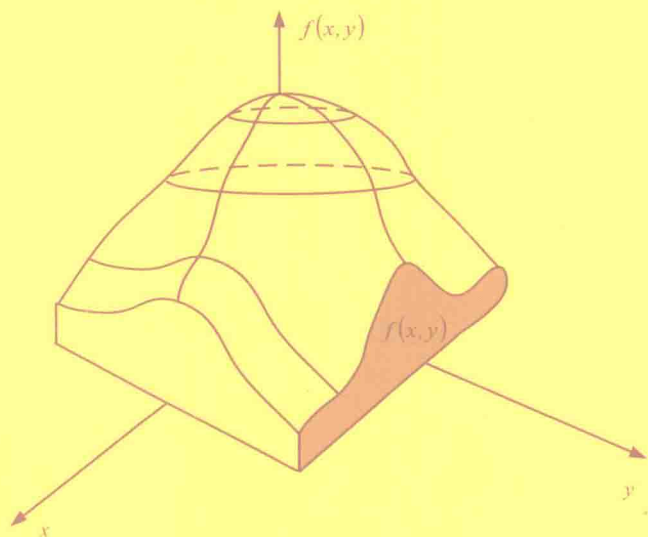
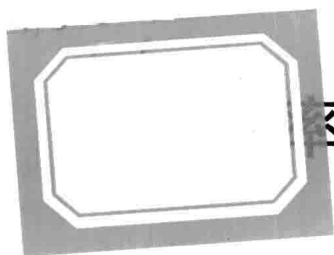


概率论札记

梁昌洪 著



科学出版社



论札记

梁昌洪 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是作者的“工程数学系列札记”的第四本。前三本分别是《矢量场论札记》(2007)、《复变函数札记》(2011)、《矩阵论札记》(2014)。尽管四本书所涉及领域完全不同,但却有着完全一致的目标,即想建立某种工程数学类型,使读者能自如跨越数学与工程之间的桥梁。

本书的核心主题是概率,研究的目标是随机事件的统计规律。用一句话概括,即随机事件反映单体的不可预测性,而统计规律反映群体的频率稳定性。本书包括概率论基础、随机量分布和数字特征、大数定律、抽样分布到统计回归等。书中讨论了概率论的应用实例,丰富的附录可以给广大工程技术人员带来很大的方便。

本书适合广大理工科本科生、硕士和博士研究生学习使用,还可以作为相关专业科技与工程技术人员入门读物和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论札记/梁昌洪著. —北京:科学出版社,2014

ISBN 978-7-03-041632-2

I. ①概… II. ①梁… III. ①概率论-研究 IV. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 185689 号

责任编辑:余 丁 / 责任校对:邹慧卿

责任印制:肖 兴 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张:23

字数:446 000

定价:60.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



前 言

自 2007 年出版第一本《矢算场论札记》，2011 年出版第二本《复变函数札记》和 2014 年出版《矩阵论札记》之后，这本《概率论札记》是“工程数学系列札记”的第四本。我们希望推出一套把数学和应用紧密结合的工程数学书籍，以促使读者能在数学和工程之间自如跨越且得心应手。

本书的核心主题是概率，研究的目标是随机事件的统计规律。用一句话概括，即随机事件的单体不可预测性，而统计规律则反映群体的频率稳定性。

概率论所面对的对象是事件，在古典概率模型中，我们对事件的逻辑关系采用集合论方法，而对事件的数量关系则采用排列组合方法。另一方面，在现代概率模型中，引入实际的统计样本方法，使这门学科在思想上不断前进。

本书包括概率论基础、随机量分布，其中正态分布是最重要的分布，数学期望 μ 和方差 σ^2 是其最重要的数字特征，本书将有相当深入的讨论。

本书还涉及大数定律、抽样分布与统计回归。书中深入讨论了概率论的应用实例，丰富的附录将给广大科学工作者和工程技术人员提供很大的方便。

众所周知，当前不论是数学还是工程数学的书籍汗牛充栋。为了使“工程数学系列札记”在其间有一席之地，必须突出自身的特色和聚集更大的读者群。为此，“工程数学系列札记”的写作思想非常明确：

- (1) 作者从讲台走下来，与读者平起平坐，讨论各种概念和问题；
- (2) 把数学从“神坛”上请下来，向“他”请教各色各样的实际应用问题，以求得切实的进展乃至解决方法；
- (3) 努力探索一条把数学与工程、理论与实际、抽象与具体结合的道路；
- (4) 不怕水平低，不怕问题多，如实揭示出这个领域的难点和要点。

本书适合广大理工科本科生、硕士生和博士生学习使用，还可以作为相关专业科研人员与工程技术人员的入门读物和工具书。

虽然本书已历经一系列的教学实践，但不妥之处在所难免，期待读者批评指正。

目 录

前言

第1部分 概率基础

第1章 概率论的对象和方法	3
1.1 概率论的对象	3
1.2 概率论的分析方法	4
1.2.1 随机试验	4
1.2.2 样本空间 S	5
1.3 事件逻辑关系——集合论方法	6
1.3.1 符号和意义	6
1.3.2 运算性质	7
1.3.3 直和与直积	8
1.3.4 推广定理	8
1.4 事件的数量关系——排列组合方法	10
1.4.1 排列	11
1.4.2 重复排列	11
1.4.3 非重复完全排列	11
1.4.4 非重复选排列	12
1.4.5 组合	12
1.4.6 几个推广	13
附录 概率论研究起源	14
第2章 古典概型	16
2.1 概率定义	16
2.2 概率性质	17
2.3 概率计算	18
附录 StirLing 公式	24
第3章 概率公理化	28
3.1 几何概型	28
3.2 统计概型	32
3.3 概率论公理化体系	34
3.3.1 样本空间 S	34

3.3.2 事件域 F	34
3.3.3 概率 P	35
第 4 章 条件概率	37
4.1 独立事件的概率乘积定理	37
4.2 条件概率	43
4.3 条件概率的计算方法	44
4.4 条件概率推广	45
第 5 章 Bayes 公式	48
5.1 全概率公式	48
5.2 Bayes 公式	51
第 6 章 Problem 1	57
6.1 概率概念	57
6.2 概率独立性	60
6.3 全概率公式	61
6.4 Bayes 公式	63
6.5 配对问题	65
第 2 部分 概率分布	
第 7 章 二项分布	69
7.1 随机变量	70
7.2 0-1 分布	70
7.3 n 重 Bernoulli 试验	72
7.4 Pascal 分布	73
7.5 超几何分布	74
7.6 二项分布	76
附录 等式证明	78
第 8 章 Poisson 分布	80
8.1 超几何分布和二项分布的关系	80
8.2 分布实例	80
8.3 Poisson 分布	83
8.4 各种分布的最可几 K	86
8.5 Poisson 流	87
第 9 章 正态分布 (I)	90
9.1 观察量的正态分布	90
9.2 正态分布的最可几理论	92

9.3 正态分布参量	94
9.3.1 归一化参数	94
9.3.2 方差关节点	94
9.3.3 分布函数 $\Phi(x)$	95
9.3.4 分位点	96
9.4 正态分布检验	96
第 10 章 正态分布(Ⅱ)	100
10.1 正态分布与二项分布的关系	100
10.2 正态分布实例	104
附录 1 正态分布程序	106
附录 2 正态统计计算	108
第 11 章 分布理论	111
11.1 分布的定义和性质	111
11.2 离散型分布函数	112
11.3 连续型分布函数	114
11.3.1 均匀分布	115
11.3.2 指数分布	116
11.3.3 Γ -分布	117
11.3.4 正态分布	119
11.4 奇异性分布函数	119
11.5 随机函数分布	120
附录 Γ -分布函数	123
第 12 章 随机分布理论	125
12.1 二维随机变量	125
12.1.1 离散型二维随机变量	127
12.1.2 连续型二维随机变量	128
12.1.3 二维均匀分布	130
12.1.4 二维正态分布	130
12.2 边缘分布	131
12.2.1 离散型二维边缘分布	132
12.2.2 连续型边缘分布	135
第 13 章 条件分布	137
13.1 独立随机变量	137
13.2 离散型条件分布	139
13.3 连续型条件分布	143

13.4	多维随机向量的函数分布	145
13.4.1	$Z=X+Y$ 分布	145
13.4.2	$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 分布	147
13.4.3	$M=\max(X,Y)$ 和 $N=\min(X,Y)$ 分布	148
第 14 章	Problem 2	150
14.1	基础分布	150
14.2	分布理论	153
14.3	多维分布	156
14.4	条件分布与函数分布	159
第 3 部分 随机特征量		
第 15 章	随机特征量(I)	165
15.1	数学期望	165
15.1.1	离散随机变量的数学期望	165
15.1.2	连续型随机变量的数学期望	166
15.2	数学期望性质	168
15.3	方差定义及性质	171
第 16 章	随机特征量(II)	174
16.1	离散分布情况	175
16.2	连续分布情况	177
16.3	协方差和相关系数	180
附录	公式推导	183
第 17 章	相关矩阵	184
17.1	数学期望的几何意义	184
17.2	条件数学期望	185
17.3	随机向量的变换	188
17.4	矩和协方差矩阵	191
第 18 章	母函数和特征函数	194
18.1	母函数定义	194
18.2	母函数性质	195
18.3	独立随机变量和的母函数	196
18.4	随机个随机变量之和的母函数	197
18.5	特征函数的定义	199
18.6	特征函数性质	200
附录	公式推导	201

第 19 章 多元特征函数	203
19.1 特征函数与分布关系	203
19.2 分布函数的再生性	204
19.3 多元特征函数	205
19.4 多元正态分布	206
第 20 章 Problem 3	214
20.1 随机特征量	214
20.2 正态分布小结	218

第 4 部分 大数定律

第 21 章 大数定律	227
21.1 Chebyshev 不等式	227
21.2 Chebyshev 定理	228
21.3 概率收敛序列	229
21.4 中心极限定理	231
第 22 章 随机样本	234
22.1 简单抽样	234
22.2 抽样分布	235
22.3 Γ 分布	235
22.4 χ^2 分布	237
附录 Γ 函数和 B 函数	238
第 23 章 抽样分布	241
23.1 χ^2 分布	243
23.2 t 分布	245
23.3 F 分布	248
附录 χ^2 分布的球壳证明法	250

第 5 部分 概率估计

第 24 章 点估计	255
24.1 取中法	255
24.2 矩估计法	255
24.3 极大似然估计法	257
24.3.1 离散型	257
24.3.2 连续情况	258
24.4 估计量的标准	260
24.4.1 无偏性	260

24.4.2 有效性	262
24.4.3 一致性	263
附录 $A_2 - A_1^2$ 的计算	263
第 25 章 区间估计(I)	265
25.1 两个定理	266
25.2 置信区间与置信度	269
25.3 单个正态母体的特征值估计	271
第 26 章 区间估计(II)	274
26.1 双样本定理	275
26.2 两个母体的置信区间估计	276
26.2.1 母体 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间	276
26.2.2 两个母体 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间	278
26.3 0-1 分布特征量的区间估计	279
26.4 单侧置信区间	280
第 27 章 假设检验	284
27.1 假设检验的几个基本概念	285
27.2 单个正态总体的假设检验	287
第 28 章 样本容量	292
28.1 OC 函数	292
28.2 μ 检验法的 OC 函数	292
28.3 t 检验法的 OC 函数	296
第 6 部分 应用和回顾	
第 29 章 统计回归	301
29.1 从一个简单实验谈起	301
29.2 平均法	302
29.3 最小二乘法	303
第 30 章 Review(I)	309
30.1 概率定义和性质	309
30.2 加法定理和乘法定理	310
30.3 全概率公式	310
30.4 Bayes 公式	311
第 31 章 Review(II)	315
31.1 基本分布	315
31.2 分布函数与概率密度	316

31.3 多维分布	318
31.4 函数分布	320
第 32 章 Review(Ⅲ)	325
32.1 随机特征量	325
32.2 正态分布	327
32.3 大数定律	330
第 33 章 Review(Ⅳ)	335
33.1 样本与抽样分布	335
33.2 点估计与区间估计	335
33.3 假设检验	337
附文 1 3322——关于王蒙小说中的一个数学问题	341
附文 2 从 3322 说到 4321	344
附文 3 推广 Parade 问题	351
参考文献	354

第 1 部分 概 率 基 础

第 1 章 概率论的对象和方法

维纳在他著名的奠基作品《控制论》卷首曾引了这样一首德国儿歌^[1]：

“Weisst wie viele sterne stehen
In dem blauen Himmelszelt ?
Weisst wie viele wolken gehen
weit hinüber alle welt ?
Gott der Herr hat sie gezahlet
Dass ihm auch nicht eines fehlet
von der ganzan grossen zahl”

这首短歌的大意是：“你知道有多少星星高悬在蓝色的天空？你知道有多少云朵漂浮在大地的上空？上帝对它们作过清点，数字虽然巨大，可是一无遗漏。”

值得注意的是，上述儿歌竟概括了两个十分重要的科学领域，即天文学和气象学。天文学是以确定对象为基础的精确学科，而气象学则带有强烈的随机性。

本书正是以随机现象作为主要研究对象。

1.1 概率论的对象

从对天文和气象研究中，人们似乎已归纳出*自然界中存在两种现象：决定现象（即在一定的条件下必然发生，或者在一定的条件下必然不发生）和随机现象。

随机现象的规律是**统计规律**，简单说来可概括为单体的不可预测性和群体的频率稳定性。因此，单体和群体构成概率论对象中的一对主要矛盾，如图 1-1 所示。

作为单体，它应了中国的一句古话：“天有不测风云，人有旦夕祸福。”然而作为群体它又有明显且稳定的统计规律性。概率论正是以科学的方法研究随机现象的统计规律性。

就这方面而言，因为概率的思想和概念完全不同于我们平常的接触的确定性问题，所以常常容易出现错误。中国台湾“中央研究院”前院长，著名科学家吴大猷先生曾幽默地举述两个错用概率的例子^[2]：

* 我们知道，归纳很难获得完备的真理。近年来，混沌（chaos）的研究表明了在某类确定性问题中，可以产生随机现象。

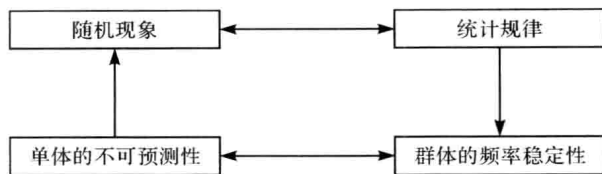


图 1-1 概率论随机现象的统计规律性

【例 1】 一个病人去医师处看病,经检查后医师告诉病人说,他需要动手术。病人问这项手术的死亡率怎样?医生说这项手术 100 个病人有 50 个要死的,但他立刻安慰病人说,已有 50 个病人死去了,所以病者不必害怕。

【例 2】 一个乘飞机的旅客问航空公司,飞机有人埋放定时炸弹的概率有多大?航空公司回答说是百万分之一的可能。这个旅客又问同时有两人埋放定时炸弹的概率有多大?回答是按概率理论应该是百万分之二的平方,即一万亿分之一。于是这位旅客自己带了一颗定时炸弹上飞机,自以为这样可以减低飞机有定时炸弹的概率。

作为著名的科学家,吴大猷先生在这里讲的绝不仅仅是笑话。而是要初学者加深随机现象中单体结果的不可确定性这一认识,也要大家提防用(人为的)非随机现象取代随机现象。这将会得出很多严重的结果。最近报道国内某地很多非法的 B 超性别检查,使出生的男婴是女婴的一倍以上。

1.2 概率论的分析方法

所谓概率论的分析方法,首先是把随机现象分解为若干个,或一系列最基本的元素。只有这样才能便于数学管理。

1.2.1 随机试验

我们把人对于随机现象结果的实验或者反应称为随机试验。随机试验有下列几个特征:

每次试验可以在相同的条件下重复进行;

实现有明确的可区分结果,而每次试验的可能结果不止一个;

在进行试验之前,出现的结果是不确定的。

上述随机试验 E 包含最基本的(称作基本随机事件),和组合的(通常称为随机事件)。为了把单体结果的不可预测性分解为最基本的元素,我们的主要兴趣集中于基本事件。

值得提出:随机现象的结果有时是有客观标准的,如天雨天晴、生儿育女等;

但有时却包含人为主观因素,如产品合格不合格,血脂高不高等。

1.2.2 样本空间 S

随机试验 E 中所有基本事件所组成的集合称为样本空间 S 。基本事件是样本空间的元素或样本点。

于是,一般说来任何随机事件均可以看作是样本空间元素的某种组合。以后叙述将看到,对于古典概型,基本事件是等可能性的(即具有高度的对称性)。于是在这一基础上,构成了群体的频率稳定性。图 1-2 表述了概率论的分析方法。

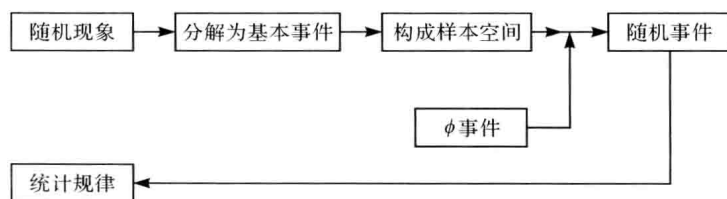


图 1-2 概率论的分析方法

必须指出:样本点构成事件的最主要元素。但是,从样本转入事件时,我们还引入了虚样本,即空集 $\emptyset$ 。 $\emptyset$ 样本不属于样本空间,而属于事件。 $\emptyset$ 事件时作为 S 事件的对立而出现的。只有引入 $\emptyset$,才能保证事件的逻辑关系是完备的。

在数学史上,零的出现是一件大事。在概率论中引入“虚”样本也应该是非常值得注意的方法。

【例 3】 两个骰子的所掷点数,画出其样本空间图。找出点数和的事件并分析其最大可能性。

【解】 两个骰子的所掷点数用样品空间 S 如图 1-3 表示。

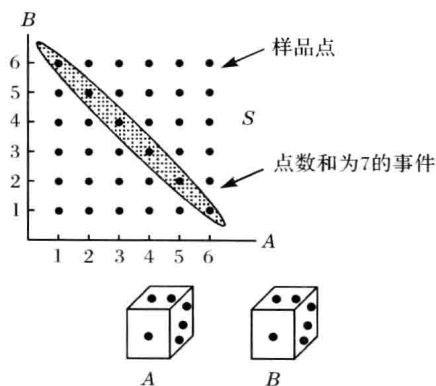


图 1-3 两个骰子点数的样本空间 S

这是典型的有限样本空间。总共有 $6 \times 6 = 36$ 个元素。 $A+B$ 两个骰子点数和出现最多的是 7 点,共有 6 个样本点;出现最少的是 2 点和 12 点,各只有 1 个样本点。

【评注】 A, B 两个骰子的点数和已经出现了中间大、两头小。即点数和小与点数和大的样本点少,而点数和中间的样本点多,如图 1-4 所示。这种特点对于多个骰子更为明显。

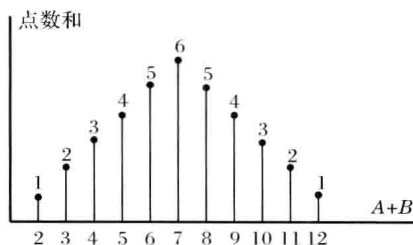


图 1-4 点数和样本元素分布图

可以这样说,由多个试验组合的事件,中间大、两头小将是随机现象的普遍特点。例如连续下雨或者连续天晴都应该是出现较少的事件。这一点将在后边作进一步研究。

通过对随机现象的分析和分解,我们已经把对它的研究转化为采用样本空间来研究随机事件。

随机事件有逻辑关系和数量关系。逻辑关系采用集合论方法,而(等可能性事件)的数量关系采用排列组合方法,如图 1-5 所示。

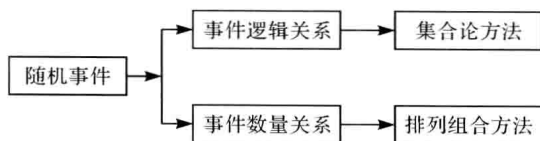


图 1-5 概率论研究方法

1.3 事件逻辑关系——集合论方法

集合论是处理事件逻辑关系的普遍方法。

1.3.1 符号和意义

如表 1-1 所示。