

智文天
ZHIWEN TIAN

GAODENGSHUXUE
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版 (上下册合订本)

滕兴虎 毛磊 刘希强 编著
李静 寇冰煜 张燕

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS



GAODENGSHUXUE

COLLEGE SCIENCE SERIES / ADVANCED MATHEMATICS

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版 (上、下册) 配套

编 者 李 俊 王 明 王 明 王 明
主 审 徐树培 徐 勇 徐 勇

重点难点精解
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
历年竞赛题选
历年考研真题
历年竞赛题选



清华大学出版社
TSINGHUA UNIVERSITY PRESS

智文
ZHUWEN

GAODENGSHUXUE
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版 (上下册合订本)

滕兴虎 毛磊 刘希强 编著
李静 寇冰煜 张燕



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与习题精解:高教社同济七版/滕兴虎等编著. —南京:东南大学出版社, 2015. 3

ISBN 978-7-5641-5508-7

I. ①高… II. ①滕… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 029849 号

高等数学全程学习指导与习题精解(同济七版)

主 编	滕兴虎 毛 磊 刘希强 李 静 寇冰焯 张 燕	责任编辑	戴季东
电 话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李 香		

出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社 址	南京市四牌楼 2 号	邮 编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网 址	http://www.seupress.com	电子邮件	press@seupress.com

经 销	全国各地新华书店	印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	880mm×1230mm 1/32	印 张	22.25 字 数 910 千
版 次	2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷		
书 号	ISBN 978-7-5641-5508-7		
定 价	32.00 元		

* 未经本社授权, 本书内文字不得以任何方式转载、演绎, 违者必究。

* 东大版图书若有印装质量问题, 请直接与读者服务部联系, 电话: 025-83791830。

前 言

《高等数学》是数学学科中一门重要基础课,也是各专业研究生入学考试必考科目。《高等数学》中的概念复杂多样,从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分,形成了一个无比精密的庞大系统。这个系统不仅内容丰富,更重要的是结构严密、无懈可击。上海同济大学应用数学系主编的《〈高等数学〉第七版》以体系完整、层次清晰、深入浅出的特点成为众多高校高等数学课程的首选教材。为了帮助广大同学扎实地掌握高等数学的精髓和解题技巧,提高解答各种题型的能力,我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几部分组成:

1. 基本要求、重点与难点:列出相应各章的基本要求、重点、难点内容,以帮助读者总体把握本章内容。
2. 主要概念与公式:列出各章的基本概念、定理与公式,突出必须掌握和理解的核心内容。
3. 重点、难点解答:列出了每一章的生点、难点内容,并对重点、难点内容给出了详细的归纳与解答,以帮助广大同学对相应内容理解更加透彻。
4. 典型例题分析:精选历年各院校研究生入学考试试题中具有代表性的试题进行了详细的解答,以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法,达到举一反三、触类旁通的效果。
5. 课后习题全解:对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答,以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解。
6. 考研真题精解:精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广、题型多、解题技巧性强,可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路,更好地掌握《高等数学》的基本内容和解题方法。

7. 同步测试题:根据《高等数学》课程考试和考研内容,在每一章设计了一套同步测试题,目的是给广大同学提供练习机会,帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力,同时检验自己对高等数学知识的掌握程度,找出差距,以便更好地学好高等数学。

本辅导教材由解放军理工大学滕兴虎、毛磊、刘希强、李静、寇冰煜、张燕、陈桂东、王岩青、毛自森、裴玉、吴欧、张纯以及胡俊、卢月、刘娟等编写,全书由滕兴虎、毛磊统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社刘坚博士和戴季东老师的大力支持和热情帮助,在此表示感谢。由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大同行和读者批评指正。

编者

目 录

第一章 函数与极限

基本要求、重点与难点	1
主要概念与公式	2
重、难点解答	13
典型例题分析	20
课后习题全解	24
考研真题精解	48
同步测试题	56
同步测试题参考答案	57

第二章 导数与微分

基本要求、重点与难点	60
主要概念与公式	60
重、难点解答	64
典型例题分析	68
课后习题全解	71
考研真题精解	92
同步测试题	96
同步测试题参考答案	98

第三章 微分中值定理与导数的应用

基本要求、重点与难点	101
主要概念与公式	101
重、难点解答	106
典型例题分析	109
课后习题全解	115

考研真题精解	152
同步测试题	159
同步测试题参考答案	161

第四章 不定积分

基本要求、重点与难点	164
主要概念与公式	164
重、难点解答	167
典型例题分析	179
课后习题全解	184
考研真题精解	219
同步测试题	221
同步测试题参考答案	223

第五章 定积分

基本要求、重点与难点	227
主要概念与公式	227
重、难点解答	231
典型例题分析	241
课后习题全解	245
考研真题精解	273
同步测试题	287
同步测试题参考答案	289

第六章 定积分的应用

基本要求、重点与难点	293
主要概念与公式	293
重、难点解答	296
典型例题分析	298
课后习题全解	299
考研真题精解	316
同步测试题	319

同步测试题参考答案	320
第七章 微分方程	
基本要求、重点与难点	323
主要概念与公式	323
重、难点解答	328
典型例题分析	331
课后习题全解	334
考研真题精解	383
同步测试题	395
同步测试题参考答案	397
第八章 向量代数与空间解析几何	
基本要求、重点与难点	400
主要概念与公式	400
重、难点解答	405
典型例题分析	408
课后习题全解	411
考研真题精解	428
同步测试题	429
同步测试题参考答案	430
第九章 多元函数微分法及其应用	
基本要求、重点与难点	433
主要概念与公式	433
重、难点解答	439
典型例题分析	451
课后习题全解	456
考研真题精解	487
同步测试题	499
同步测试题参考答案	500

第十章 重积分

基本要求、重点与难点	503
主要概念与公式	503
重、难点解答	509
典型例题分析	518
课后习题全解	524
考研真题精解	556
同步测试题	564
同步测试题参考答案	566

第十一章 曲线积分与曲面积分

基本要求、重点与难点	568
主要概念与公式	568
重、难点解答	575
典型例题分析	590
课后习题全解	595
考研真题精解	626
同步测试题	635
同步测试题参考答案	636

第十二章 无穷级数

基本要求、重点与难点	639
主要概念与公式	639
重、难点解答	647
典型例题分析	650
课后习题全解	656
考研真题精解	692
同步测试题	700
同步测试题参考答案	702

第一章 函数与极限

基本要求、重点与难点

基本要求:

- (1) 理解函数及其定义域、值域、图形等概念,掌握函数的表示法,了解函数的有界性、单调性和奇偶性;
- (2) 理解复合函数、反函数和分段函数的概念;
- (3) 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念,掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念;
- (4) 会建立简单应用问题中的函数关系式;
- (5) 了解数列与函数极限的概念和性质,理解左、右极限的概念及极限存在与左、右极限之间的关系;
- (6) 了解无穷小的概念和性质,了解无穷大与无穷小之间的关系,掌握无穷小阶的比较方法;
- (7) 了解函数连续(在一点 x_0 处连续以及连续函数)的概念,理解左、右连续的概念以及函数连续与左、右连续之间的关系,掌握讨论分段函数连续性的方法;
- (8) 了解函数间断的概念,掌握函数间断点的分类,会判断函数的间断点;
- (9) 理解闭区间上连续函数的性质,会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题;
- (10) 熟练掌握极限的四则运算法则和两个重要极限,掌握极限的两个存在准则,能熟练运用极限的四则运算、两个重要极限、极限的存在准则以及无穷小的性质、等价无穷小代换、函数的连续性等方法求极限.

重点:

- (1) 复合函数的定义域;
- (2) 函数的基本性质;
- (3) 求函数的复合及反函数;
- (4) 建立简单应用问题的函数关系式;
- (5) 求极限;
- (6) 讨论函数的连续性;
- (7) 间断点的分类;
- (8) 闭区间上连续函数的性质.

难点:

- (1) 抽象函数的表达式;
- (2) 分段函数的复合及反函数的求法;
- (3) 极限的概念;

- (4) 求极限的各种方法的应用;
 (5) 闭区间上连续函数性质的应用.

主要概念与公式

特殊数集

名称	表示
自然数集	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$
整数集	$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$
有理数集	$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}$
正实数集	$\mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\}$
去零实数集	$\mathbf{R}^* = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$
复数集	$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$

集合运算公式

运算	公式
并集	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
交集	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
差集	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
余集	$A^c = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$
直积	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

区间与邻域

名称	表示
开区间	$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
闭区间	$[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$
左开右闭区间	$(a, b] = \{a < x \leq b\}$
点 a 的 δ 邻域	$\cup(a, \delta) = \{x \mid x - a < \delta\} = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$
点 a 的去心邻域	$\overset{\circ}{\cup}(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\} = \{x \mid (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\}$
点 a 的左 δ 邻域	$\overset{\circ}{\cup}_-(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a\}$
点 a 的右 δ 邻域	$\overset{\circ}{\cup}_+(a, \delta) = \{x \mid a < x < a + \delta\}$

映射及相关定义

名称	定义
映射	给定两个非空集合,如果存在一个法则 T ,使得任意 $x \in X$,按法则 T 使存在唯一的元素 y 与之对应,则称 T 为从 X 到 Y 的一个映射,记作 $T: X \rightarrow Y$. 其中 x 称为原像, y 为像,集合 X 称映射 T 的定义域, X 的所有元素的像的集合称映射 T 的值域
满射	若 $T(X) = Y$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射
单射	若任意 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$,则称 T 为从 X 到 Y 的单射
双射	若 T 是从 X 到 Y 的满射且又是单射,则称 T 为双射
复合映射	若映射 $T_1: X \rightarrow Y_1, T_2: Y_2 \rightarrow Z$,且 $T_1(x) \subset Y_2$,则 $T_2 \circ T_1: X \rightarrow Z, (T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$,称为由 T_1, T_2 构成的复合映射

函数及相关定义

名称	定义
函数	设数集 $D \in \mathbf{R}$,则 D 到 \mathbf{R} 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,记为 $y = f(x), x \in D$. x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, $\{f(x) x \in D\}$ 称为值域
函数的图形	点集 $\{(x, y) y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形
反函数	若函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 为单射,则称其逆函数 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ 为 f 的反函数, f^{-1} 的对应法则由 f 来决定,即若 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应的,则 x 也是 y 的函数,记作 $x = f^{-1}(y)$,称为 $y = f(x)$ 的反函数,习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此反函数也记作 $y = f^{-1}(x)$
复合函数	若函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域上可确定一个函数 $y = f(g(x))$,称其为 g 与 f 的复合函数,记作 $y = f(g(x))$ 或 $y = f \circ g$
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并可由一个式子表示的函数

函数的几种特性

性质	定义
奇偶性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,任意 $x, -x \in D$,有 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$),则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇)函数
单调性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $x_1, x_2 \in D$,由 $x_1 < x_2$ 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的
周期性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若存在一个与 x 无关的正数 T ,使任 $x \in D$,均有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小正周期,简称周期
有界性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若存在 $M > 0$,使任意 $x \in D$,有 $ f(x) \leq M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界
无界性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $M > 0$,均存在 $x_0 \in D$,使 $ f(x_0) \geq M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界

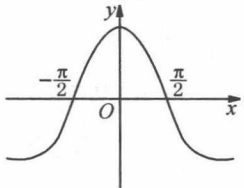
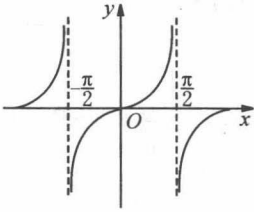
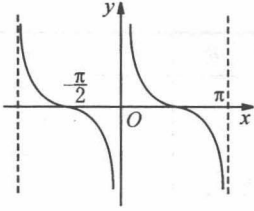
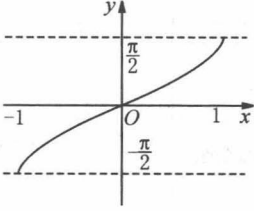
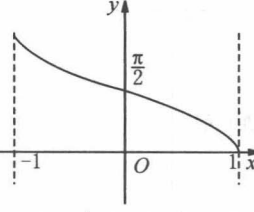
函数的运算

运 算	定 义
和	$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$
差	$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$
积	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$
商	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \text{ 且 } g(x) \neq 0$

基本初等函数

名 称	定义域及性质	图例
幂函数	$y = x^n$ $n > 0$ 时, 函数 x^n 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增 $n < 0$ 时, 函数 x^n 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减 $y = x^n$ 与 $y = x^{\frac{1}{n}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $a > 1$ 时, 函数 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格递增 $0 < a < 1$ 时, 函数 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格递减	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数	
三角函数	正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$	

(续表)

名称	定义域及性质	
三角函数	余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$	
	正切函数 $y = \tan x,$ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$	
	余切函数 $y = \cot x,$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z})$	
反三角函数	! 反正弦函数 $y = \arcsin x,$ $(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y = \arccos x,$ $(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$	

(续表)

名称	定义域及性质	
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x$, $(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

双曲函数

名称	定义	图形
双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 奇函数	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 偶函数	
双曲正切	$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ 奇函数	

(续表)

名称	定义	图形
双曲余切	$y = \operatorname{cth}x = \frac{1}{\operatorname{th}x} = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ 奇函数	
反双曲正弦	$y = \operatorname{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	图略
反双曲余弦	$y = \operatorname{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	
反双曲正切	$y = \operatorname{arth}x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	

数列极限的定义

分类		定义
数列极限	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (有限)	$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } x_n - a < \epsilon$
	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$	$\forall M > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } x_n > M$

数列收敛的性质

唯一性	若 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限必唯一
有界性	若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界(反之不真)
保号性	若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 其中 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时恒有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)
保序性	若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 且当 n 充分大时有 $x_n \leq y_n$ ($x_n < y_n$), 则 $A \leq B$
	注: 反之, 若 $A \leq B$, 未必有 $x_n \leq y_n$ 成立
子数列收敛定理	数列 $\{x_n\}$ 收敛到 A 的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子数列也收敛且收敛到 A