

ANSYS原厂策划 万水精心出品

ANSYS核心产品系列

ANSYS



万水ANSYS技术丛书

ANSYS

结构有限元高级分析方法 与范例应用(第三版)

尚晓江 邱 峰 等编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

万水 ANSYS 技术丛书

ANSYS 结构有限元高级分析方法 与范例应用（第三版）

尚晓江 邱 峰 等编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书基于结构分析软件 ANSYS 的最新版本 15.0 系统介绍了 ANSYS 结构分析的理论背景及应用方法,内容涉及 ANSYS 结构分析的各个方面,包括结构分析建模思想与方法、结构静/动力计算、非线性分析、稳定性分析、热传导分析、流固耦合分析、子结构分析、子模型分析、结构优化设计等分析专题。各章节都结合典型例题或工程实例进行讲解,所有案例均给出具体分析实现过程,并对计算结果进行了必要的分析和进一步讨论,以帮助读者更深入地理解有关分析方法和力学概念。

本书可以帮助读者打下扎实的有限元分析理论基础,切实提高 ANSYS 软件应用水平,进而具备在有关专业领域中应用 ANSYS 分析实际工程问题的能力。

本书适合作为土木、机械、航空、力学等相关工科专业研究生或高年级本科生学习结构数值分析及 ANSYS 软件应用课程的主要参考书,也适合从事结构分析和设计的工程技术人员自学参考。

图书在版编目 (C I P) 数据

ANSYS结构有限元高级分析方法与范例应用 / 尚晓江, 邱峰等编著. — 3版. — 北京: 中国水利水电出版社, 2014. 10

(万水ANSYS技术丛书)

ISBN 978-7-5170-2627-3

I. ①A… II. ①尚… ②邱… III. ①有限元分析—应用软件 IV. ①0241.82-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第240332号

策划编辑: 杨元泓 责任编辑: 张玉玲 封面设计: 李 佳

书 名	万水 ANSYS 技术丛书
作 者	ANSYS 结构有限元高级分析方法与范例应用 (第三版)
出版发行	尚晓江 邱 峰 等编著 中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京蓝空印刷厂
规 格	184mm×260mm 16 开本 19.75 印张 490 千字
版 次	2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷 2015 年 1 月第 3 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—5000 册
定 价	49.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

序

我国正处于从中国制造到中国创造的转型期，经济环境充满挑战。由于 80% 的成本在产品研发阶段确定，如何在产品研发阶段提高产品附加值成为制造企业关注的焦点。

在当今世界，不借助数字建模来优化和测试产品，新产品的的设计将无从着手。因此越来越多的企业认识到工程仿真的重要性，并在不断加强应用水平。工程仿真已在航空、汽车、能源、电子、医疗保健、建筑和消费品等行业得到广泛应用。大量研究及工程案例证实，使用工程仿真技术已经成为不可阻挡的趋势。

工程仿真是一件复杂的工作，工程师不但要有工程实践经验，同时要对多种不同的工业软件了解掌握。与发达国家相比，我国仿真应用成熟度还有较大差距。仿真人才缺乏是制约行业发展的重要原因，这也意味着有技能、有经验的仿真工程师在未来将具有广阔的职业前景。

ANSYS 作为世界领先的工程仿真软件供应商，为全球各行业提供能完全集成多物理场仿真软件工具的通用平台。对有意从事仿真行业的读者来说，选择业内领先、应用广泛、前景广阔、覆盖面广的 ANSYS 产品作为仿真工具，无疑将成为您职业发展的重要助力。

为满足读者的仿真学习需求，ANSYS 与中国水利水电出版社合作，联合国内多个领域仿真行业实战专家，出版了本系列丛书，包括 ANSYS 核心产品系列、ANSYS 工程行业应用系列和 ANSYS 高级仿真技术系列，读者可以根据自己的需求选择阅读。

作为工程仿真软件行业的领导者，我们坚信，培养用户走向成功，是仿真驱动产品设计、设计创新驱动行业进步的关键。



ANSYS 大中华区总经理，副总裁
于上海，2013 年 1 月 16 日

第三版前言

本书的第一版、第二版出版以来,受到科研及工程计算领域广大读者的关注和好评,在推进有限元分析技术的深入应用方面发挥了积极作用。一些高校在有限元课程中将本书第二版作为ANSYS软件应用的辅助教材。第二版出版五年来,很多读者向作者提出许多关于该书的有价值的改进意见和建议;在此期间,ANSYS软件也由当初的11.0版本发展到目前的15.0版本,软件新增了不少新的建模和分析功能,ANSYS Workbench环境的应用也日益广泛。有鉴于此,在保持前两版理论实践结合、例题及工程案例丰富等特点的基础上,对第二版进行了系统的改编,以满足当前ANSYS软件教学和应用的实际需要。

本次改编工作主要体现在如下几个方面:

(1) 总体编写思路。

工程技术人员在应用ANSYS处理工程问题时,实际上需要经过一个“将工程问题映射为力学问题,再将力学问题映射为ANSYS模型,然后进行求解”的“二次映射”过程。第一次映射的背后是工程经验和力学原理,第二次映射的背后则是数值计算方法和软件的操作应用能力。为了帮助读者系统掌握理论基础和实用的建模及分析方法,提高利用分析软件处理实际问题的能力,本次改编紧紧围绕“二次映射”过程有关的问题系统介绍软件应用相关的理论背景、建模方法和分析方法三方面的内容。这是本次改编的一个总体思路。

(2) 案例操作环境。

ANSYS软件结构分析目前的情况可以概括为“一个基础、两座大厦”,即以共同的结构力学求解器Mechanical Solver为统一“基础”、经典环境Mechanical APDL和Workbench中集成的Mechanical Application两套前后处理“大厦”。经典环境的APDL脚本语言因其参数建模分析自动化程度高、可重复性强、能支持Mechanical Solver的全部功能等优势,拥有十分众多的用户;另一方面,Workbench环境中集成的工具因其工程化的前后处理和操作便捷等特点,工程应用也日益广泛。这次改编兼顾了两类用户的需要,删去原书中一些较简单的例题和部分讲解经典界面交互操作的案例内容,部分例题改用Workbench来建模分析,另外还新增了部分Workbench环境下的典型例题。

(3) 全新的内容编排。

本次改编取消原书的三篇式结构,将原书第一篇的内容加以压缩和改写,对第二篇的结构分析专题作了扩充,第三篇中的精选工程范例经改编后融入前面适当的章节。

改编后的第1章为ANSYS有限元分析的理论背景,简明扼要地介绍了结构静力有限元计算、温度场及热应力计算、结构动力学分析、流固耦合分析、非线性问题等相关理论。这些内容有助于读者打下良好的有限元分析理论基础。第2章为ANSYS软件应用要点选讲,是专门为没有软件应用经验的读者准备的,介绍了Mechanical APDL(经典环境)及Workbench环境的一般操作过程和基本操作要点和APDL语言的基础知识。第3章为ANSYS结构建模思想与方法,全面介绍了ANSYS的常用单元以及各种结构形式(杆系、板壳、实体、组合结构)的模型构建方法和要点,包含了Workbench环境下各种建模工具的综合应用。第4章为结构静

力计算,介绍了结构分析的载荷及边界条件处理方法、结构对称性的应用、多载荷步(多工况)分析方法及后处理注意事项,并简单介绍了强度工具箱和疲劳工具箱的应用。第5章为模态分析,结合案例介绍了一般模态、预应力模态的分析方法。第6章为谐响应分析,介绍简谐荷载强迫振动下结构稳态响应的计算方法,讨论了激振力分布形式对分析结果的影响。第7章介绍瞬态动力分析的方法和应用,结合简单例题讨论了瞬态分析和谐响应分析的关系,结合例题介绍了结构抗震分析中的瞬态动力问题。第8章为响应谱及PSD分析,结合悬臂结构和海洋平台结构分析实例介绍了响应谱分析和PSD分析方法。第9章为流固耦合分析简介,介绍ANSYS Fluent和Mechanical之间的耦合分析方法,这是本版的新增内容。第10章为温度场及热应力计算,这也是本版的新增内容。第11章介绍了子结构方法及其应用。第12章介绍了子模型方法及其应用,这是本版的新增内容。第13章为结构非线性分析,介绍了各类非线性问题的处理方法和策略,并提供了一系列非线性分析实例。第14章为梁壳结构的屈曲分析,介绍了特征值屈曲以及非线性屈曲分析的方法,在非线形屈曲分析中比较了弧长法和非线性稳定性方法的计算结果。第15章为结构优化设计,介绍了形状优化方法和基于ANSYS Design Exploration的结构参数优化方法。附录中收录了部分常用结构分析单元的形函数。

本版改编工作主要由尚晓江、邱峰等承担,前两版的部分作者也参与了相关章节的改写,并为本次改编工作提供了很好的建议。此外,还要特别感谢中国水利水电出版社杨元泓老师对本书的支持和帮助。

由于本次改编涉及多项ANSYS新技术,加之时间仓促和编者认识水平的局限,书中不当和错误之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。作者的联系方式: xiaojiang.shang@139.com。

编者

2014年11月

第二版前言

本书第一版出版以来,得到科研以及工程计算领域广大读者的认可。一些高校在有限元课程中已将本书用作 ANSYS 教学的辅助教材。很多读者在阅读了第一版之后,对本书提出了很多有价值的改进意见。有鉴于此,对原书进行了系统修订,具体包括以下方面:

(1) 适当增加了 ANSYS 相关理论背景的介绍,介绍这部分内容时并不追求理论体系的完整性,而是集中力量有针对性地讲解与 ANSYS 分析技术直接相关的内容。

(2) 结合软件更新了部分内容,例如,在 ANSYS 目前最新版本中已经不再有 PLANE2 单元,本次修订时对这类问题进行了适当的增删。增加了关于 ANSYS 产品的统一启动界面和 ANSYS Workbench 仿真环境方面的一些简单内容。

(3) 结合基本的力学概念,对书中例题的计算结果作了必要的分析和评价,有助于读者对相关问题有更深入的了解。例如,读者曾询问关于结构屈曲分析结果的意义等问题,因此本次修订对结构稳定性分析例题的计算结果进行了解释和说明。

(4) 对程序操作方面的知识点多采用列表形式,以增加相关内容的系统性和条理性,使相关的章节更具可读性。

(5) 重新设计了一些新的例题,例如,动力学专题部分的例题基本上都是重新设计的,这些例题的共同特点是结构形式不复杂,但是通过这些简单问题容易讲清楚动力学的基本概念。在梁分析中也针对各类梁单元列举了例题。

(6) 删去了前一版过于简单的一些例题,适当增加了例题的总体复杂程度,每一章都有简单的问题和相对综合一些的问题。

(7) 适当增加了一些软件操作技巧等方面的介绍。对于使用程序过程中可能出现的常见问题,在正文中以“注意”强调一些相关的要点。

(8) 更正了第一版中的一些文字录入错误。

本次修订在总体上保持了前一版中理论与实践紧密结合、操作过程详细、分析例题丰富等特点,并在组织内容的过程中同时照顾到科研以及工程计算两方面读者的需要。本书在结构上分为三篇,第1篇主要介绍相关背景原理以及各类 ANSYS 结构单元的使用方法,第2篇介绍 ANSYS 结构分析方面的一些专题性的内容,第3篇提供了一些有代表性的综合性分析例题。本书附录中收录了一些常用结构单元的形函数以及 ANSYS 结构分析命令等。

本次改版修订工作主要由尚晓江、邱峰、赵海峰等完成,本次修订工作是集体智慧的结果,第一版的部分原作者参与了相关章节的改写和文字校对工作,他们是李文颖、王化锋、魏久安、苏建宇、潘冠群、张永刚、刘金兴、卢靖、蒋迪、李德聪、袁志达、陈小亮、杨海波、杨伟、石伟兴、聂慧萍、张炯曦、史雪松、张永芳、宋谦、王惠平。参与修订和为本版提供工程算例资料的还有梁兴、王海彦、刘永刚、徐建华、石彬彬、鲁小星等。此外,还要感谢中国水利水电出版社编辑人员为本书出版而付出的辛勤劳动。

由于时间仓促和编者水平的局限,书中不当和错误之处在所难免,欢迎读者朋友批评指正。作者联系方式: shj_cas@sina.com。

编 者

2008 年 2 月

第一版前言

目前,很多高校的理工科专业(土木、机械、航空、力学等)都将有限单元法作为必修的专业课。但在学习有限元课程之后,还必须熟练地掌握相关的有限元分析软件才能将有限元基本理论有效应用到工程问题的分析中。

作为著名的通用有限元分析软件,ANSYS 因其强大的功能而受到越来越多的结构分析及其他相关专业科研与工程计算人员的青睐,可以说,ANSYS 是架设于有限元理论和实际工程结构计算问题之间的桥梁。

本书将结构有限元分析的基本力学概念与 ANSYS 实践紧密结合,通过大量生动的原创性分析实例,向读者系统全面地介绍 ANSYS 结构分析的方法,尽量照顾到科研以及工程计算两方面读者的需要。本书在内容组织上分为三篇:

第 1 篇: ANSYS 有限元分析基础

内容包括桁架结构、梁系结构、弹性平面问题、轴对称问题、空间问题、板壳结构等各种弹性结构的有限元静力分析问题,本篇列举了 7 个典型的工程实例。

第 2 篇: ANSYS 高级结构分析

内容包括结构非线性分析、结构的动力分析、结构的稳定性分析、结构最优化设计以及子结构技术的应用等 5 个结构分析高级专题,本篇列举了 11 个典型的工程实例。

第 3 篇: 工程范例精选

内容包括三个精选的很有代表性的工程结构综合分析范例:海洋钢导管架石油平台结构、框架剪力墙高层建筑结构以及施威德勒型球面网壳结构的 ANSYS 分析。每个问题均进行了一系列的相关分析,帮助读者将 ANSYS 结构分析方法融会贯通。

建议读者在学习有限元课程时把 ANSYS 作为一个数值仿真的实验室,通过大量的同步上机实践(用本书的例题即可),亲身体会结构有限元分析的计算机实现过程。我们认为只要基本概念清楚,基本操作熟练,就不难结合自身的专业背景和本书介绍的基本操作方法由浅入深地进行一些有特色的专业问题的分析。相信通过本书的学习,读者定能迅速地提高自身的 ANSYS 操作水平以及利用有限元技术进行结构分析的功底,从而具备在相关专业领域中从事高级结构分析的能力。

本书适合作为土木、机械、航空、力学等相关专业研究生或高年级本科生学习结构数值分析及 ANSYS 软件应用课程的主要学习参考书。对从事结构分析的工程技术人员也是很有价值的参考资料。

本书由中科院力学所尚晓江、邱峰、赵海峰、李文颖等负责编写。参加编写和录入工作的还有魏久安、苏建宇、张骥、潘冠群、谢季佳、左树春、冯丽萍、刘金兴、卢靖、蒋迪、李德聪、袁志达、张自兵、王艺、王化锋、陈小亮、杨海波、宋谦、杨伟、石伟兴、聂慧萍、史雪松、张永芳、王惠平等。同济大学结构工程专业研究生宋谦向作者提供了关于空间结构分析的资料,中科院力学所的邓守春博士、ANSYS-China 北京办事处龙丽平博士等在本书编写过程中帮助作者解决了一些具体的技术问题,一并在在此表示感谢。此外,还要感谢中国水利水电

出版社编辑人员为本书出版而付出的辛勤劳动。

由于时间仓促和编写者认识水平的局限，书中不当和错误之处在所难免，欢迎读者朋友批评指正。作者联系方式：shj_cas@sina.com，zhf@lnm.imech.ac.cn。

编 者

2005 年 7 月

目 录

序

第三版前言

第二版前言

第一版前言

第 1 章 ANSYS 结构分析的理论背景及功能概述 1

1.1 有限单元法的基本思想与解题过程····· 1

1.1.1 起源于杆系结构分析的有限单元法··· 1

1.1.2 有限单元法处理问题的一般过程及 算法特点····· 6

1.2 ANSYS Mechanical 的分析能力及 一般分析流程····· 9

1.3 ANSYS 结构计算的理论基础····· 11

1.3.1 ANSYS 静力分析的理论基础····· 11

1.3.2 ANSYS 动力分析的理论基础····· 17

1.4 ANSYS 热传导计算的理论基础····· 19

1.5 ANSYS 流固耦合分析的理论基础····· 21

1.6 ANSYS 结构非线性分析的基本概念 与算法····· 22

第 2 章 ANSYS 结构分析软件应用精要····· 27

2.1 ANSYS 结构分析软件架构及两层体系··· 28

2.1.1 ANSYS 结构分析软件的架构：一个 基础、两座大厦····· 28

2.1.2 ANSYS Mechanical 内部工作的 两层体系····· 29

2.2 Mechanical APDL 应用要点选讲····· 29

2.2.1 Mechanical APDL 的界面、工作机制 及操作流程····· 29

2.2.2 Mechanical APDL 的对象操作····· 36

2.2.3 APDL 语言简介与应用入门····· 39

2.3 Workbench 及 Mechanical Application 应用要点选讲····· 47

2.3.1 ANSYS Workbench 环境简介····· 48

2.3.2 Workbench 结构分析系统与组件····· 50

2.3.3 Mechanical Application 组件的 操作要点····· 52

第 3 章 ANSYS 结构分析建模思想与方法····· 55

3.1 ANSYS 结构分析建模思想与方法概述··· 55

3.1.1 ANSYS 结构分析建模的二次 映射思想····· 55

3.1.2 工程结构分类与 ANSYS 单元选择··· 56

3.1.3 结构分析建模的直接法与间接法····· 59

3.2 Mechanical APDL 结构分析的建模方法··· 60

3.2.1 Mechanical APDL 建模过程概述····· 60

3.2.2 Mechanical APDL 连续体结构 建模要点····· 63

3.2.3 Mechanical APDL 杆系及板壳结构 建模要点····· 69

3.3 Workbench 结构分析的建模方法····· 77

3.3.1 Workbench 建模过程及相关组件简介 77

3.3.2 Workbench 连续体结构建模要点····· 84

3.3.3 Workbench 梁壳结构建模要点····· 85

第 4 章 结构静力计算····· 88

4.1 Mechanical APDL 静力分析····· 88

4.1.1 载荷及约束的施加····· 88

4.1.2 单/多载荷步静力分析····· 93

4.1.3 静力分析结果后处理····· 94

4.2 Mechanical Application (WB) 静力分析··· 98

4.3 静力计算工程案例····· 102

4.3.1 网架结构温差作用分析····· 102

4.3.2 独立重力坝的静力分析····· 106

4.3.3 施工防护结构的静力计算	120	分析方法	215
第 5 章 模态分析	128	10.2 热传导及热应力分析例题	218
5.1 ANSYS 模态分析方法及注意事项	128	第 11 章 子结构分析	223
5.1.1 一般模态分析方法	128	11.1 子结构分析的基本概念	223
5.1.2 ANSYS 预应力模态分析	131	11.2 子结构分析的一般过程	225
5.2 模态分析例题：球面网壳结构	132	11.2.1 生成部分	225
5.3 预应力模态例题：拉杆横向振动模态	136	11.2.2 使用部分	227
第 6 章 谐响应分析	140	11.2.3 扩展部分	229
6.1 谐响应分析的实现过程及注意事项	140	11.3 子结构分析例题：空腹梁	229
6.2 谐响应例题：不同激振力分布形式的 谐响应分析	146	第 12 章 子模型方法的应用	238
第 7 章 瞬态动力分析	157	12.1 子模型分析方法的实现过程	238
7.1 瞬态分析的实现过程及注意事项	157	12.2 子模型分析案例：开孔的拱壳局部 应力分析	239
7.2 瞬态结构分析案例	160	12.2.1 问题描述	239
7.2.1 案例一：简谐载荷作用的单自由度 系统	160	12.2.2 建立几何模型	240
7.2.2 案例二：多自由度结构地震波 时程分析	162	12.2.3 创建分析流程及项目文件	242
第 8 章 响应谱及 PSD 分析	166	12.2.4 全模型分析	243
8.1 响应谱分析的实现过程与案例	166	12.2.5 子模型分析	244
8.1.1 响应谱分析的具体实现过程	166	第 13 章 结构非线性分析	248
8.1.2 响应谱分析案例：悬臂结构地震 响应谱分析	168	13.1 ANSYS 非线性分析的求解设置与 实施要点	248
8.2 PSD 分析的实现过程与案例	174	13.1.1 ANSYS 非线性分析的求解设置	248
8.2.1 ANSYS 的 PSD 分析方法	174	13.1.2 非线性分析的实施要点及 注意事项	253
8.2.2 PSD 分析案例：海洋平台波浪力作用 下的 PSD 分析	177	13.2 ANSYS 接触问题的建模与分析	254
第 9 章 流固耦合分析简介	199	13.2.1 接触分析概述	254
9.1 ANSYS 流固耦合分析方法与过程	199	13.2.2 Mechanical 接触分析方法	255
9.2 流固耦合例题：双立板在水中的 摆动模拟	200	13.3 非线性分析例题	258
9.2.1 搭建分析项目流程	200	13.3.1 油罐底效应的简化分析	258
9.2.2 瞬态结构分析前处理	201	13.3.2 网壳焊接球节点的弹性塑性受力 分析	261
9.2.3 流体域分析前处理	206	13.3.3 插销装配及拨拉接触分析	268
9.2.4 系统耦合设置及求解	208	第 14 章 梁壳结构的屈曲分析	275
9.2.5 结果后处理	209	14.1 结构屈曲问题的基本概念	275
第 10 章 热传导分析及热应力计算	215	14.2 特征值屈曲及非线性屈曲分析的方法	276
10.1 Workbench 中的热传导及热应力 分析	215	14.3 稳定性分析案例：工字型截面构件 的失稳分析	277
		14.3.1 特征值屈曲分析	277

14.3.2 非线性屈曲分析：弧长法·····	280	15.2.1 结构参数优化的数学表述·····	285
14.3.3 非线性屈曲分析：非线性稳定性··	282	15.2.2 目标驱动优化的一般过程·····	286
第 15 章 结构优化设计·····	284	15.3 Design Exploration 优化分析案例·····	289
15.1 ANSYS 形状优化技术简介·····	284	附录 ANSYS 常用单元形函数·····	297
15.2 基于 Design Exploration 的参数 优化技术·····	285	参考文献·····	304

ANSYS 结构分析的理论背景及功能概述



本章导读

有限元分析软件不同于一般的应用软件，它对使用者的知识水平提出了较高要求。有限元软件的使用者应当具备必要的理论基础，这样才能对计算过程中的各种参数作出正确的设置，并对程序的计算结果作出正确的判断和评价。

ANSYS 结构分析软件功能全面，涵盖线性静力分析、特征值屈曲分析、模态分析、谐响应分析、瞬态分析、响应谱分析、随机振动分析、子结构分析、子模型分析、热传导计算等分析类型，可以模拟材料非线性、几何非线性、接触分析等各类非线性力学行为，还提供了复合材料分析、断裂力学分析、热—结构耦合分析、声场以及声—结构耦合分析、优化设计、概率设计以及并行求解计算等技术，形成了完善的高级结构分析解决方案。本章将围绕 ANSYS 计算程序应用的各个方面介绍与之相关的理论背景知识。

本章包括如下主题：

- 有限单元法的基本思想与解题过程
- ANSYS Mechanical 的分析能力及一般分析流程
- ANSYS 结构静、动力分析的理论基础
- ANSYS 热传导分析的理论基础
- ANSYS 流固耦合分析的理论基础
- ANSYS 结构非线性分析的基本概念和算法

1.1 有限单元法的基本思想与解题过程

1.1.1 起源于杆系结构分析的有限单元法

ANSYS 软件的理论基础是有限单元法（Finite Element Method）。有限单元法是结构工程师和应用数学研究人员共同智慧的结晶，其基本概念起源于杆系结构的矩阵分析法。1956 年，

Turner 和 Clough 等人首次将刚架分析的矩阵位移法应用于飞机结构的分析中。之后的 1960 年, Clough 将这种处理问题的思路推广到求解弹性力学的平面应力问题, 给出了三角形单元求解弹性平面应力问题的正确解答, 并且首次提出“有限单元法”的名称。之后, 应用数学家和力学家们则通过研究找到有限元方法的数学基础——变分原理, 进而将这一方法推广应用于求解各种数学物理问题, 如热传导、流体力学、电磁场以及各种耦合场问题。有限单元法目前已经发展成为一种多物理场通用的数值计算方法。

为了介绍有限单元法的基本概念, 首先来回顾一下杆系结构的矩阵分析方法。杆系结构的矩阵分析方法以杆端位移作为基本未知量, 因此又被称为矩阵位移法。该方法的计算过程可以概括为以下几个步骤:

(1) 结构离散化。

将整个结构离散为若干个杆件单元, 通常情况下一个结构杆件被作为一个单元, 也可根据杆件截面变化以及支座和加载情况等将一个构件划分为多个单元。

(2) 单元特性分析。

单元分析是有限元分析的重要一环, 也是结构整体分析的基础。单元分析的任务是得到单元节点力与节点位移之间的关系方程——单元刚度方程, 此方程的系数矩阵被称为单元刚度矩阵, 单元刚度矩阵中的元素称为刚度系数, 刚度系数的数值等于发生单位位移所引起的力。对弹性结构而言, 刚度系数的实质为弹簧的刚度系数, 即单位变形量引起的弹性回复力。为说明刚度系数的意义, 下面给出几个简单的例子。

图 1-1 为只承受轴向力的等截面直杆, 长度为 l , 截面积为 A , 弹性模量为 E 。直杆的右端发生单位微小轴向位移时, 由材料力学可知所需施加的力为 $F=EA/l$, 因此该直杆的轴向抗拉(压)刚度系数为 EA/l , 其实质就是一个刚度系数为 EA/l 的轴向弹簧。

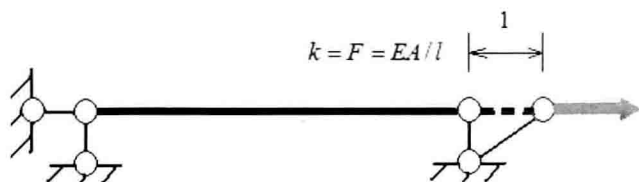


图 1-1 杆的刚度系数

图 1-2 为一等截面的直梁, 跨度为 l , 材料弹性模量为 E , 截面惯性矩为 I , 梁左端固定, 右端受到竖向支撑的约束。现在如果强迫梁的右端发生单位微小支座位移时, 竖向支杆中的约束反力为 $F=3EI/l^3$, 因此此梁的右端抗侧向变形刚度为 $3EI/l^3$ 。

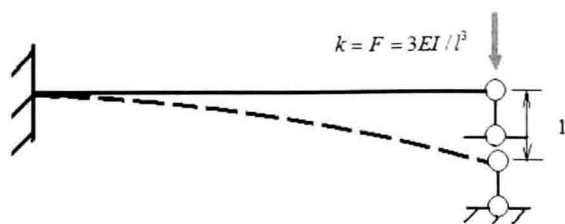


图 1-2 梁端的抗侧移刚度

图 1-3 中, 等截面梁的左端发生单位微小的转角时, 需要施加的力矩为 $M = 3EI/l$, 因此该梁左端的平面内转动刚度为 $3EI/l$ 。

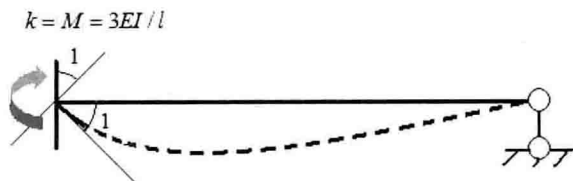


图 1-3 梁端的抗转动刚度

在单元分析时, 单元上作用的各种分布载荷需要按照静力等效原则移置到杆件的节点上, 形成等效节点载荷。在矩阵位移分析中, 由于各杆件放置角度不同, 还需将单元刚度方程 (即单元刚度矩阵和单元等效节点力) 转换至结构整体坐标系中。

(3) 结构分析。

结构分析则是通过结构整体的平衡关系和变形协调条件将单元刚度矩阵按照节点位移编号和对号入座的方式组合形成结构的总体刚度矩阵, 同时各杆件上作用载荷形成等效节点载荷并转换至整体坐标系下, 形成结构的节点载荷向量与节点位移向量之间的关系。

(4) 引入边界条件。

未引入边界约束条件的总体刚度矩阵是一个奇异矩阵, 通常采用划行划列降阶法、改 0 置 1 法、对角元素充大数法等方法引入边界条件。如结构的约束足够, 不论是静定还是超静定系统, 引入边界条件后的总体刚度方程均可解。

(5) 求解线性方程组得到节点位移。

求解结构总体刚度方程组, 即可得到杆端位移 (节点位移)。

(6) 计算杆端力。

根据节点位移计算等效节点载荷引起的杆端力, 叠加固端约束杆端力, 得到实际结构各杆件的杆端力。

上述过程中最为核心的两个环节是单元特性分析和结构分析。下面以图 1-4 所示的简单桁架结构的矩阵分析为例, 向读者介绍相关的一系列基本概念。

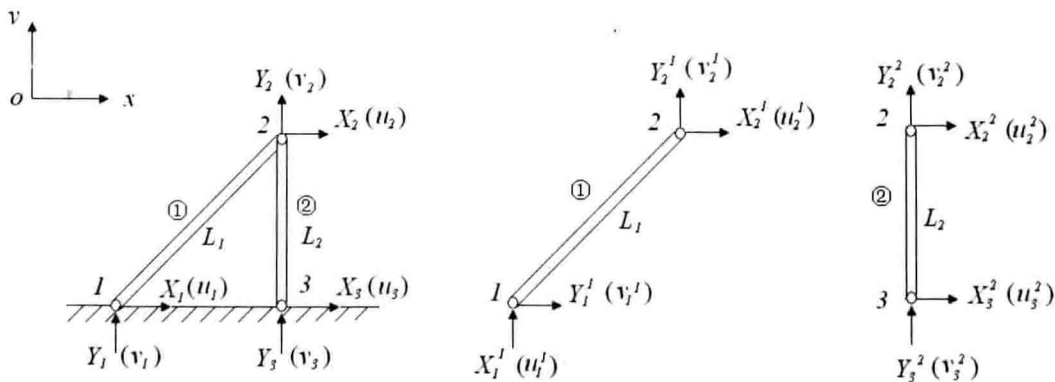


图 1-4 桁架结构有限元分析的原理

如图 1-4 所示是由两根杆件①和②组成的平面桁架, 杆件的截面积均为 A , 材料的弹性模量都是 E , 长度分别为 L_1 和 L_2 。图中, X_i 和 Y_i 分别为桁架结构在第 i 个节点处所受到的水平以及竖向外力, u_i 和 v_i 分别为结构中节点 i 的水平 and 竖向节点位移, u_i^j 和 v_i^j 分别为单元 j 杆端节点 i 的水平 and 竖向杆端位移 (上标 j 表示单元号, 节点编号采用结构中的节点编号), X_i^j 和 Y_i^j 分别为单元 j 的杆端节点 i 处的水平和竖向杆端力。

由于杆件在节点处均为铰支, 因此杆端无力矩作用, 每个节点的力和位移均有两个分量, 或者说, 一个节点具有 2 个自由度。我们取以上与坐标方向平行的正交分量分析杆端节点力和节点位移之间的关系。

对于杆件①, 设其轴线方向 (由节点 1 指向节点 2) 与 x 轴正向成 α 角, 则其杆端力与杆端位移之间的关系可以表示为:

$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \\ X_2^1 \\ Y_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \end{Bmatrix}$$

其中, 杆端力与杆端位移之间的系数矩阵称为单元刚度矩阵, 我们用 k_{ij} 来表示刚度矩阵中位于第 i 行 j 列的元素。下面, 我们以位于第 1 列的各元素 k_{i1} ($i=1, 2, 3, 4$) 为例说明刚度矩阵元素的计算方法和力学意义。

首先, 令单元①节点力与节点位移关系式中的 $u_1^1=1$, $v_1^1=v_2^1=u_2^1=0$, 则得到: $X_1^1=k_{11}$, $Y_1^1=k_{21}$, $X_2^1=k_{31}$, $Y_2^1=k_{41}$, 这表明: 当单元①的节点 1 发生单位微小水平位移 ($u_1^1=1$) 且同时约束单元①的其他所有节点位移 ($v_1^1=v_2^1=u_2^1=0$) 时, 单元①在各节点处受到杆端力, 这时的杆端力组成一个平衡力系, 它们在数值上 (以与坐标轴正向一致为正值) 就等于刚度矩阵中的元素, 表征单元①抵抗节点 1 水平位移 u_1^1 的刚度。这些力的数值很容易由材料力学求得, 如图 1-5 所示。

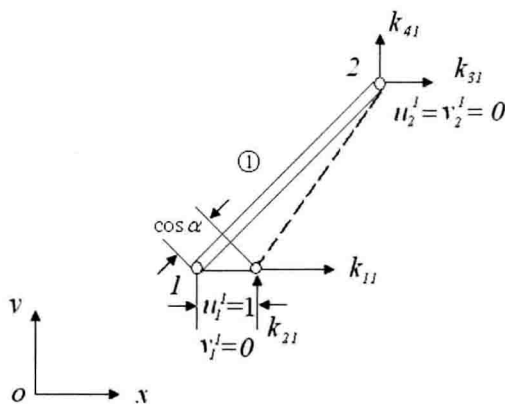


图 1-5 刚度系数的意义图示

当 $u_1^1=1$, 其余节点位移分量 $v_1^1=v_2^1=u_2^1=0$ 时, 杆单元①的缩短量为 $\Delta l = \cos \alpha$, 于是杆

件受到的轴向压力为 $EA \cos \alpha / L_1$ ，这就是杆件①在节点 1 处受到的节点力，其在 x 方向和 y 方向的分量分别为：

$$k_{11} = EA \cos^2 \alpha / L_1, \quad k_{21} = EA \cos \alpha \sin \alpha / L_1$$

杆件①在节点 2 处受到的力，其大小等于杆件的轴力，且方向与节点 1 处的节点力相反，其在 x 方向和 y 方向的分量分别为：

$$k_{31} = -EA \cos^2 \alpha / L_1, \quad k_{41} = -EA \cos \alpha \sin \alpha / L_1$$

继续对各位移分量做类似的分析，即可得到刚度矩阵的全部元素，完成桁架单元①特性的分析。实际上，通过这一操作，我们已经得到了平面桁架杆单元的一般刚度特性，对于桁架单元②，其相当于倾角为 90 度的特例，我们可直接得到单元刚度方程为：

$$\begin{Bmatrix} X_2^2 \\ Y_2^2 \\ X_3^2 \\ Y_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^2 \\ v_2^2 \\ u_3^2 \\ v_3^2 \end{Bmatrix}$$

单元分析结束后，就需要进行结构分析，将单元的刚度特性集成得到结构的刚度方程，根据几何条件——相邻单元公共节点位移的协调关系，即：

$$u_1 = u_1^1, \quad v_1 = v_1^1; \quad u_2 = u_2^1 = u_2^2; \quad v_2 = v_2^1 = v_2^2; \quad u_3 = u_3^2, \quad v_3 = v_3^2$$

又根据节点处力的平衡条件，作用于某节点上的外力应等于包含该节点的各单元的杆端节点力的合力，即：

$$X_1 = X_1^1, \quad Y_1 = Y_1^1; \quad X_2 = X_2^1 + X_2^2, \quad Y_2 = Y_2^1 + Y_2^2; \quad X_3 = X_3^2 = 0, \quad Y_3 = Y_3^2$$

以上 3 个节点处沿坐标轴方向的力的平衡条件就是结构的节点力与节点位移的关系，代入单元杆端力与杆端位移的关系（两个单元的刚度方程），即得到总体刚度矩阵的形式。

显然，总体刚度矩阵是一个 6×6 的矩阵。由于节点 2 同时连在杆件①和②上，因此两根杆件将共同抵抗公共节点 2 的变位，这在结构总体刚度矩阵中表现为两个单元对应刚度系数的叠加，即：

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

其中 $F_i = \{X_i, Y_i\}^T$ ， $\Delta_i = \{u_i, v_i\}^T$ ， K_{ij}^m 表示单元 m 的节点 i 和节点 j 之间的刚度关系（单元刚度矩阵的子块），即节点 i 的单位位移引起节点 j 处的杆端力。

这样我们就完成了结构分析，得到总体刚度方程，其系数矩阵就是总体刚度矩阵。在引入边界约束条件之前，总体刚度矩阵是奇异的。通过前述方法在总体刚度方程组中引入约束条件，求解线性方程组即可得到节点位移，进而得到杆端力等结果。具体过程在相关的教程中都有介绍，此处不再展开叙述。

回顾上述杆系结构矩阵分析过程，其基本思路可以概括为：每一个单元的力学特性被看作构成整体结构的砖瓦，总体结构作为一系列单元组成的集合体，通过单元特性的组合装配