纺织数学

第三册

国营上海第十七棉紡織厂
紅专大学数学教研組编

上海教育出版社

目　录

第十一章　角与平行綫……………………………………… 1

1.角的概念(1)　2.角的量法(2)　3.角的名称(7)　4.两个角的关系(11)　5.对頂角和它的性質(13)　6.平行綫的概念(14)　7.介紹一些与平行綫有关系的角(15)　8.确定平行綫的方法(16)　9.两个角中边的相互关系(18)

第十二章　三角形……………………………………………23

1.引言(23)　2.三角形(24)　3.相似三角形(29)　4.平行綫段定理(30)　5.直角三角形比例綫段定理(31)　6.銳角三角函数(34)　7.三角形全等(45)　8.三角形的一些其他性質(59)　9.綜合性例題(63)

第十三章　四边形与任意角的三角函数……………………68

1.有关四边形的边与角的名詞(68)　2.四边形的分类(68)　3.平行四边形的性質和判別方法(69)　4.梯形(73)　5.四边形的作图題(74)　6.任意角的三角函数(75)　7.三角函数間的基本关系公式(79)　8.三角函数关系公式的应用(80)　9.任意象限角的函数化为銳角函数法(82)　10.任意三角形的解法(90)　11.三角函数对数表(99)

第十四章　圓…………………………………………………104

1.圓的一般性質(104)　2.直綫和圓的相互位置(106)　3.两个圓的相互位置(113)　4.和圓有关的角(123)

第十一章　角与平行綫

一　角

1. 角的概念　角是什么？固定一条綫段的一个端点，使这綫段环繞这点旋轉一定距离后所組成的图形叫做**角**。图1中綫段OA，繞着定点O旋轉到OB，这样，OA与OB就組成一个角。O点叫做角的頂点，OA与OB叫做角的边，在OA与OB中間的阴影部分叫做角的內部。

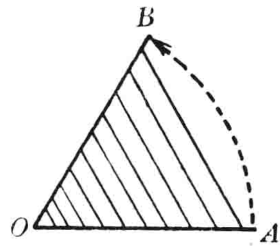


图 1

角用符号"∠"来表示。通常用三个大写字母表示角，如图1的角写成$\angle AOB$或$\angle BOA$。中間一个字母表示角的頂点，两旁的字母分别表示两条边上的任意一点。如果在角頂上只有一个角，可以用角頂的那个大写字母来表示。图1中的角也可以写作"$\angle O$"。

有时角还可以用写在角內部靠近頂点的一个字母或者一个数字来表示，例如图2中的$\angle a$、$\angle 1$、$\angle 2$等。

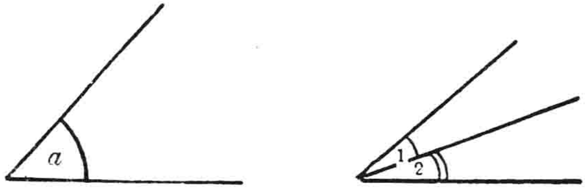


图 2

2. 角的量法

(1) 圓心角　在一个用 O 做圓心的圓中，两条半徑 OA 与 OB 就組成一个 $\angle O$（图 3），这个角的頂点 O 就是圓心，就叫做圓心角.

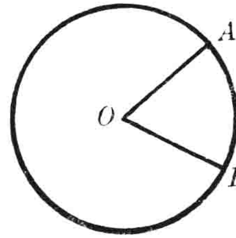


图 3

圓上 AB 的一段叫做弧，弧用符号"$\frown$"表示，在图 3 中，圓心角 AOB 对 $\overset{\frown}{AB}$，反过来，$\overset{\frown}{AB}$ 对圓心角 AOB. 因此，在圓心角与它所对的弧中，有下面的性質：

在同一个圓中，或者在几个半徑相等的圓中：

(i) 如果圓心角相等，那末它們所对的弧也相等；

(ii) 如果弧相等，那末它們所对的圓心角也相等.

根据上面的性質，我們可以画一个角使它与另一个角一样大小. 例如，已經有一个角 AOB（图 4 左），我們可以另外画一条綫段 $O'A'$（图 4 右），在已知角上，用 O 当作圓心，任意一个长度当半徑画一条弧，使这条弧与角边 OA 相交于 C，与 OB 相交于 D. 再用同样的长度当半徑，用 O' 作圓心再作一段弧 $C'E$. 这段弧与 $A'O'$ 相交于 C'，再用圓規量 C 点与 D 点間的距离，然

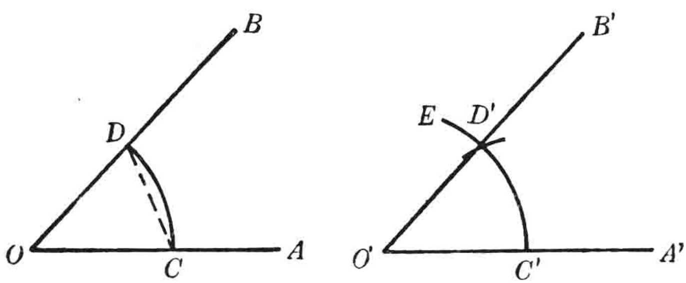


图 4

后以 C' 当圆心，CD 的长当半徑作弧交 $\overset{\frown}{C'E}$ 于 D'. 最后連結 $O'D'$，延长 $O'D'$ 到 B'. 这样 $\angle A'O'B'$ 就等于 $\angle AOB$.

(2) 角的度量　我們要度量綫段，可以用呎、吋、公尺、公分等表示綫段的长度。現在，要度量角的大小，用什么单位呢？我們可以用"度"、"分"、"秒"来表示. 什么叫做度？就是将一个圓分成 360 个等分，在每一个等分上的一段弧就叫做"一度弧". 这时，把每一个分点和圓心連結起来，那末环繞圓心就有 360 个同样大小的圓心角. 每个这样的圓心角就叫做"1 度"的角. 所以，我們說"一度弧对一度角"；反轉来，"一度角对一度弧".

度还不是角的最小的度量单位. 把一度分成 60 等分，每一个等分就叫做"分"，把每一"分"再分成 60 等分，每一等分就叫做"秒". 这里必須注意度、分、秒不是十进位的，它和时間单位一样，是六十进位的，就是，一度等于六十分，一分等于六十秒.

度、分、秒分别用符号"°"、"′"、"″"来表示，例如，图 5 的角含有 49 度 0 分 7 秒，可以写成 $\angle AOB=49°7''$.

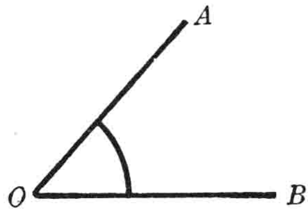


图 5

(3) 量角器　在实际测量一个角的时候，是不是再要把这个角当作圓心角，再作一个圓，然后把这个圓分成 360 个等分呢？这样做不仅很麻煩，而且事实上也不大可能，实际测量角的大小，往往用量角器.

量角器是一个半圓形的仪器，根据将一个圓分成 360 等分的道理，将半圓分成 180 个等分，每一个等分就是一度弧，对一度的圓心角. 例如，我們要量图 6 中 $\angle DCE$ 的大小，可以将量

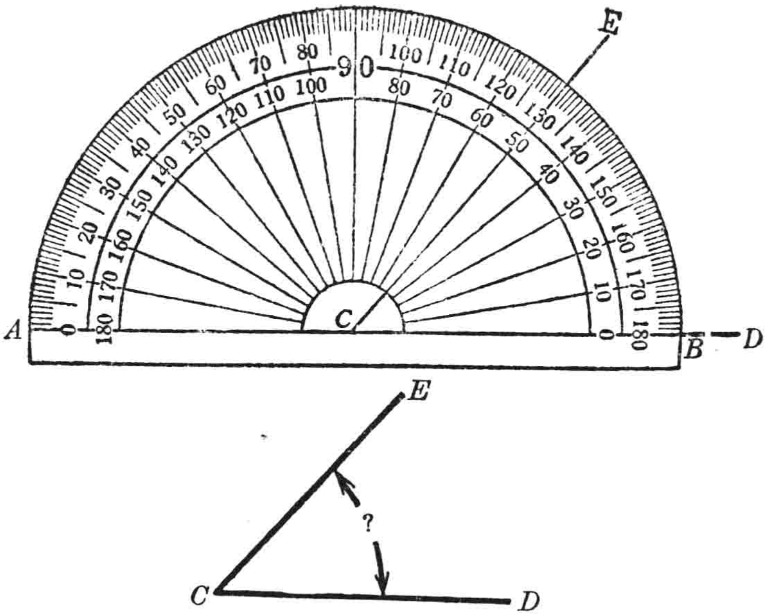


图 6

角器放到这个角上，使这个半圆的圆心放在角的顶点 C 上，一条半徑放在 $\angle DCE$ 的一条边 CD 上，这时，另一条角边 CE 在量角器上指出一个刻度，我們就很容易讀出这个角的近似度数．同样，我們利用量角器也很容易画出一个規定度数的角来．

（4）弧度制和度与弧度的換算　表示角的大小除了用度、分、秒以外，还可以用另外一种"弧度制"来表示．什么是弧度制呢？在一个圓上量一段弧，使这段弧的長度与圓的半徑相等，这时，这段等于半徑長度的弧叫做"一弧度的弧"，这段弧所对的角就叫做"一弧度的角"．图 7 中，假使 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度等于圓的半徑 R，那末 $\overset{\frown}{AB}$ 就含有一个弧度，$\angle AOB$ 就是一弧度的角．

很明显，在任何角中，如果我們将角的頂点当作圓心画一个

圓，那末这个角的弧度数就是弧长除以半徑的商.

图 7 中，$\widehat{ABC}$ 的长等于 $2R$，所以，$\angle AOC=\dfrac{2R}{R}=2$ 弧度.

在表示弧度时，通常将弧度两字省去不写，例如 $\angle AOC=2$ 弧度可以写做 $\angle AOC=2$.

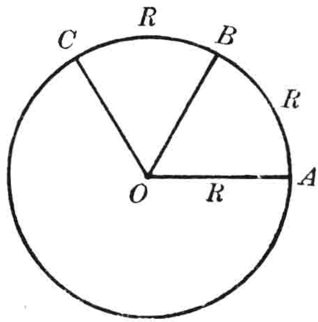


图 7

度和弧度的相互換算，我們可以用圓周的长度等于半徑的 2π 倍来求. 我們知道一个圓的圓心角等于 $360°$，用弧度制表示时，一个圓的圓心角等于 $\dfrac{2\pi R}{R}=2\pi$ 弧度. 根据 $360°=2\pi$ 这个关系，我們就可以列出下表：

度	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
弧　度	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

上表中所列出的六种角都是一些比較特殊的角，在生产中应用較多，象我們用的一付三角尺，一个三角尺的三个角是 $90°$、$60°$ 和 $30°$；另外的一个三角尺中，它的三个角是 $90°$、$45°$ 和 $45°$. 所以应該熟悉和記住上表中六种特别角.

至于度与弧度的互化，只要記住 $180°=\pi$，就能够化出

$$1°=\frac{\pi}{180°}\approx 0.017453 \text{ 弧度；}$$

$$1 \text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44.8''.$$

因为"π"本身就是一个近似的数值，所以 $\dfrac{\pi}{180}$ 或 $\dfrac{180}{\pi}$ 都不可能是

完全正确的数值．下面举一些互化的例子．

例 1 把 $67°30'$ 化成弧度．

解 $\because \quad 67°30'=67\frac{1}{2}°$，

$$\therefore \quad 67\frac{1}{2}°\times\frac{\pi}{180}=\frac{135\pi}{2\times180}=\frac{3\pi}{8}\text{弧度}.$$

如果我們需要进一步算出弧度的近似值时，就可以用另一个办法来算，即

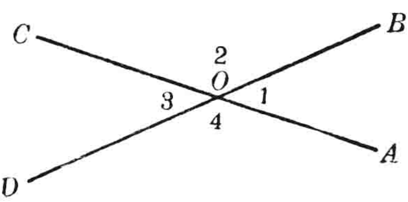
$$67\frac{1}{2}°\times0.017453=1.178\text{ 弧度}.$$

例 2 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度．

解 $$\frac{3\pi}{5}\times\frac{180}{\pi}=\frac{540}{5}=108°.$$

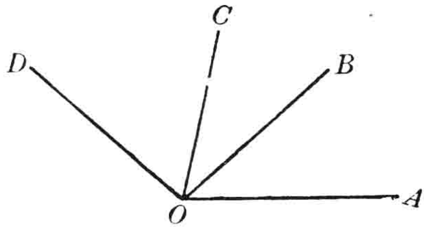
习　题　一

1. 把图中用数字表示的角，各用三个大写字母表示．



（第 1 题）

2. 在图中，哪两个角的和等于 $\angle AOC$？哪两个角的和等于 $\angle BOD$？哪三个角的和等于 $\angle AOD$？



（第2题）

3. 先自己画一个角，再用量角器测量出这个角的近似度数。

4. 用量角器画一个 75° 的角.

5. 有两个任意大小的角，請你用圓心角的道理把这两个角加起来，成为一个角.

6. 有两个角，一个大一个小，請你用圓心角的道理，画出大角减小角后的相差。

7. 将下面六个用度数表示的角写成用弧度表示（就是写成多少 π 的形式）：

(1) $18°$； (2) $75°$； (3) $120°$；

(4) $300°$； (5) $22°30'$； (6) $n°$.

8. 将下面用弧度表示的六个角写成用角度表示：

(1) $\frac{\pi}{12}$； (2) $\frac{3\pi}{4}$； (3) $\frac{5\pi}{6}$；

(4) $\frac{4\pi}{3}$； (5) $\frac{7\pi}{10}$； (6) 3.

3. 角的名称

(1) 平角、周角和直角

① 平角 如果一条綫段环繞一个固定点旋轉，轉到两条边成为一条直綫时（图 8），这时就成为一个角，这个角叫做**平角**. 很明显，平角就是 180° 的角.

② 周角 如果一条綫段在旋轉一周后重叠到原处，就成为

一个 360° 的角(图 9)，这个角叫做**周角**.

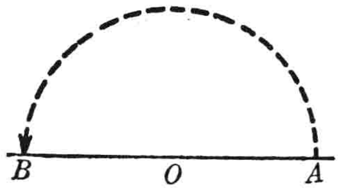


图 8

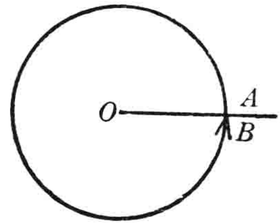


图 9

③ 直角和垂綫 平角的一半叫做直角，所以直角就是 90° 的角. 直角通常用“d”来表示. 在图 10 中，OA 与 OB 两条角边相交成 90°，那末 $\angle O$ 就是直角，而 OA 与 OB 就叫做是互相**垂直**的. 垂直用符号“⊥”表示. 在图 10 中，可以說 $OA \perp OB$，或者 $OB \perp OA$，O 点就叫做**垂綫足**.

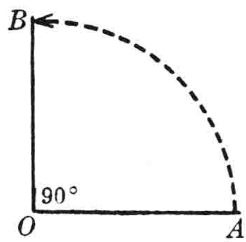


图 10

不仅象图 10 中，OA 与 OB 的情形可以叫做垂直，只要两条

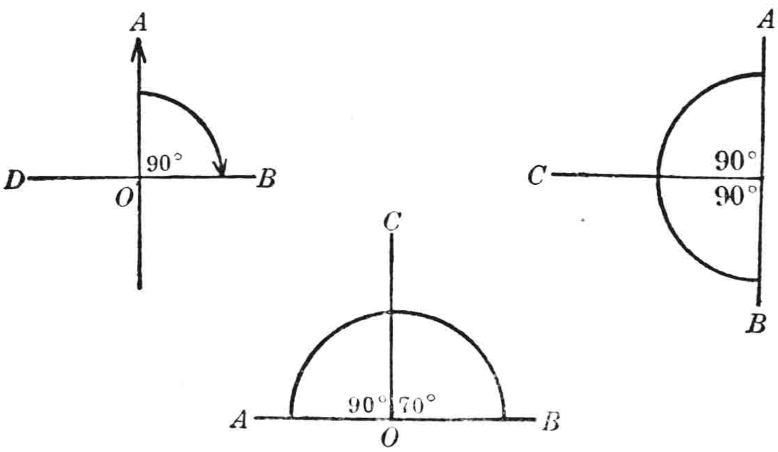


图 11

綫段相交成 90° 时，这两条綫段就叫做垂直．图 11 中的几种图形都是垂直的例子．

直角在很多地方都可以看到和用到，象我們一般所用的三角尺中，就有一个角是直角(图 12)．所以在直綫上画垂綫，就

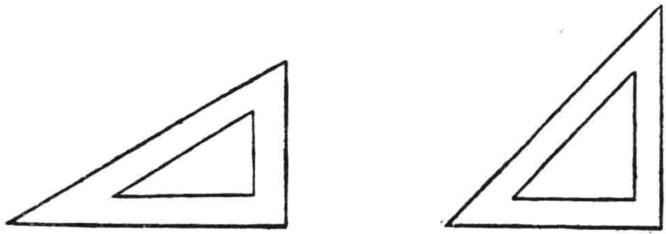


图 12

可以利用三角尺．例如，在一条直綫 AB 上有一点 C，要从 C 点画一条綫垂直 AB，那末只要用两个三角尺照图 13 的方法，就能很容易画出 $CD\perp AB$．

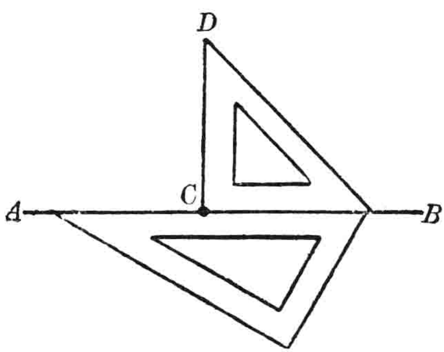


图 13

根据同样的道理，当然可以在直綫外面一点画一条綫垂直于这条直綫了(图 14)．

如果不用直角三角尺，我們也可以用另外的方法画垂直綫．

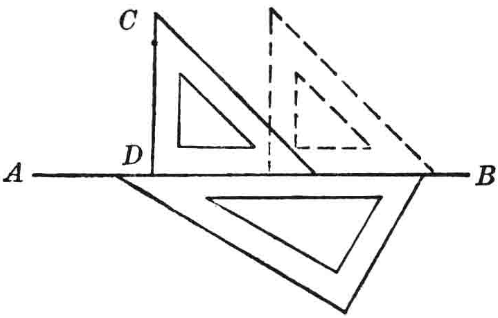


图 14

例 1 在一条綫段 AB 上有一点 C，要在 C 点画一条綫段垂直 AB。

只要将 C 点当作圆心，画一个半圆形，使它与 AC 相交于 E，与 BC 相交于 F，再用 E、F 两点当作圆心，另一个較大的半徑画两段弧，这两段弧相交于 D。最后連結 CD，那末 $CD \perp AB$（图 15）。

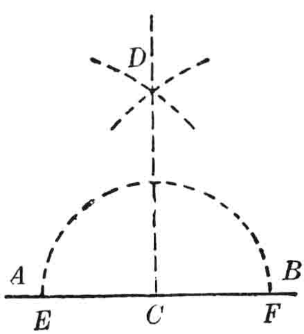


图 15

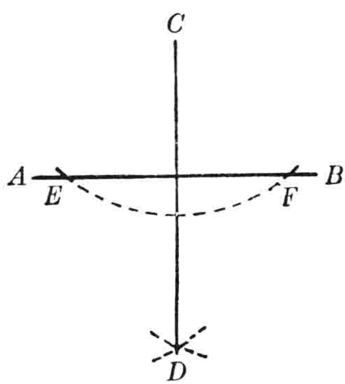


图 16

例 2 在一条綫段 AB 的外面有一点 C，要从 C 点画一条綫段垂直 AB。

将 C 点作圆心，比 C 点到 AB 的距离稍大的长度作半徑画

一段弧，使它与 AB 相交于 E、F 两点，再用 E、F 两点当作圆心，用任一个半徑画两段弧，使它們在 D 点相交，那末，連結 CD 两点的綫段就垂直于 AB(图 16)。

(2) 銳角、鈍角　在日常生活中，我們要区别銳和鈍是很容易的。譬如图 17 的两把斧，我們很容易看出右面的斧比左面的

图 17

鈍些。为什么呢？这是因为斧口的角度数大的关系。可見角度数大小是銳与鈍的关鍵。

在数学上区别銳角与鈍角是用什么做标准的呢？就是用直角作为界綫，比 $90°$ 小的就是銳角，比 $90°$ 大的就是鈍角。因此，即使比 $90°$ 小 $1''$ 的也算銳角，比 $90°$ 大 $1''$ 的也是鈍角。

归納起来：

銳角 $<90°$；

鈍角 $>90°$；

直角 $=90°$。

4. 两个角的关系

(1) 余角　如果有两个角，它們相加以后正好是 $90°$，那末，这两个角就叫做互为**余角**。

象图 18 中是一个三角尺，这个尺的三个角中除了一个角是直角外，其他两个角一个是 $30°$，另一个是 $60°$，这两个角加起来

正好是 90°. 所以这两个角是互为余角. 就是説, 30° 是 60° 的余角; 或者説, 60° 是 30° 的余角.

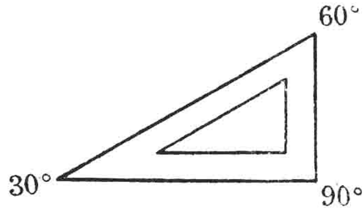


图 18

(2) 补角 假使两个角加起来等于 180°, 这两个角就叫做互为**补角**. 象 75° 的补角是 105°, 60° 的补角是 120°.

(3) **邻角** 如果两个角同时符合下面的三个条件时, 这两个角就是互为邻角.

① 两个角有一个公共的顶点;

② 两个角有一条合用的公共边;

③ 两个角的不是公共的边在公共边的相反方向.

在图 19 的图形中, $\angle BOA$ 与 $\angle AOC$ 是完全符合上面的三

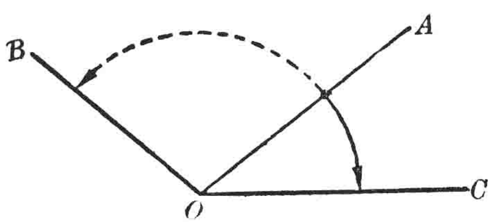


图 19

个条件的, 因为它們有公共顶点 O, 公共边 OA, 不是公共边 OB 与 OC 在 OA 的两旁(箭头所指的方向), 所以它們是互为邻角. 可見图 20 里的两个角就不是互为邻角了.

(4) 邻补角 当两个角不仅是互为邻角, 而且加起来等于 180°, 就是又是互为补角, 这两个角就叫做**邻补角**. 图 21 里的

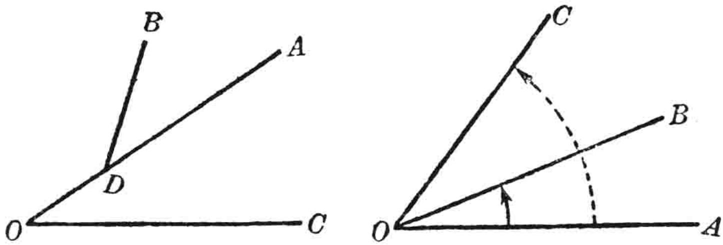


图 20

两个角就是邻补角. 这时 OB 与 OC 在一条直綫上($\angle BOC$ 也是一个平角).

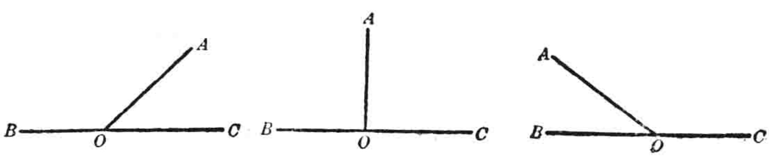


图 21

两个角相加的和等于 90°,这两个角叫做互为余角;如果等于 180°,这两个角叫做互为补角,因此可以得到下面的两个結論.

① 同角或等角的余角相等;

② 同角或等角的补角相等.

5. 对頂角和它的性質 如果有两个角它們的角頂相对,角的边成为两条相交的直綫,这两个角就叫做**对頂角.**

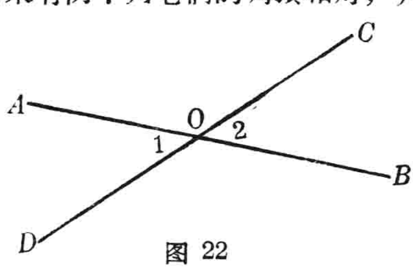


图 22

如图 22 中,$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的角頂相对,角边 AO 与 BO 在一条直綫上,CO 与 DO 也

在一条直綫上，这时，AO 与 BO 成为两条在 O 点相交的直綫，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 也变成对頂角了．同样的，$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 也成为对頂角．

两个角成为对頂角，它們一定相等．因为 $\angle 1$ 的补角是 $\angle AOC$，$\angle 2$ 的补角也是 $\angle AOC$，根据同角或等角的补角相等，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 当然相等．同样的，$\angle AOC=\angle BOD$．

习 題 二

1．直角的两条角边有什么关系？如何画一个直角？

2．銳角和鈍角的区别在什么地方？

3．求下面各个角的余角：

(1) $70°$；(2) $40°$；(3) $34°18'$；(4) $27°29'59''$；

(5) $1°19'40''$；(6) $a°$；(7) $90°-b$．

4．求下面各个角的补角：

(1) $70°$；(2) $107°$；(3) $32°7'19''$；(4) $x°$；

(5) $a°-b°$；(6) $c°-d°$．

5．用度数来說明对頂角相等．

二 平行綫

6．平行綫的概念 在同一个平面内有两条直綫，这两条直綫不仅現在不相交，就是把这两条直綫无限制地延长，仍旧不相交的，这两条綫就叫做**平行綫**．

在日常生活和生产劳动中很容易看到平行綫的大概形象．如横格練习簿上的横綫，火車或者有軌电車在直行时的一段鋼軌也可当作平行綫．其他象井条、粗紗、細紗的几根罗拉都是平行綫的大概形象．

当两条直綫平行时，我們就用符号“//”表示．象图23里的 AB 平行 CD，就写成 $AB /\!/ CD$，或者 $CD /\!/ AB$．

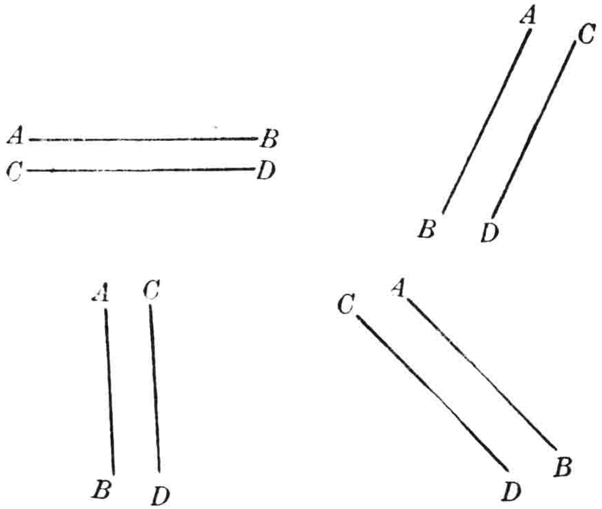


图 23

7. 介紹一些与平行綫有关系的角 有 AB 和 CD 两条直綫，它們同时和 MN 相交，这就构成八个角，这八个角根据它們与三条綫段的相互位置关系，可以分成上、下、左、右、内、外(图24)．在 AB 与 CD 之間的 $\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$ 是内角；不在 AB 与 CD 之間的 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 7$、$\angle 8$ 是外角．在 MN 左面同旁有 $\angle 1$、$\angle 3$、$\angle 5$、$\angle 7$；在 MN 右面同旁有 $\angle 2$、$\angle 4$、$\angle 6$、$\angle 8$． $\angle 1$、$\angle 2$ 在 AB 上部；

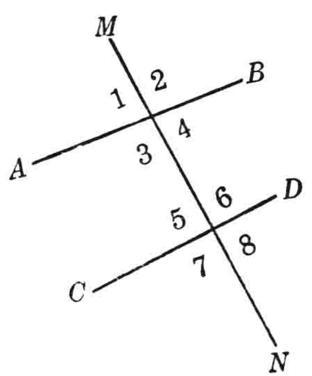


图 24

$\angle 5$、$\angle 6$ 在 CD 上部；$\angle 3$、$\angle 4$ 与 $\angle 7$、$\angle 8$ 分別在 AB 和 CD 的