理和分步计数原理为"完成这件事"设计合理的程序或分类标准,注意加强解题过程的展示与分析.

(4) 加强数学思想方法的训练.数学思想方法是高考的重要内容,本篇试题经常考查的思想方法有模型化思想、分类讨论思想、转化思想、整体思想、正难则反等,如把$(a+b+c)^n$常化为$[(a+b)+c]^n$,$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)^n$化为$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$来处理,类似的问题需要平时经常归纳总结.

另外,在复习中要控制好训练题的难度,尽量不做偏题、怪题,少做难题.

第1讲 计数原理与排列

学习目标

1. 准确理解两个原理的含义，并能从实际问题中抽出"分类""分步"要素，将实际问题归结为用两个原理来解决的问题；

2. 熟练掌握排列的定义，并能运用它解决有关排列问题.

考情分析

两个原理和排列属于最基本的计数问题，高考主要将其与组合等知识来设计题目，故需注意在实际应用中鉴别事件与元素的性质（主要是有序与无序、分类与分步），建立模型（本讲的两个原理模型、排列模型，后面的组合模型等）来分析问题和解决问题.

基础知识轻松学

一、计数原理

精讲

分类计数原理（加法原理）和分步计数原理（乘法原理）是排列组合的最基本原理，其区别是分类和分步，关键是看这里的"类"和"步"，以及"类和步"中的每一种"方法"是否能独立完成任务，能独立完成任务用加法原理，不能独立完成任务则用乘法原理.

二、排列概念

从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素，按照一定顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素取出 m 个不同元素的一个排列.

精讲

排列概念的实质是"元素有序"，注意在实际应用中应从其本质上鉴别.

三、排列数公式

$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}(n \geqslant m)$.

精讲

这个公式的获得所用的方法是"乘法原理"和位置分析法，这是解决许多排列问题的常用方法，应注意体会. 为了便于应用，现将有关于两个原理和排列的解题思维方法提炼如下：

(1) 应用原则：

① 优先原则：优先确定特殊位置和特殊元素；

② 确定性原则：对不确定的情况（元素或位置），要通过分类讨论进行确定；

③ 间接原则：直接解决困难或分类情况太多的问题，宜用间接方法解决.

(2) 常用方法：位置确定法、元素确定法、捆绑法、插空法、隔板法、字典排法、消序法等.

(3) 常见限制条件类型：在与不在问题、邻与不邻问题、含与不含问题、排组混合问题、染色问题、分组与分配问题、字典排列问题、圆排列问题、错位排列问题等.

四、排列数性质

(1) $n! = n\cdot(n-1)!$;

(2) $0! = 1$;

(3) $\mathrm{A}_{n+1}^{m+1} = \mathrm{A}_n^{m+1} + (m+1)\mathrm{A}_n^m$;

(4) $\mathrm{A}_m^m + \mathrm{A}_{m+1}^m + \cdots + \mathrm{A}_n^m = \dfrac{1}{m+1}\mathrm{A}_{n+1}^{m+1}$.

五、常用数值

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$.

重难疑点轻松破

一、用枚举法解题

例1 元旦前,某宿舍的四位同学各写一张贺卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺卡,则四张贺卡的不同分配方式有多少种?

解析:此问题研究对象较少(4个),但是限制条件较多,不是直接使用两个原理或排列组合模型可以简单求解的问题.可考虑按一定顺序有规则地列举来尝试求解.

解:设有A,B,C,D四人,在A的位置排B表示A拿B写的贺卡,其他类推,结果见下表:

A	B	C	D
B	A	D	C
B	C	D	A
B	D	A	C

从A看,A可拿B,C,D这三类贺卡,根据机会均等原则,这三类必然一样多,上表只列举了"A拿B写的贺卡"这一类,此类有三种分配方式,故总的安排方法种数为$3\times3=9$.

点评:当限制条件较多而所研究对象较少时,按一定规则列举不失为一种基本而重要的方法.本题可做推广,即数学史上著名的贝努利"错位排列"问题,其通常提法是n个有序元素,全部改变其位置的排列数是多少?

此问题称之为"错位排列"问题,后来大数学家欧拉等都有所研究.记$f(n)$表示n个元素全部错位的所有排列种数,则

$$f(n)=n!\left[\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

再推广可有:将标号为$1,2,3,\cdots,n$的n个小球放入标号为$1,2,3,\cdots,n$的n个盒子中,每个盒子内放一个小球,如果标号为$k(1\leqslant k\leqslant n)$的球恰好放入与其标号不一致(一致)的盒内,我们就称该球错位(相合),则恰好有r个球错位的放球方法种数为

$$D_{n,r}=\frac{n!}{(n-r)!}\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{r!}\right].$$

变式练习1 映射$f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$满足$f[f(x)]=f(x)$,则这样的映射有( )

A. 1个 B. 4个 C. 8个 D. 10个

变式练习2 ①函数$f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$满足$f[f(x)]=f(x)$,则这样的函数共有多少个?②函数$f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3\}$满足$f[f(x)]=f(x)$,则这样的函数共有多少个?

变式练习3 已知集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{-1,0,1\}$,则

(1)能建立映射$f:A\to B$有________个;

(2)能建立满足$f(1)+f(2)=f(3)$的映射$f:A\to B$有________个;

(3)能建立满足$f(1)\leqslant f(2)\leqslant f(3)$的映射$f:A\to B$有________个.

二、用两个原理解题

例2 集合$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集个数为________.

答案:2^n

解析:本题有多种分析方式.

思路1,用分步计数原理,可从子集的构成结构上来分析,分n个步骤考虑:每个元素都有"取"与"不取"这两种情况,故子集总个数为

$$\underbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}_{n个}=2^n.$$

点评:其实,这一结论还可有如下思路.

思路2,用分类计数原理:根据子集中所含元素的个数分类有空集有C_n^0个,含$1,2,\cdots,n$个元素的子集个数分别为$C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$,由分类计数原理可得子集总数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

思路3,先从特例入手归纳出结论,再用数学归纳法进行严格证明.

思路4,建立递推关系求解:设$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集数为x_n,易于得到$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$的子集个数为$x_{n+1}=x_n+x_n$,且$x_1=2$,于是可得$x_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

变式练习4 720的所有正约数有________个.

三、排列问题的几种常用解法

例3 5个人站成一排,求在下列条件下的不同排法种数:

(1) 甲必须在排头；(2) 甲必须在排头，并且乙在排尾；(3) 甲、乙必须在两端；(4) 甲不在排头，并且乙不在排尾；(5) 甲、乙不在两端；(6) 甲在乙前；(7) 甲在乙前，并且乙在丙前；(8) 甲、乙相邻；(9) 甲、乙相邻，但是与丙不相邻；(10) 甲、乙、丙不全相邻.

解析：注意鉴别不同叙述、不同要求对应的排列模型.

解：(1) 特殊元素是甲，特殊位置是排头. 首先排"排头"，有 A_1^1 种，再排其他 4 个位置，有 A_4^4 种，所以共有 $A_1^1 \times A_4^4 = 24$(种).

(2) 甲必须在排头，并且乙在排尾的排法种数为 $A_1^1 \times A_1^1 \times A_3^3 = 6$(种).

(3) 首先排两端，有 A_2^2 种，再排中间，有 A_3^3 种，所以甲、乙必须在两端的排法种数为 $A_2^2 \times A_3^3 = 12$(种).

(4) 用间接法：甲不在排头，并且乙不在排尾的排法种数为 $A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3 = 78$(种).

(5) 因为两端位置符合条件的排法有 A_3^2 种，中间位置符合条件的排法有 A_3^3 种，所以甲、乙不在两端的排法种数为 $A_3^2 \times A_3^3 = 36$(种).

(6) 因为甲、乙共有 2! 种顺序，所以甲在乙前的排法种数为 $A_5^5 \div 2! = 60$(种).

(7) 因为甲、乙、丙共有 3!种顺序，所以甲在乙前，并且乙在丙前的排法种数为 $A_5^5 \div 3! = 20$(种).

(8) 把甲、乙看成一个人来排，有 A_4^4 种，而甲、乙也存在顺序变化，所以甲、乙相邻的排法种数为 $A_4^4 \times A_2^2 = 48$(种).

(9) 首先排甲、乙、丙外的两个人，有 A_2^2 种，从而产生 3 个空，把甲、乙看成一个人与丙插入这 3 个空中的两个，有 A_3^2 种排法，而甲、乙也存在顺序变化，所以甲、乙相邻，但是与丙不相邻的排法种数为 $A_2^2 \times A_3^2 \times A_2^2 = 24$(种).

(10) 因为甲、乙、丙相邻有 $A_3^3 \times A_3^3$ 种排法，所以甲、乙、丙不全相邻的排法种数为 $A_5^5 - A_3^3 \times A_3^3 = 84$(种).

点评：(1) ~ (5) 均为特殊元素与特殊位置需要优先考虑问题；(6)(7) 为平均分组问题，解法有多种，如"消序法"等，注意"先选后排"策略；(8) ~ (10) 为相邻与不相邻问题，解法是"捆绑法"与"插空法".

变式练习 5 在由数字 1,2,3,4,5 组成的所有没有重复数字的五位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有(　　)

A. 56 个　　B. 57 个　　C. 58 个　　D. 60 个

变式练习 6 给定数字0,1,2,3,5,9，每个数字最多用一次.

(1) 可能组成多少个四位数?
(2) 可能组成多少个四位奇数?
(3) 可能组成多少个四位偶数?
(4) 可能组成多少个自然数?

四、关于平均分组问题

例 4 有 2 个红球、3 个黄球和 4 个白球，同色球不加以区分，将这 9 个球排成一列，有________种不同的方法.

答案：1260

解析：可看成是"平均分组问题".

9 个球排成一列，有 A_9^9 种排法，再除以 2 红、3 黄、4 白的顺序即可，故共有排法 $\dfrac{A_9^9}{A_2^2A_3^3A_4^4} = 1260$(种).

变式练习 7 将 $(n+1)$ 个不同的小球放入 n 个不同盒子，要求每个盒子中至少有一个小球，则不同放法的种数为________.

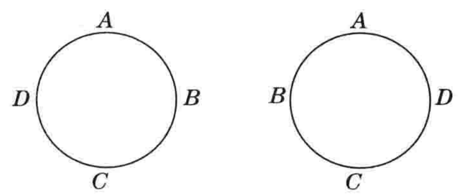
五、关于环状排列问题

例 5 10 个同学参加丢手帕游戏，基本规则是其中 1 人丢手帕，其他人环坐一圈. 问：一共有多少种不同的游戏位置坐法?

解析：分两步思考：第一步，选出丢手帕的同学；第二步，对余下的 9 个同学进行环状排列. 这是有条件的排列 —— 环状排列问题.

解：简化问题，减少人数来研究，以便发现规律：先来研究 4 人的环状排列数.

法 1(列举法)　如图 1-1.



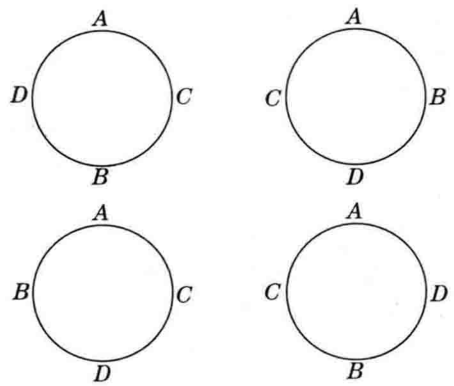


图 1-1

由列举法可知,4 人的环状排列有 6 种不同的排法.

法 2(直接法) 由于坐成的是圈,则不妨固定某个人的座位,再把这个圈剪开,则问题成为 3 个人在 3 个位置上的排列,即 3 个元素排成一排的全排列. 故有 $A_3^3=6$(种)坐法.

法 3(间接法) 先不考虑环状坐法,排成一排,则为 A_4^4,再审视所有坐法,以 1234 坐法为例,1234,2341,3412,4123 在线状排列中是 4 个排列,在环状排列中却是同一个,所以应为 $\frac{A_4^4}{4}=A_3^3=6$(种)坐法.

推广 1:m 个不同元素的环状排列数为 $A_{m-1}^{m-1}=(m-1)!$.

推广 2:从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素的环状排列的方法数为 $C_n^m\cdot A_{m-1}^{m-1}$.

变式练习 8 如果这 10 个同学均匀分成两组(两组不加区别)围成圈坐下来做别的游戏,则一共有多少种参加方式?

变式练习 9 如果 10 人分成 3 人,3 人,4 人这三组并围成圈来做游戏,那么又有多少种不同的游戏位置坐法?

变式练习 10 3 个女生和 5 个男生围成一圈.

(1) 如果女生必须全排在一起,可有多少种方法?

(2) 如果女生全分开,有多少种方法?

课时作业轻松练

A. 基础题组

1. 6 名同学排成一排,其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有(　　)
   A. 720 种　　B. 360 种
   C. 240 种　　D. 120 种
2. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单,开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中,那么不同插法的种数为(　　)
   A. 42　　B. 30　　C. 20　　D. 12
3. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名志愿者都不能从事翻译工作,则选派方案共有(　　)
   A. 280 种　　B. 240 种
   C. 180 种　　D. 96 种
4. 某赛季足球比赛的计分规则:胜一场,得 3 分;平一场,得 1 分;负一场,得 0 分. 一球队打完 15 场,积 33 分,若不考虑顺序,则该队胜、负、平的情况共有(　　)
   A. 3 种　　B. 4 种　　C. 5 种　　D. 6 种
5. 在一块并排 10 垄的田地中,选择 2 垄分别种植 A,B 两种作物,每种作物种植一垄. 为有利于作物生长,要求 A,B 两种作物的间隔不小于 6 垄,则不同的选垄方法共有________种(用数值作答).

B. 提升题组

6. 若从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同的工作，则选派方案共有(　　)

A. 180 种　　B. 360 种

C. 15 种　　D. 30 种

7. 用 1,2,3,4,5 这五个数字组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有(　　)

A. 24 个　B. 30 个　C. 40 个　D. 60 个

8. 计划展出 10 幅不同的画，其中 1 幅水彩画、4 幅油画、5 幅国画，排成一行陈列，要求同一品种的画必须连在一起，并且水彩画不放在两端，那么不同的陈列方式有(　　)

A. $A_4^4A_5^5$ 种　　B. $A_3^3A_4^4A_5^5$ 种

C. $A_3^1A_4^4A_5^5$ 种　　D. $A_2^2A_4^4A_5^5$ 种

9. 把一同排 6 张座位编号为 1,2,3,4,5,6 的票全部分给 4 个人，每人至少分 1 张，至多分 2 张，且这 2 张票具有连续的编号，那么不同的分法种数是(　　)

A. 168　B. 96　C. 72　D. 144

10. 从集合 $\{1,2,3,\cdots,11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 中的 m 和 n，则能组成落在矩形区域 $B=\{(x,y)\mid |x|<11$ 且 $|y|<9\}$ 内的椭圆个数为(　　)

A. 43　B. 72　C. 86　D. 90

11. 设直线的方程是 $Ax+By=0$，从 1,2,3,4,5 这五个数中每次取两个不同的数作为 A,B 的值，则所得不同直线的条数是(　　)

A. 20　B. 19　C. 18　D. 16

12. 从5位男教师和4位女教师中选出3位教师派到 3 个班担任班主任(每班一位班主任)，要求这3位班主任中男女教师都要有，则不同的选派方案共有(　　)

A. 210 种　　B. 420 种

C. 630 种　　D. 840 种

13. 用数字 0,1,2,3,4 组成没有重复数字的比 1000 大 的奇数，共有(　　)

A. 36 个　　B. 48 个

C. 66 个　　D. 72 个

14. 现有 8 个人排成一排照相，其中甲、乙、丙三人不能相邻的排法种数为(　　)

A. $A_6^3\cdot A_5^5$

B. $A_8^8-A_6^6\cdot A_3^3$

C. $A_5^3\cdot A_3^3$

D. $A_8^8-A_6^4$

15. 从集合 $\{0,1,2,3,5,7,11\}$ 中任取 3 个元素分别作为直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的 A，B，C，所得直线经过坐标原点的有________条(结果用数值表示).

16. 有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 件不同的产品排成一排，若其中 A，B 两件产品排在一起的不同排法有 48 种，则 $n=$ ________.

17. 有 8 本不相同的书，其中数学书 3 本，外文书 2 本，其他书 3 本，若将这些书排成一列放在书架上，则数学书恰好排在一起，外文书也恰好排在一起的排法共有________种(结果用数值表示).

18. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的系数 a,b,c 是从集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中取出的三个不同的元素，且该直线的倾斜角为锐角，则这样的直线有________条.

19. 1,2,3,4,5,6,7,8 组成没有重复数字的八位数，要求 1 与2 相邻，3 与 4 相邻，5 与 6 相邻，而 7 与 8 不相邻，这样的八位数共有________个.(用数值作答)

20. 从集合 $\{O,P,Q,R,S\}$ 与 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中各任取 2 个元素排成一排(字母和数字均不能重复). 每排中字母 O,Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同排法种数是________.(用数值作答)

高考试题初体验

1. 2010 年广州亚运会，某大楼安装了 5 个彩灯，它们闪亮的顺序不固定，每个彩灯只能闪亮红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色，且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同，记这 5 个彩灯有序地各闪亮一次为一个闪烁，在每个闪烁中，每秒有且仅有一个彩灯闪亮，而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 s. 如果要实现所有不同的闪烁，那么需要的时间至少是(　　)

A. 1205 s　　B. 1200 s　　C. 1195 s　　D. 1190 s

2. 如果执行如图 1-2 所示所示的程序框图，输入正整数 n,m，满足 $n \geqslant m$，那么输出的 p 等于(　　)

A. C_n^{m-1}　　B. A_n^{m-1}　　C. C_n^m　　D. A_n^m

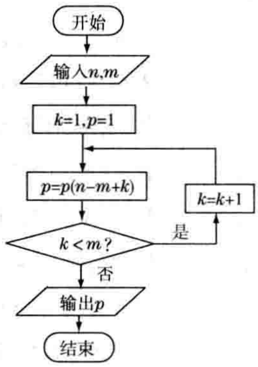


图 1-2

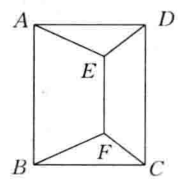


图 1-3

3. 如图1-3，用四种不同颜色给图中的 A,B,C,D,E,F 六个点涂色，要求每个点涂一种颜色，且图中每条线段的两个端点涂不同颜色，则不同的涂色方法共有(　　)

A. 288 种　　B. 264 种　　C. 240 种　　D. 168 种

我的错题本

	错题题号	做错原因	错题知识点	错题回顾记录
变式练习				
课时作业				

做错题不可怕，可怕的是一错再错！

小小错题本，帮你将错题轻松搞定！

第2讲 组　合

学习目标

1. 深刻理解组合问题的内涵和意义，会用组合模型熟练分析、解决问题；

2. 对于一些复杂的问题，会从问题本身的属性上鉴别是否有序，从而确定是组合还是排列问题.

考情分析

组合问题在高考中理科几乎必考，考题的基本风格是平实、基础，多数时候是与两个原理、排列等综合交汇而设计试题，注重考查在实际问题的分析、解决能力.

分析、解决有关组合问题，要注意两点：一是建立组合模型，重点关注的是组成“事件”结构的关键元素，而与“元素的顺序”没有关系；二是与两个原理和排列的类比与鉴别.

基础知识轻松学

一、组合的概念与模型

精讲

从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n, m, n \in \mathbf{N}^*)$ 个不同元素放在一起并成一组(没有顺序)，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个组合. 组合与排列的区别在于无序和有序，主要是看元素之间是否具有位置顺序或地位不同，或者随意改变某两个元素的位置效果是否不同了.

二、组合数公式

精讲

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}(n \geqslant m).$$

排列与组合的联系可从如下两个角度理解：一是“排列”可以看作由如下两步构成：“先从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的组合，再将这 m 个不同元素全排列”，即 $\mathrm{A}_n^m=\mathrm{C}_n^m\mathrm{A}_m^m$；二是“组合”也可这样来看：先从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素排列起来，有 A_n^m 种方法，然后对这 m 个元素“消序”(消序方法为 A_m^m 种)，故有 $\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}$.

三、组合数的性质

精讲

(1) $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$；(2) $\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^{m-1}+\mathrm{C}_n^m$.

对于这两个性质，会从组合符号(阶乘意义)和加乘原理两个角度来证明与理解，这里给出从两个原理角度的分析：

性质(1) 可从一一对应角度理解：从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素时，都剩下 $(n-m)$ 个元素，每一种取法对应着一种剩法，有多少种不同的取法就对应着多少种不同的剩法；由于从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素的取法数为 C_n^m，从 n 个不同元素中，任意取出 m 个元素后剩下 $(n-m)$ 个元素的剩法数为 C_n^{n-m}，因此 $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$.

为了简化计算，当 $m>\frac{n}{2}$ 时，通常将计算 C_n^m 化为计算 C_n^{n-m}.

性质(2) 可建立如下“取元素模型”来理解：一般地，从 $(n+1)$ 个不同元素 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 中任取 m 个元素的组合，可以分为两类：第一类取出的 m 个元素中不含某个元素 a_1 的组合，只需在除去元素 a_1 的其余 n 个元素中任取 m 个，有 C_n^m 种；第二类取出的 m 个元素中含某个元素 a_1 的组合，只需在除去元素 a_1 的其余 n 个元素中任取 $(m-1)$ 个后，再取出元素 a_1，有 C_n^{m-1} 种. 根据分类加法计数原理，得 $\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$.