概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

主编◎吕同富　徐雅玲　张志红

北京交通大学出版社
Http://www.bjtup.com.cn

概率论与数理统计

主　编　吕同富　徐雅玲　张志红

参　编　胡振华　王文静　胡振媛　甄海燕

李兆斌　方国敏　李恩华　李新芳

陈宏达

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

本书共七章:第1章,随机变量及概率计算;第2章,随机变量及概率分布;第3章,随机变量的数字特征;第4章,数理统计基础知识;第5章,参数估计;第6章,假设检验;第7章,方差分析与回归分析.其中第1章、第2章和第3章为概率部分,第4章、第5章、第6章和第7章为数理统计部分.基于实际应用的课程开发设计模式是本书的特色,基本应用技能和数学建模思想贯穿始终,本书学习目的明确,实际问题具体,有大量翔实的应用实例可供参考,有相当数量的应用问题可供实践.此外,本书还配有数字教学资源,极大地满足了广大师生的教学需要.

本书可作为本科院校非数学专业"概率论与数理统计"课程的教材或参考用书,也可作专科和成人高校相关专业的教材参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/吕同富,徐雅玲,张志红主编. —北京:北京交通大学出版社,2014.9

ISBN 978-7-5121-2094-5

Ⅰ.① 概… Ⅱ.① 吕…② 徐…③ 张… Ⅲ.① 概率论 ② 数理统计 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 209535 号

策划编辑: 吴嫦娥 张家旺

责任编辑: 井 飞 杨 硕　　**特邀编辑:** 张 明

出版发行: 北京交通大学出版社　　**电 话:** 010-51686414

北京市海淀区高梁桥斜街44号　　**邮 编:** 100044

印 刷 者: 北京瑞达方舟印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×230mm　**印 张:** 12　　**字 数:** 270千字

版 次: 2014年12月第1版　　**印 次:** 2014年12月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-5121-2094-5/O·141

印 数: 1～3 000册　　**定 价:** 32.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043,51686008;传真:010-62225406;E-mail:press@bjtu.edu.cn。

前言

推进教育事业改革和发展是一项长期而艰巨的任务.《国家中长期教育改革和发展规划纲要》的制定和实施只是一个新的起点. 实现教育科学发展，根本出路在改革创新. 要解放思想，实事求是，敢于冲破传统观念和体制的束缚，允许和鼓励各地进行探索和试验，通过改革创新使教育发展更加符合时代发展的潮流，更加符合建设中国特色社会主义对人才的需要，更加符合广大人民群众对教育的殷切期望.

改革是永恒的主题.《国家中长期教育改革和发展规划纲要》要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革，要求在改革中求生存求发展. 为了进一步适应数学教学改革的需要，作者做了艰苦的探索和研究，历时两年完成了这本《概率论与数理统计》，希望它能在改革大潮中激起一点儿浪花.

本书突出“应用”特色，注重培养学生的实践能力，基础理论以“实用为主、够用为度”，基础知识广而不深，要求学生会用就行. 基本应用技能和数学建模思想贯穿始终. 文字叙述准确，简明扼要，通俗易懂.“以例释理”，理论联系实际. 本书内容包括：第 1 章，随机变量及概率计算；第 2 章，随机变量及概率分布；第 3 章，随机变量的数字特征；第 4 章，数理统计基础知识；第 5 章，参数估计；第 6 章，假设检验；第 7 章，方差分析与回归分析等内容. 其中第 1 章、第 2 章、第 3 章为概率部分，第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章为数理统计部分，概率与统计两部分知识相对独立完整，具有一定的可剪裁性和拼接性，可根据不同的培养目标将内容裁剪拼接，使前后课程互相衔接，浑然一体. 本书内容覆盖面广，满足了各专业大类对理论、技能及其基本素质的要求. 同时还配有数字教学资源、电子教案、Mathematica 实验、Excel 实验等内容供师生参考 (可到北京交通大学出版社网站下载或向作者发 E-mail 索取). 习题新颖，一改传统的解答题风格. 本书以填空题、选择题、计算题和应用题 4 种类型编排，便于教学与自学.

本书内容紧密结合专业要求，站在专业的最前沿，与生产实际紧密相连，与相关专业的市场接轨，渗透专业素质的培养；以介绍成熟、稳定、广泛应用的数学知识为主线，同时介绍新知识、新方法、新技术等，并适当介绍科技发展的趋势，使学生能够适应未来技术进步的需要；与职业培养目标保持一致，增加了市场迫切要求的新知识，使学生在毕业时能够适应企业的要

求；强调用情景真实的“实际问题”，营造现实工作过程中待解决问题的情境；主张用问题启动学生的思维，鼓励学生基于解决问题的学习、基于“实际应用”的学习；通过设计各种情境真实的“实际问题”，开拓学生的创新思维与想象空间；充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接，提高学生的综合素质与能力．

在编写过程中，本书参考了国内已出版的同类教材 (文献 [1-25])，吸收了他们的许多精华和优点，在题材的选取上作了一些变动，适当地增加了一些新内容，有大量翔实的应用实例可供参考，有相当数量的习题可供练习．

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简捷、思路清晰、深入浅出、图文并茂、富有启发性，便于教学与自学．不仅从不同的视角展现了计算机及其相关数学软件在现代数学教学中的作用，更使抽象的数学变得生动直观．基于实际应用是本书的特色，书中引入了百余个应用实例 (还引入了传统意义的例题几十个)，简要地介绍了“概率论”与“数理统计”在国民经济各领域中的实际应用，展示了“概率论”与“数理统计”的强大威力和不可替代的重要地位．

全书由中国数学会会员吕同富教授编写，徐雅玲副教授编写了本书的全部习题和答案．另外还有张志红和胡振华编写了本书部分内容，初东丽副教授提供了部分素材．北京交通大学出版社井飞编辑认真编辑审校了书稿，纠正了书中很多疏漏和不妥．正是由于他们的辛勤劳动和工作使本书得以问世，在此向他们及本书所列参考文献的作者们一并表示衷心的感谢．

本书可作为本科院校非数学专业“概率论与数理统计”课程的教材，也可作为高职高专院校相关专业课程参考用书．

《概率论与数理统计》是数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验．希望广大师生和同仁在使用过程中批评指正，把数学教学改革进一步推向深入．

吕同富
ltongfu@126.com
2014 年 9 月

目　录

第 1 章　随机事件及概率计算

学习目标与要求

1. 理解随机现象及统计规律
2. 理解样本空间的概念，理解随机事件概率的定义
3. 掌握事件的关系运算，掌握概率的加法公式
4. 掌握条件概率与乘法公式，掌握全概率公式
5. 掌握 Bayes 公式，掌握随机事件的独立性

1.1　概率论的起源与发展

概率论于 17 世纪随保险事业的发展而产生. 17 世纪中叶，法国贵族德·美黑在骰子赌博中，由于有事要中途停止赌博，要靠对胜负的预测把赌资进行合理的分配，但不知用什么样的比例分配才算合理，于是写信向当时的法国数学家帕斯卡请教. 帕斯卡和数学家费马一起，研究了德·美黑提出的关于骰子赌博的问题. 1657 年，荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯试图自己解决这一问题，结果写成了《论机会游戏的计算》一书，这是最早有关概率论的著作.

在概率问题的研究中，逐步建立了事件、概率和随机变量等重要概念及它们的基本性质. 后来出现了许多社会问题和工程技术问题，如人口统计、保险理论、天文观测、误差理论、产品检验和质量控制等，这些问题的提出促进了概率论的发展. 从 17 世纪到 19 世纪，贝努利、棣莫弗、拉普拉斯、高斯、泊松、切比雪夫、马尔可夫等著名数学家都对概率论的发展做出了杰出贡献. 概率论的奠基人贝努利，在概率论的第一本专著《推测术》(1713 年)中证明了“大数定律”，后来柯尔莫哥洛夫在《概率论的基本概念》(1933 年)中定义了公理化结构.

现在概率论在工程技术、社会学科、近代物理、自动控制、地震预报、气象预报、产品质量控制、农业试验、经济金融和管理科学等都有广泛应用.

1.2 随机事件及运算

1.2.1 随机事件的概念

1. 随机现象及统计规律

在自然界和人类社会中，人们观察到的现象各种各样．有一类现象是**确定现象**，在一定条件下必然发生，如在一个标准大气压下给水加热到 100℃ 便会沸腾，向上抛一个石子必然下落等．另一类现象是**随机现象**，如以同样的方式重复抛掷同一枚均匀硬币，其每次抛掷的结果可能是正面向上也可能反面向上，并且在每次抛掷之前无法确定抛掷的结果是什么；在同一工艺条件下生产出的灯泡，其寿命长短参差不齐；一批新产品投放市场，可能畅销也可能滞销；某科研工作可能成功也可能失败；射击运动员用同一支枪向同一目标射击，无论怎样控制设计条件不变，每次弹着点总不尽相同等．尽管随机现象在一次或几次观察或试验中，其结果呈现出不确定性，但在相同条件下大量重复的观察或试验中却往往呈现出明显的数量规律．例如，多次重复抛掷同一枚均匀硬币，出现正面向上的次数，随着投掷次数的增加逐渐趋近于 $\frac{1}{2}$；同一工艺条件下生产出的灯泡平均寿命会趋近一个固定的值；同一支枪射击同一目标的弹着点按一定规律分布．我们把这种在相同条件下进行大量重复试验，随机现象所呈现的规律性称为随机现象的**统计规律**．

2. 随机试验

随机试验是一个概率论的基本概念．

> **定义 1.1 随机试验**
>
> 符合下面三个特点的试验叫做**随机试验** (random experiment)：
>
> (1) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先知道试验的所有可能结果；
>
> (2) 进行一次试验之前无法确定哪一个结果会出现；
>
> (3) 可以在同一条件下重复进行试验．

可以根据以下示例进行理解．

例 1.1 E_1：抛掷一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况．

E_2：抛掷一颗骰子，观察出现的点数．

E_3：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度．

3. 随机事件

> **定义 1.2 随机事件**
>
> 在概率论中，试验的结果称为**事件**．每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件叫做**随机事件**，简称事件．随机事件通常用大写英文字母 A, B, C 等表示．

例 1.2 “掷一枚硬币，观察正反哪一面向上”，$A=\{$正面向上$\}$，$B=\{$反面向上$\}$ 均为随机事件．

值得注意的是，有的事件简单，有的事件复杂．简单事件是试验的最基本的可能结果，是不能再分解的事件．复杂事件是由若干简单事件组成，当且仅当组成它的简单事件之一发生时它才发生．我们把这两类事件分别称为基本事件和复合事件．

定义 1.3　基本事件、复合事件

不可能再分解的事件称为**基本事件**．由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**．

为了方便起见再定义两种特殊的事件：必然事件；不可能事件．

定义 1.4　必然事件、不可能事件

在一定条件下必然发生的事件称为**必然事件**．在一定条件下必然不能发生的事件称为**不可能事件**．

4．**样本空间**

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的．为此，引入样本空间和样本点的概念．

定义 1.5　样本空间、样本点

将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω．样本空间的元素，即 E 的每个可能的结果称为**样本点**，记为 ω．

1.2.2　随机事件的关系及运算

1．**包含关系**

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A(或称事件 A 包含于事件 B)，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$．

例 1.3　在掷骰子试验中，$A=${点数为 2}，$B=${点数为偶数}，则 $B \supset A$ 或 $A \subset B$．

2．**相等关系**

若 $B \supset A$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$．

例 1.4　在掷骰子试验中，$A=${点数为 2}，$C=${点数为小于 3 的偶数}，则 $A=C$．

3．**事件的和 (并)**

A 与 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的和 (并)，记为 $A+B$ 或 $A \cup B$．

例 1.5　在掷骰子试验中，$A=${点数为 2}，$D=${点数为 1}，则 $A+D=${点数小于 3}．

4．**事件的积 (交)**

A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积 (交)，记为 AB 或 $A \cap B$．

如在掷骰子试验中，$A=${点数为偶数}，$B=${点数小于 4}，则 $AB=${点数为 2}．

5．**事件的差**

A 发生 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$．一般地，$A-B \neq B-A$．

例 1.6 在掷骰子试验中，B ={点数为偶数}，E ={点数小于 4}，则 $B-E$ ={点数为 4 或 6}，而 $E-B$ ={点数为 1 或 3}.

6. **互不相容事件 (互斥事件)**

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容.

例 1.7 在掷骰子试验中，B={点数为偶数}，D={点数为 1} 为互不相容事件.

7. **逆事件 (对立事件)**

若事件 A 与 B 不能同时发生，且至少一个必然发生，即 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件 (或互为对立事件)，记为 $B=\overline{A}$，或 $A=\overline{B}$.

例 1.8 在掷一枚硬币的试验中，A ={正面向上}，B ={反面向上} 互为逆事件，满足 $B=\overline{A}$，或 $A=\overline{B}$.

8. **完备事件组 (样本空间的划分)**

若事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 两两互不相容，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则称事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 构成一个完备事件组.

容易验证事件满足下列运算法则.

定理 1.1 随机事件的运算法则

(1) 交换律：　$A+B=B+A$，$AB=BA$;

(2) 结合律：　$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律：　$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$;

(4) 对偶公式：　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

例 1.9 现从含有 5 件次品的 100 件产品中任取 3 件进行检验. 记 A_i ={三件中恰有 i 件次品}$(i=1,2,3)$，试用 $A_i(i=1,2,3)$ 或其逆事件表示下列事件：A={三件中至少有一件次品}，B={三件中至少有两件次品}，C={三件都是合格品}.

解 由题意分析得

$$A=A_1+A_2+A_3, B=A_2+A_3, C=\overline{A_1+A_2+A_3}=\overline{A}.$$

1.3 随机事件的概率

人们研究随机现象，不仅要知道它可能出现哪些事件，更希望知道事件发生的可能性大小，这就需要一个刻画事件发生可能性大小的度量指标，这种度量应能反映随机现象所呈现的统计规律性，我们称这个刻画事件发生可能性大小的度量指标为事件发生的概率.

1.3.1 概率的定义及计算

1. **概率的古典定义**

这一定义是针对古典概型给出的，也是最早的概率定义.

定义 1.6 古典概型

若随机试验 E 具有如下特征.

(1) 有限性：试验的样本空间只包括有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.

(2) 等可能：试验中每个基本事件发生的可能性相等.

则称 E 为**古典概型** (也称**等可能概型**).

定义 1.7 概率的古典定义

设古典概型 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$ 为 E 的任一事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{组成}A\text{的基本事件数}}{\text{总的基本事件数}}=\frac{k}{n}, \tag{1.1}$$

并称此概率为**古典概率**.

古典定义中的“古典”表明了这种定义起源的古老，它源于赌博. 博弈的形式多种多样，但是它们的前提是“公平”，即“机会均等”，而这正是古典定义适用的重要条件：同等可能. 16 世纪意大利数学家和赌博家卡尔丹 (1501—1576)所说的“诚实的骰子”，即道明了这一点. 在卡尔丹以后约三百年的时间里，帕斯卡、费马、伯努利等数学家都在古典概率的计算、公式推导和扩大应用等方面做了重要的工作. 直到 1812 年，法国数学家拉普拉斯 (1749—1827)在《概率的分析理论》中给出概率的古典定义：事件 A 的概率等于一次试验中事件 A 的可能结果数与该事件中所有可能结果数之比.

实际问题 1.1 产品为正品的概率

一批产品共有 30 件，其中有正品 23 件、次品 7 件，今从中任取 5 件. 求取出的 5 件产品中恰好有 2 件次品的概率.

解 设 $A=\{$任取的5件产品中恰有2件是次品$\}$，题设的抽取方法是“在 30 件产品中任意取 5 件”，不考虑顺序，故基本事件总数为 C_{30}^5，事件 A 包含的基本事件数为 $m=\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3$，于是所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3}{\mathrm{C}_{30}^5}\approx 0.261\,0.$$

实际问题 1.2 超几何分布概率 (一般结果)

一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品，今从这批产品中任取 n 件. 求这 n 件产品中恰好有 k 件次品的概率.

解 设 $A=\{$任取的n件产品中恰有k件次品$\}$，易知样本空间样本点数为 C_N^n，对于事件 A，这 n 件产品中的 k 件次品只能在 M 件次品中抽取，有 C_M^k 种取法，剩下的 $n-k$ 件正品只能在 $N-M$ 件正品中抽取，有 C_{N-M}^{n-k} 种取法，故事件 A 包含的样本点数为 $\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}$，于是

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n},\quad k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}. \tag{1.2}$$

式(1.2)称为**超几何分布**的概率公式.

实际问题 1.3　3 件产品的概率

一批产品共有 42 件，其中有一等品 15 件，二等品 14 件，3 等品 13 件，今从这批产品中一次任取 3 件 (取后不放回). 求这 3 件产品分属下列情形的概率：(1) $A=\{$3件产品都是一等品$\}$，(2) $B=\{$3件产品等级相同$\}$，(3) $C=\{$3件产品等级不相同$\}$.

解 (1) 由于 A 事件 3 件产品都是一等品，故事件 A 的基本事件数为 $M_A=\mathrm{C}_{15}^3$，故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{15}^3}{\mathrm{C}_{42}^3};$$

(2) 由于 B 事件 3 件产品等级相同，故事件 B 的基本事件数为 $M_B=\mathrm{C}_{15}^3+\mathrm{C}_{14}^3+\mathrm{C}_{13}^3$，故

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_{15}^3+\mathrm{C}_{14}^3+\mathrm{C}_{13}^3}{C_{42}^3};$$

(3) 由于 C 事件 3 件产品等级不相同，故事件 C 的基本事件数为 $M_C=\mathrm{C}_{15}^1\mathrm{C}_{14}^1\mathrm{C}_{13}^1$，故

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_{15}^1\mathrm{C}_{14}^1\mathrm{C}_{13}^1}{\mathrm{C}_{42}^3}.$$

实际问题 1.4　有放回抽样的概率

沿用实际问题1.1的题设及事件 A 的含义，将"从中任取 5 件"改为"从中任意抽取 5 次，每次取出一件"，试在下列抽取方式下分别求概率 $P(A)$：(1) 每取一件检验后放回，再继续抽取下一件 (有放回抽样)；(2) 每取一件不再放回，再继续抽取下一件 (不放回抽样).

解 (1) 有放回抽样条件下，基本事件总数与重复排列有关，即 $n=30^5$，事件 A 包含的基本事件数为 $m=\mathrm{C}_5^2 7^2 23^3$，故所求的概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_5^2 7^2 23^3}{30^5}.$$

(2) 不放回抽样条件下，基本事件总数与排列有关，即 $n=\mathrm{A}_{30}^5$，事件 A 包含的基本事件数 $m=\mathrm{C}_5^2\mathrm{A}_7^2\mathrm{A}_{23}^3$，故所求的概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{A}_7^2\mathrm{A}_{23}^3}{\mathrm{A}_{30}^5}\approx 0.261\ 0.$$

实际问题1.1与本例中的 (2)小题有相同的结果，这绝非巧合，而是因为两种抽取方法只是

形式上的差别，而实质是一回事，它们在概率计算中被视为等价模式. 今后凡遇到类似情况，一般按实际问题1.1的方法解题，便于理解和计算.

古典定义通过简单明了的方式定义了事件的概率，并给出了简单可行的算法. 它适用的条件有二：一是可能结果总数有限；二是每个结果的出现有同等可能. 其中第二条尤其重要，它是古典概率思想产生的前提.

如何在更多和更复杂的情况下，体现出“同等可能”? 伯努利家族成员做了这项工作，他们将排列组合的理论运用到古典概率中. 用排列（组合）体现同等可能的要求，就是将总数为 $\mathrm{A}(n,k)$ 的各种排列（或总数为 $\mathrm{C}(n,k)$ 的各种组合）看成是等可能的，通常用“随意取”来表达这个意思. 即使如此，古典定义的方法能应用的范围仍然很窄，而且还有数学上的问题.

“应用的狭窄性”促使雅各布 · 伯努利（1654—1705）“寻找另一条途径找到所期待的结果”，这就是他在研究古典概率时的另一重要成果：伯努利大数定律. 这条定律告诉我们“频率具有稳定性”，所以可以“用频率估计概率”，而这也为以后概率的统计定义奠定了思想基础. “古典定义数学上的问题”在贝特朗（1822—1900）悖论中表现得淋漓尽致，它揭示出定义存在的矛盾与含糊之处，这导致拉普拉斯的古典定义受到猛烈批评.

容易验证，古典概率具有如下性质.

定理 1.2 古典概率的性质.

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

2. 概率的几何定义

概率的古典定义要求“基本事件总数有限”，但很多实际问题要突破这个限制，使“基本事件总数无限”，因此便有了概率的几何定义.

定义 1.8 几何概型

设随机试验 E 的样本空间 Ω 可用欧式空间的某一有界区域表示，区域中的任一点都为 E 的样本点，区域可分一维，二维，…，N 维，…，且任一基本事件发生具有等可能性，则称 E 为**几何概型**.

几何概型与古典概型一样具有“等可能性”，由于古典概率定义为“部分”比“全体”，又因为几何概型“部分”与“全体”的可度量性，故易得概率的几何定义.

定义 1.9 概率的几何定义

若几何概型 E 的事件 A 的度量大小为 $\mu(A)$，E 的样本空间 Ω 的度量大小为 $\mu(\Omega)$，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{1.3}$$

并称此概率为**几何概率**.

容易验证，几何概率具有如下性质.

定理 1.3 几何概率的性质.

(1) 非负性：对任意事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$；

(4) 完全可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

实际问题 1.5 会面问题

甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某地会面，并约定先到者等待 15 分钟，过时即可离去. 求两人会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间，则甲、乙两人能够会面的充要条件是：$|x-y| \leqslant 15$，在平面上建立直角坐标系，则 (x, y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形，而可能会面的时间由图1.1 中的影阴部分所表示，于是所求概率为

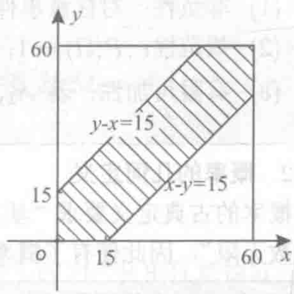

图 1.1

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

实际问题 1.6 等车问题

公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，乘客到达汽车站的任意时刻是等可能的. 求乘客候车时间不超过 3 分钟的概率.

解 以 x 表示乘客到达车站的时刻，每一个试验结果可以表示为 x，假定乘客到达车站后的第一辆公共汽车的时刻为 t，由题意，乘客必然在 $(t-5, t]$ 内到达车站，故样本空间 $\Omega=\{t-5<x \leqslant t\}$，且 Ω 的度量为 $\mu(\Omega)=t-(t-5)=5$，这是一个几何概型问题. 设 $A=\{$乘客候车的时间不超过3分钟$\}$，则可等价表示为 $A=\{x \mid t-3 \leqslant x \leqslant t\}$，且 A 的度量为 $\mu(A)=t-(t-3)=3$，于是所求的概率为