MATHEMATICS 国外经典数学教材译丛

PEARSON

微积分

上册

CALCULUS

威廉·布里格斯（William Briggs）
莱尔·科克伦（Lyle Cochran）／著
伯纳德·吉勒特（Bernard Gillett）

PEARSON

中国人民大学出版社

国外经典数学教材译丛

微积分

上册

CALCULUS

威廉·布里格斯（William Briggs）
莱尔·科克伦（Lyle Cochran）／著
伯纳德·吉勒特（Bernard Gillett）
阳庆节　黄志勇　周泽民　陈　慈／译

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/(美)布里格斯, (美)科克伦, (美)吉勒特著; 阳庆节等译. —北京: 中国人民大学出版社, 2014.6

(国外经典数学教材译丛)

ISBN 978-7-300-18869-0

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①布… ②科… ③吉… ④阳… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 125023 号

国外经典数学教材译丛

微积分(上册)

[美] 威廉·布里格斯, 莱尔·科克伦, 伯纳德·吉勒特 著

阳庆节 黄志勇 周泽民 陈 慈 译

Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http: //www.crup.com.cn		
	http: //www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
规　　格	215mm×275mm　16 开本	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
印　　张	33.75　插页 1	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	890 000	定　　价	75.00 元

前　　言

这本教材为大学微积分课程而写. 其主要对象是主修数学、工程和自然科学的大学本科学生. 编写依据是多年来我们在许多不同学校教授微积分的经验, 我们在教授微积分的过程中使用了所知的最好的教学训练方法.

纵贯全书, 我们用简单、扼要而且新鲜的叙述阐明了微积分思想的来源和动机. 本书的评阅者和试用者都告诉我们, 本书内容与他们讲授的课程是一致的. 我们通过具体的例子、应用及类推, 而不是抽象的论述来引入主题. 借助于学生的直觉和几何天性, 我们使微积分看起来是自然的并且是可信的. 一旦建立了直观基础, 紧接着就是推广和抽象化. 我们在教材中给出了非正式的证明, 但不太显而易见的证明则放在每节的结尾处或附录 B 中.

本书教学特色

习题

每一节后面的习题是本教材最主要的特色之一. 全部习题都按难易程度分级, 题目类型丰富多彩, 其中许多是独创的. 此外, 每个习题都有标题并仔细划分到各个组.

- 每节后面的习题都由 “复习题” 开始, 以检验学生对这一节的基本思想和概念是否理解.
- “基本技能” 中的问题是建立自信的练习, 为接下来更具挑战性的习题打下坚实的基础. 教材中讲述的每个例题都通过题解后面指出的 “相关习题” 与 “基本技能” 中的一批习题相联系.
- “深入探究” 习题拓展了 “基本技能” 习题, 来挑战学生的创新思维和推广新技巧的能力.
- “应用” 习题把前面的习题所发展出来的技能与实际问题和建模问题联系起来, 可以说明微积分的强大威力和作用.
- “附加练习” 一般是最困难、最具挑战性的问题; 包括教材中所引用的结果的证明.

在每一章最后有一组综合性的复习题.

图

考虑到绘图软件的强大功能及许多学生容易理解直观图像, 我们在本教材中用大量篇幅详细地讨论图形. 我们尽可能使用注释让图与基本思想交流, 注释可以使学生回想起教师在黑板上所说的话. 读者将很快发现图是促进学习的新方法.

迅速核查与边注

正文中的“迅速核查”问题作为点缀用来鼓励学生边读边写, 它们就像教师在课堂上提出的一些问题. “迅速核查”问题的答案放在每节的结尾处. 边注则对正文给予提示, 帮助理解和澄清学术要点.

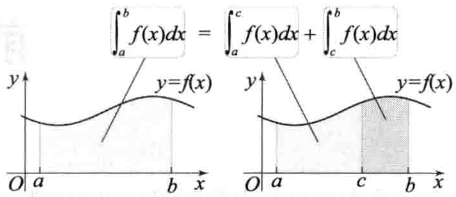


图 5.29

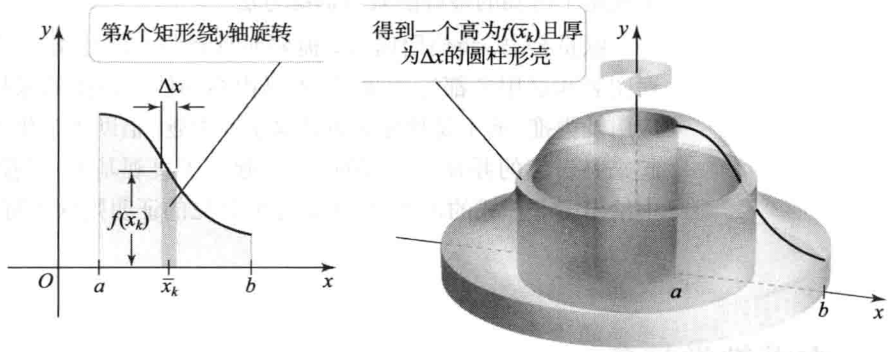


图 6.31

精彩内容

在写这本教材时, 我们发现微积分课程中的一些内容始终困扰着我们的学生. 因此, 我们对这些主题的标准介绍作了一些组织上的改变, 放慢讲述的进度, 以使学生对传统上比较困难的部分容易理解. 值得指出的两个变化概述如下.

在微积分中, 数列和级数极具挑战性, 而且经常是在学期末才学习这部分内容. 我们把这部分内容分为两章, 以更加从容的速度介绍这个主题, 在没有显著增加课时的情况下, 使学生更容易理解和掌握数列和级数.

有一条清晰且合乎逻辑的途径直接通向多元微积分, 但在许多教材中并没有显现出来. 我们小心地将多元函数与向量值函数分开, 目的是使学生意识到这两个概念是不同的. 当这两种思想在最后一章的向量微积分中会合时, 本书到达高潮.

保证正确率

我们在第一版所面临的巨大挑战之一是确保本书的正确率符合高标准, 这也是教师们所期望的. 200 多名数学家复查了原稿的准确性、难易程度及教学有效性. 此外, 在出版之前, 近 1 000 名同学参加了本书的课堂试用. 一个数学家团队在多轮编辑、校对及核对正确性的过程中, 仔细检查了每个例题、习题和图. 从开始到整个发展过程中, 我们的目标是精心地制作一本在数学上准确清晰并且在教学上合理可靠的教材.

致 学 生

我们提供一些建议, 以使读者从本书及微积分课程中得到最大的收获.

1. 多年教授微积分的经验告诉我们, 学习微积分的最大障碍不是微积分中的新概念, 这些概念通常都是容易理解的. 学生们遇到的更大的挑战是一些必备能力, 特别是代数和三角. 如果在第 2 章之前能够很好地理解代数和三角函数, 那么你在学习掌握微积分时将会减少许多困难. 利用第 1 章和附录 A 中的内容, 同时复习你的授课老师可能提供的材料, 可使你在开始学习微积分之前具有优秀的必备能力.

2. 一个古老的说法值得重复: 数学不是一个能吸引大量旁观者的运动. 没有人能够期望仅仅通过阅读本书和听课就可以学好微积分. 参与和投入是必须的. 在阅读本书时, 请准备好笔和纸. 边读边在页边空白处作笔记, 并回答 迅速核查的问题. 做习题来学习微积分将比其他任何方法都更加迅速有效.

3. 使用图形计算器和计算机软件是教授和学习微积分的一个主要争议点. 不同的教师对技术的强调是不同的, 所以重要的是了解教师对使用技术的要求, 并尽可能快地掌握这些所要求的技术. 要在使用技术和使用所谓分析, 或者说笔和纸的方法之间平衡. 技术应该用来拓展和检验分析能力, 但不能替代分析能力.

记住这些思想, 现在可以开始微积分的旅行了. 我们希望这会令你们激动兴奋, 就像每次教授微积分时我们都会感到激动兴奋一样.

威廉 • 布里格斯
莱尔 • 科克伦
伯纳德 • 吉勒特

目　录

第1章　函　　数

本章概要 本章的目的是为微积分之旅准备所需要的知识. 在本章中, 将会看到许多在微积分中要用到的函数: 多项式、有理函数、代数函数及三角函数等. (对数函数和指数函数将在第 7 章中介绍.) 必须努力掌握本章中的思想. 以后当出现问题时, 请参考本章.

1.1　函数的回顾

数学是包括字母、词汇和许多法则的一种语言. 如果不熟悉集合的记号、实数直线上的区间、绝对值、直角坐标系或直线与圆的方程, 请参考附录 A. ① 本书从函数的基本概念开始.

在我们的周围, 处处都有数量或**变量**之间的关系. 例如, 消费物价指数随时间变化, 海洋的气温随纬度变化. 这些关系通常可以用称为**函数**的数学对象表示. 微积分研究的是函数, 我们用函数描述周围的世界, 所以微积分是人类探索世界时使用的一种通用语言.

定义　函数

一个函数 f 是一个确定的对应法则, 使得对集合 D 中的每一个值 x 指定一个唯一的值, 记作 $f(x)$. 集合 D 称为这个函数的**定义域**. 当 x 取遍定义域中的所有值时, $f(x)$ 的取值全体称为**值域**(见图 1.1).

如果没有阐明定义域, 我们取使 f 有定义的所有 x 的取值集合为定义域. 我们马上就可以体会到函数的定义域和值域可能由所考虑的问题限定.

伴随定义域的变量称为**自变量**, 属于值域的变量称为**因变量**. 函数 f 的**图像**是 xy- 平面中满足方程 $y=f(x)$ 的所有点 (x,y) 的集合. 函数作用于称为**自变数**的表达式. 例如, 当我们写出 $f(x)$ 时, 表示 x 是自变数. 类似地, 在 $f(2)$ 中 2 是自变数, 在 $f(x^2+4)$ 中 x^2+4 是自变数.

迅速核查 1. 如果 $f(x)=x^2-2x$, 求 $f(-1)$, $f(x^2)$, $f(t)$ 和 $f(p-1)$. ◀

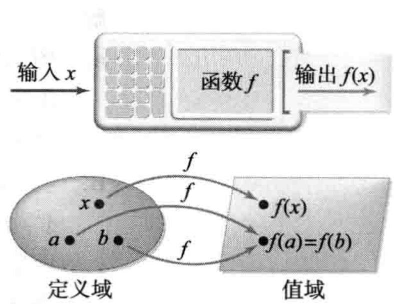


图 1.1

一个函数要求定义域中的每一个值对应于因变量的*唯一*一个值, 这可以用垂直线检验法检验 (见图 1.2).

① 书中提到的附录见相关网站: www.crup.com.cn/jingji.

垂直线检验法

一个图像表示函数当且仅当这个图像可通过**垂直线检验法**: 每条垂直线与图像最多相交一次. 不能通过这个检验的图像不表示函数.

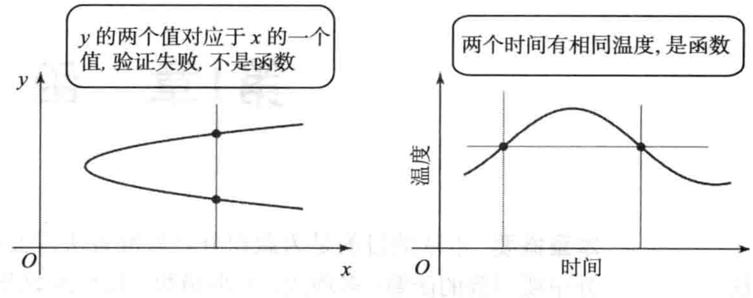


图 1.2

不对应函数的点集或图像也表示变量之间的一个**关系**. 所有函数都是关系, 但并非所有关系都是函数.

例 1　识别函数 指出图 1.3 中的每个图像是否对应一个函数.

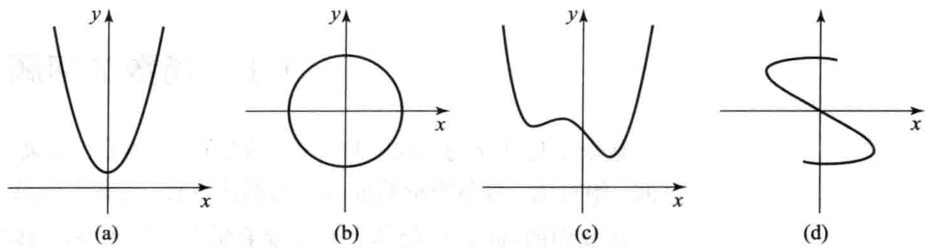


图 1.3

解　垂直线检验法指出只有图像 (a) 和 (c) 表示函数. 在图像 (b) 和 (d) 中, 可以划一条垂直线使其与图像相交多于一次. 等价地, 可以找到 x 的值使其对应的 y 的值多于一个. 因此, 图像 (b) 和 (d) 不能通过垂直线检验, 即它们不表示函数.　*相关习题 11～12* ◀

一个作图窗口 $[a,b]\times[c,d]$ 表示 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$.

例 2　定义域和值域 用绘图工具在指定窗口中作出每个函数的图像. 指出函数的定义域和值域.

a. $y=f(x)=x^2+1;[-3,3]\times[-1,5]$.

b. $z=g(t)=\sqrt{4-t^2};[-3,3]\times[-1,3]$.

c. $w=h(u)=\dfrac{1}{u-1};[-3,5]\times[-4,4]$.

解

a. 图 1.4 显示 $f(x)=x^2+1$ 的图像. 因为 f 对 x 的所有值有定义, 所以它的定义域是全体实数集合 $(-\infty,\infty)$, 或 $\mathbf{R}$. 由于对所有 x, $x^2\geqslant 0$, 得 $x^2+1\geqslant 1$, 故 f 的值域是 $[1,\infty)$.

b. 当 n 是偶数时, 只要根号下的值非负, 包含 n 次根号的函数就有定义. 在本题中, 只要 $4-t^2\geqslant 0$ 即 $t^2\leqslant 4$, 或 $-2\leqslant t\leqslant 2$, 函数 g 就有定义. 因此, g 的定义域是 $[-2,2]$. 由平方根的定义, 值域只包含非负数. 当 $t=0$ 时, z 达到其最大值 $g(0)=\sqrt{4}=2$, 且当 $t=\pm 2$ 时, z 达到其最小值 $g(\pm 2)=0$. 因此, g 的值域是 $[0,2]$ (见图 1.5).

c. 函数 h 在 $u=1$ 处没有定义, 所以其定义域是 $\{u:u\neq 1\}$ 且其图像不包括 $u=1$ 对应的点. 可以看到, w 取除 0 外的所有值, 因此, 值域是 $\{w:w\neq 0\}$. 如果绘图工具显示了垂直线 $u=1$ 作为图像的一部分, 那么它不能正确地表示这个函数 (见图 1.6).

相关习题 13～18 ◀

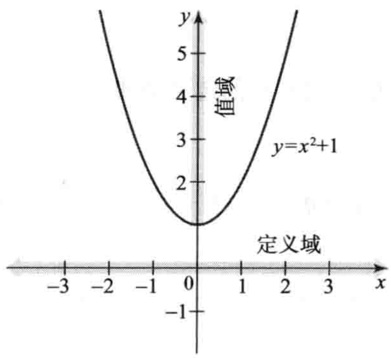


图 1.4

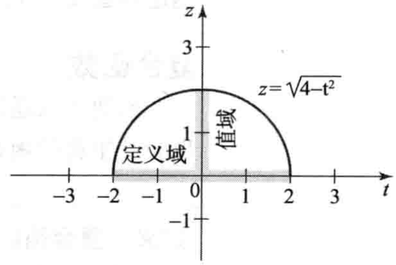


图 1.5

图 1.6 中的垂直虚线 $u=1$ 指出当 u 趋于 1 时, $w=h(u)$ 的图像趋于一条*垂直渐近线*, 并且当 u 接近 1 时, w 的绝对值变大. 垂直渐近线和水平渐近线将在第 2 章详细讨论.

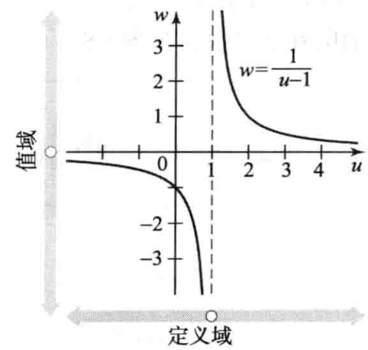


图 1.6

例 3 文字问题中的定义域与值域 在时间 $t=0$ 时, 从地面以 30m/s 的速度垂直向上投掷一个石块. 它距地面以米计的高度 (在忽略空气阻力的条件下) 近似地等于函数 $h=f(t)=30t-5t^2$. 对这个特殊问题, 求函数的定义域和值域.

解 虽然 f 对所有 t 都有定义, 但我们只考虑从投掷石块 ($t=0$) 到石块撞击地面这段时间. 解方程 $h=30t-5t^2=0$, 我们求得

$$\begin{aligned}
30t-5t^2&=0 \\
5t(6-t)&=0 && \text{(分解因式)} \\
5t=0 \quad \text{或} \quad 6-t&=0 && \text{(让每个因式为 0)} \\
t=0 \quad \text{或} \quad t&=6. && \text{(解)}
\end{aligned}$$

因此, 石块在 $t=0$ 时离开地面, 在 $t=6$ 时返回地面. 一个适合所考虑问题情形的定义域是 $\{t: 0 \leqslant t \leqslant 6\}$. 值域由 t 取遍 $[0,6]$ 时 $h=30t-5t^2$ 的所有值组成. h 的最大值发生在石块达到其最高点 $t=3\,\mathrm{s}$ 时, 即 $h=f(3)=45\,\mathrm{m}$. 所以, 值域是 $[0,45]$. 这些结论可以由高度函数的图像 (见图 1.7) 证实. 需要注意的是, 这个图像不是石块的轨道; 石块是垂直运动的.

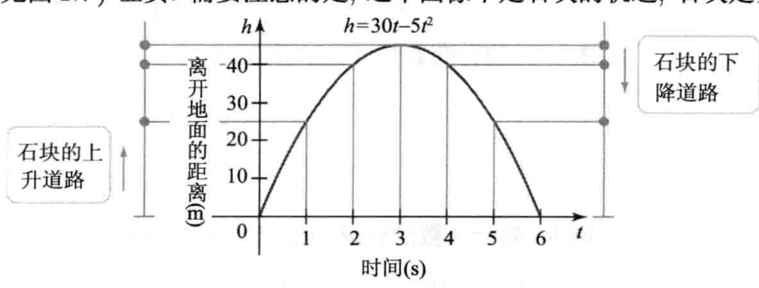


图 1.7

相关习题 19～20 ◂

迅速核查 2. $f(x)=(x^2+1)^{-1}$ 的定义域和值域是什么? ◂

复合函数

函数可以通过和 $(f+g)$, 差 $(f-g)$, 积 (fg), 或商 (f/g) 组合得到. 所谓复合的过程也会产生新的函数.

在复合函数 $y=f(g(x))$ 中, f 称为*外函数*, g 称为*内函数*.

> **定义　复合函数**
>
> 给定两个函数 f 和 g, 复合函数 $f\circ g$ 由 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 定义. 通过两步赋值: $y=f(u)$, 其中 $u=g(x)$. $f\circ g$ 的定义域由 g 的定义域内的使 $u=g(x)$ 在 f 的定义域内的所有 x 组成 (见图 1.8).

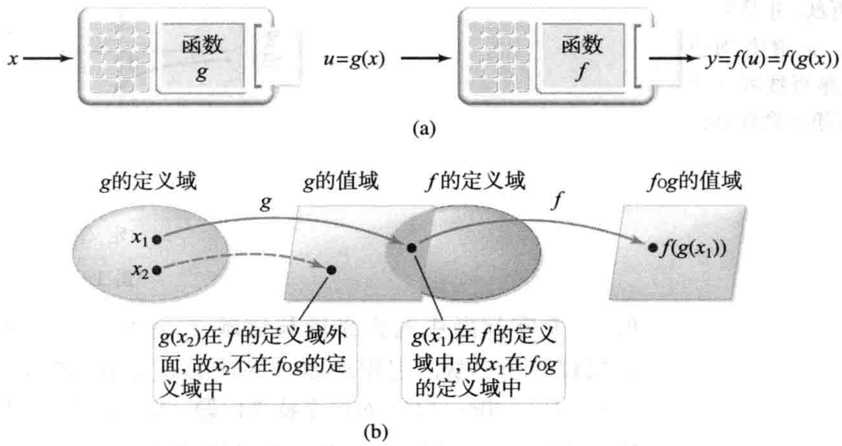


图 1.8

例 4　复合函数与记号 设 $f(x)=3x^2-x$, $g(x)=1/x$. 化简下列表达式.

a. $f(5p+1)$.　　**b.** $g(1/x)$.　　**c.** $f(g(x))$.　　**d.** $g(f(x))$.

解　在每一种情况中, 函数作用在其自变数上.

a.　f 的自变数是 $5p+1$, 所以

$$f(5p+1)=3(5p+1)^2-(5p+1)=75p^2+25p+2.$$

b.　因为 g 的取值是自变数的倒数, 所以我们取 $1/x$ 的倒数, 得 $g(1/x)=1/(1/x)=x$.

c.　f 的自变数是 $g(x)$, 所以

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=3\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3-x}{x^2}.$$

d.　g 的自变数是 $f(x)$, 所以

$$g(f(x))=g(3x^2-x)=\frac{1}{3x^2-x}.$$

相关习题 21～30 ◂

例 5　复合函数的分解 找出下列复合函数可能的内函数和外函数. 确定复合函数的定义域.

a. $h(x)=\sqrt{9x-x^2}$.　　**b.** $h(x)=\dfrac{2}{(x^2-1)^3}$.

解

a. 一个明显的外函数是 $f(x)=\sqrt{x}$, 它作用在内函数 $g(x)=9x-x^2$ 上. 因此, h 可以表示为 $h=f\circ g$ 或 $h(x)=f(g(x))$. $f\circ g$ 的定义域由满足 $9x-x^2\geqslant 0$ 的所有 x 构成. 解这个不等式, 得 $\{x:0\leqslant x\leqslant 9\}$ 是 $f\circ g$ 的定义域.

b. 选择一个外函数为 $f(x)=2/x^3=2x^{-3}$, 它作用在内函数 $g(x)=x^2-1$ 上. 因此, h 可以表示为 $h=f\circ g$ 或 $h(x)=f(g(x))$. $f\circ g$ 的定义域包括使 $g(x)\neq 0$ 的所有 x 值[此处 x 原文误为 $g(x)$—— 译者注], 即 $\{x:x\neq\pm 1\}$.

相关习题 31～34 ◀

例 6 更多的复合函数 给定 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 和 $g(x)=x^2-x-6$, 求 (a) $g\circ f$ 和 (b) $g\circ g$, 以及它们的定义域.

解

a. 我们有

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)})^2-\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f(x)}-6=x^{2/3}-x^{1/3}-6.$$

因为 f 和 g 的定义域都是 $(-\infty,\infty)$, 所以 $f\circ g$ 的定义域也是 $(-\infty,\infty)$.

b. 这种情况是两个多项式的复合:

$$\begin{aligned}(g\circ g)(x)&=g(g(x))=g(x^2-x-6)\\&=(\underbrace{x^2-x-6}_{g(x)})^2-(\underbrace{x^2-x-6}_{g(x)})-6\\&=x^4-2x^3-12x^2+13x+36\end{aligned}$$

两个多项式复合的定义域是 $(-\infty,\infty)$.

迅速核查 3. 设 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^2$, 求 $f\circ g$ 及 $g\circ f$. ◀

相关习题 35～44 ◀

例 7 用图像给复合函数赋值 用图 1.9 中 f 和 g 的图像求下列值.

a. $f(g(5))$. **b.** $f(g(3))$. **c.** $g(f(3))$. **d.** $f(f(4))$.

解

a. 根据图像, $g(5)=1$ 和 $f(1)=6$, 得 $f(g(5))=f(1)=6$.

b. 从图像知, $g(3)=4$ 和 $f(4)=8$, 于是 $f(g(3))=f(4)=8$.

c. 可见, $g(f(3))=g(5)=1$. 注意 $f(g(3))\neq g(f(3))$.

d. 在这种情况下, $f(\underbrace{f(4)}_{8})=f(8)=6$.

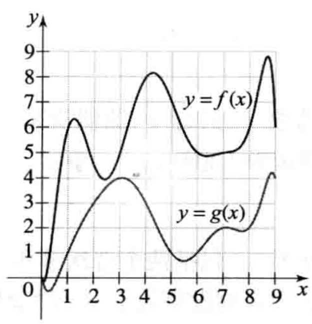


图 1.9

相关习题 45～46 ◀

对称性

对称一词在数学中有许多含义. 这里我们考虑图像的对称性及其表示的关系. 利用对称性可以节省时间并深刻地理解所讨论的问题.

定义　图像的对称性

如果当点 (x,y) 在一个图像上时点 $(-x,y)$ 也在这个图像上, 那么这个图像**关于 y - 轴对称**. 这个性质的意义是当图像对 y - 轴作反射时, 图像不变 (见图 1.10(a)).

如果当点 (x,y) 在一个图像上时点 $(x,-y)$ 也在这个图像上, 那么这个图像**关于 x - 轴对称**. 这个性质的意义是当图像对 x - 轴作反射时, 图像不变 (见图 1.10(b)).

如果当点 (x,y) 在图像上时点 $(-x,-y)$ 也在这个图像上, 那么这个图像**关于原点对称**(见图 1.10(c)). 既关于 x - 轴对称也关于 y - 轴对称的图像关于原点对称, 但反之不然.

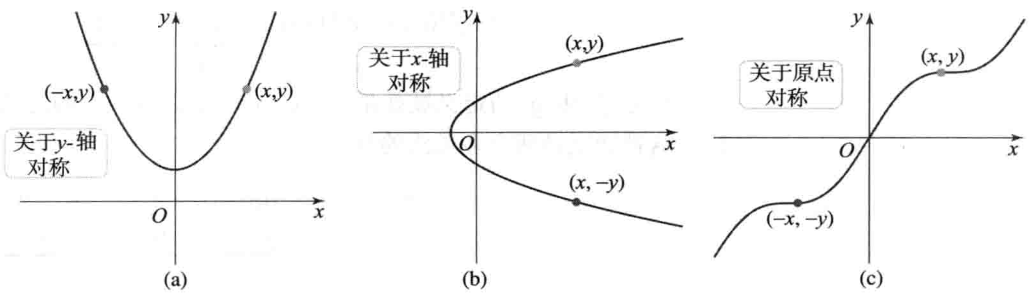


图 1.10

定义　函数的对称性

偶函数 f 具有性质: $f(-x)=f(x)$ 对于定义域中的所有 x 成立. 偶函数的图像关于 y - 轴对称. 只有偶次幂 (x^{2n} 的形式, 其中 n 是非负整数) 的多项式是偶函数.

奇函数 f 具有性质: $f(-x)=-f(x)$ 对于定义域中的所有 x 成立. 奇函数的图像关于原点对称. 只有奇次幂 (x^{2n+1} 的形式, 其中 n 是非负整数) 的多项式是奇函数.

迅速核查 4. 解释为什么非零函数的图像不能关于 x - 轴对称. ◄

例 8　识别函数的对称性 确认下列函数的对称性.

a. $f(x)=x^4-2x^2-20$.　　**b.** $g(x)=x^3-3x+1$.　　**c.** $h(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$.

解

a. 函数 f 只有 x 的偶次幂 (其中 $20=20\cdot 1=20x^0$, x^0 被认定为偶次幂). 因此, f 是偶函数 (见图 1.11). 事实上, 可以通过证明 $f(-x)=f(x)$ 来验证:

$$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2-20=x^4-2x^2-20=f(x).$$

b. 函数 g 包括两个奇次幂和一个偶次幂 (同样, $1=x^0$ 被认定为偶次幂). 因此, 我们认为这个函数没有关于 y - 轴或原点的对称性 (见图 1.12). 注意到

$$g(-x)=(-x)^3-3(-x)+1=-x^3+3x+1,$$

故 $g(-x)$ 既不等于 $g(x)$ 又不等于 $-g(x)$, 这个函数没有对称性.

c. 这种情况下, h 是奇函数 $f(x)=1/x$ 与奇函数 $g(x)=x^3-x$ 的复合. 注意

$$h(-x)=\frac{1}{(-x)^3-(-x)}=-\frac{1}{x^3-x}=-h(x).$$

因为 $h(-x)=-h(x)$, 所以 h 是奇函数 (见图 1.13).

在习题 65 ~ 71 中将考虑偶函数和奇函数的复合函数的对称性.

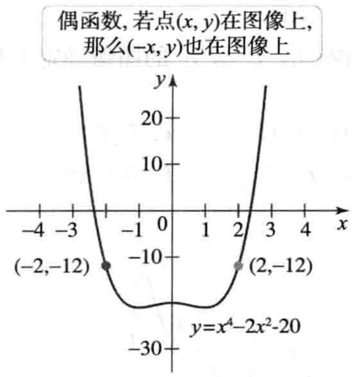


图 1.11

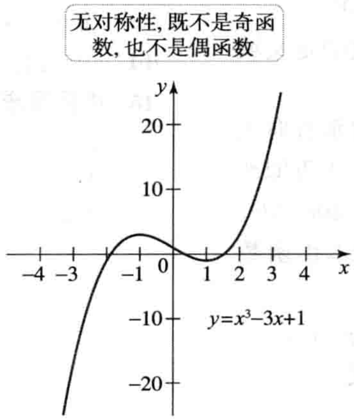


图 1.12

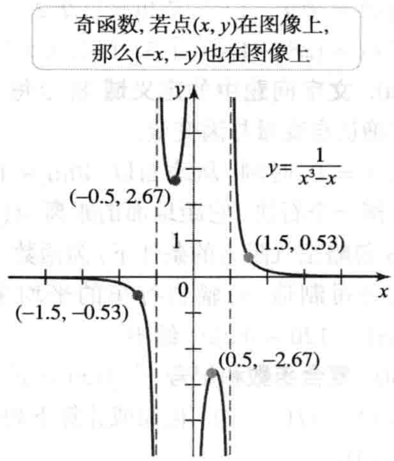


图 1.13

相关习题 47 ~ 54 ◀

1.1 节 习题

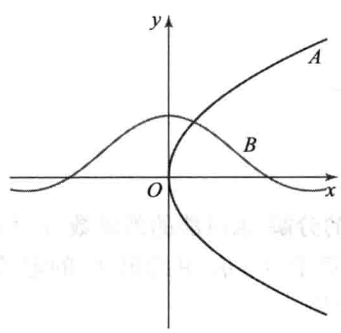
复习题

1. 用定义域、值域、自变量和因变量等术语解释函数是怎样给出一个变量与另一个变量的关系的.
2. 一个函数的自变量是否属于其定义域或值域? 因变量是否属于定义域或值域?
3. 解释如何用垂直线检验法检测函数.
4. 如果 $f(x)=1/(x^3+1)$, 那么 $f(2)$ 等于什么? $f(y^2)$ 等于什么?
5. 下列关于函数的命题哪一个是正确的? (i) 定义域中 x 的每个值对应 y 的一个值; (ii) 值域中 y 的每个值对应 x 的一个值. 解释理由.
6. 若 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $g(x)=x^3-2$, 求复合函数 $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ 和 $g\circ g$.
7. 若 $f(\pm2)=2, g(\pm2)=-2$, 计算 $f(g(2))$ 和 $g(f(-2))$ 的值.
8. 已知 f 与 g 的定义域和值域, 解释如何确定 $f\circ g$ 的定义域.
9. 作一个偶函数的图像并给出函数的定义性质.
10. 作一个奇函数的图像并给出函数的定义性质.

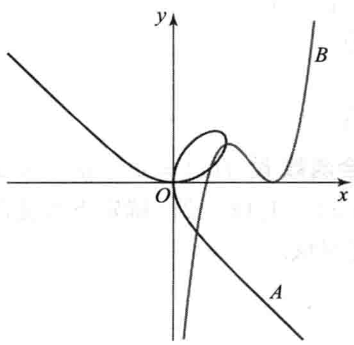
基本技能

11 ~ 12. 垂直线检验法 判断图像 A 和图像 B 是否表示函数.

11.



12.



13 ~ 18. 定义域和值域 用绘图工具在指定窗口中作函数的图像, 并指出函数的定义域与值域.

13. $f(x)=3x^4-10$; $[-2,2]\times[-10,15]$.

14. $g(y) = \dfrac{y+1}{y^2-y-6}$; $[-4,6] \times [-3,3]$.

15. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $[-4,4] \times [-4,4]$.

16. $F(w) = \sqrt[4]{2-w}$; $[-3,2] \times [0,2]$.

17. $h(u) = \sqrt[3]{u-1}$; $[-7,9] \times [-2,2]$.

18. $g(x) = (x^2-4)\sqrt{x+5}$; $[-5,5] \times [-10,50]$.

19～20. 文字问题中的定义域 确定每个函数的定义域并确认自变量与因变量.

19. 在 $t=0$ 时刻, 从地面以 40m/s 的速度垂直向上投掷一个石块. 它距地面的距离 d (单位: m) 近似地 (在忽略空气阻力的条件下) 为函数 $f(t) = 40t - 5t^2$.

20. 某公司制造 n 辆自行车的平均生产成本由函数 $c(n) = 120 - 0.25n$ 给出.

21～30. 复合函数和记号 设 $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^3$, $F(x) = 1/(x-3)$. 化简或计算下列表达式.

21. $f(10)$.

22. $f(p^2)$.

23. $g(1/z)$.

24. $F(y^4)$.

25. $F(g(y))$.

26. $f(g(w))$.

27. $g(f(u))$.

28. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

29. $F(F(x))$.

30. $g(F(f(x)))$.

31～34. 复合函数的分解 求可能的外函数 f 和内函数 g 使得函数 h 等于 $f \circ g$, 并给出 h 的定义域.

31. $h(x) = (x^3-5)^{10}$.

32. $h(x) = 2/(x^6+x^2+1)^2$.

33. $h(x) = \sqrt{x^4+2}$.

34. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3-1}}$.

35～40. 更多的复合函数 设 $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 4$, $F(x) = \sqrt{x}$, $G(x) = 1/(x-2)$. 确定下列复合函数, 并指出它们的定义域.

35. $f \circ g$.

36. $g \circ f$.

37. $f \circ G$.

38. $f \circ g \circ G$.

39. $G \circ g \circ f$.

40. $F \circ g \circ g$.

41～44. 缺失部分 设 $g(x) = x^2 + 3$. 求函数 f 使之与 g 构成给定的复合函数.

41. $(f \circ g)(x) = x^4 + 6x^2 + 9$.

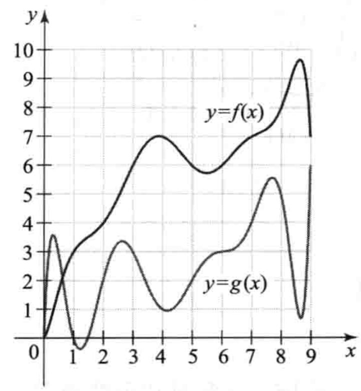
42. $(f \circ g)(x) = x^4 + 6x^2 + 20$.

43. $(g \circ f)(x) = x^4 + 3$.

44. $(g \circ f)(x) = x^{2/3} + 3$.

45. **由图像求复合函数** 用 f 与 g 的图像确定下列函数值.

a. $f(g(2))$; **b.** $g(f(2))$; **c.** $f(g(4))$;
d. $g(f(5))$; **e.** $f(g(7))$; **f.** $f(f(8))$.



46. **由图表求复合函数** 利用图表计算下列复合函数的函数值.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	0	-1	-3	-1
$g(x)$	-1	0	2	3	4	5
$h(x)$	0	-1	0	3	0	4

a. $h(g(0))$; **b.** $g(f(4))$; **c.** $h(h(0))$;
d. $g(h(f(4)))$; **e.** $f(f(f(1)))$; **f.** $h(h(h(0)))$;
g. $f(h(g(2)))$; **h.** $g(f(h(4)))$; **i.** $g(g(g(1)))$;
j. $f(f(h(3)))$.

47～52. 对称性 确定下列方程或函数的图像是否关于 x-轴对称, 关于 y-轴对称, 或关于原点对称. 作图核对结论.

47. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 12$.

48. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x$.

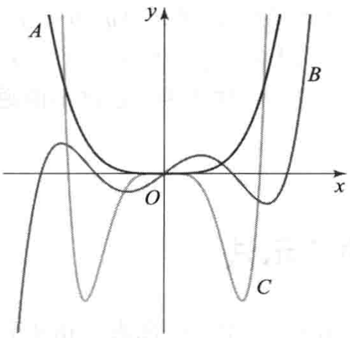
49. $f(x) = x^5 - x^3 - 2$.

50. $f(x) = 2|x|$.

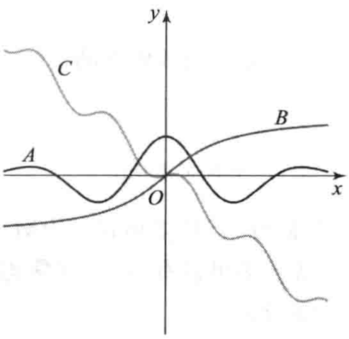
51. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

52. $x^3 - y^5 = 0$.

53. 图像的对称性 确定图中的图像 A, B, C 所表示的函数是否为偶函数, 奇函数, 或两者都不是.



54. 图像的对称性 确定图中的图像 A, B, C 表示的函数是否为偶函数, 奇函数, 或两者都不是.



深入探究

55. 解释为什么是, 或不是 判断下列命题是否正确, 并说明理由或举出反例.

a. $f(x) = 2x - 38$ 的值域是全体实数.

b. 关系 $f(x) = x^6 + 1$ 不是函数, 因为 $f(1) = f(-1) = 2$.

c. 若 $f(x) = x^{-1}$, 则 $f(1/x) = 1/f(x)$.

d. 一般地, $f(f(x)) = (f(x))^2$.

e. 一般地, $f(g(x)) = g(f(x))$.

f. 一般地, $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

g. 若 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $cf(ax)$ 是偶函数, 其中 a 和 c 是实数.

h. 若 $f(x)$ 是奇函数, 那么 $f(x)+d$ 是奇函数, 其中 d 是实数.

i. 若 $f(x)$ 既是偶函数也是奇函数, 那么对所有 x, $f(x) = 0$.

56. 幂函数的值域 用文字或图像解释为什么当 n 是正奇数时, $f(x) = x^n$ 的值域是全体实数; 当 n 是正偶数时, $f(x) = x^n$ 的值域是全体非负实数.

57. 绝对值的图像 根据绝对值函数的定义作方程 $|x| - |y| = 1$ 的图像, 并用绘图工具核对结果.

58. 原点处的奇偶性

a. 如果 $f(0)$ 有定义且 f 是偶函数, 那么 $f(0) = 0$ 一定成立吗? 解释为什么.

b. 如果 $f(0)$ 有定义且 f 是奇函数, 那么 $f(0) = 0$ 一定成立吗? 解释为什么.

59～62. 多项式的复合 确定多项式 f 是否满足下列性质. (*提示*: 先确定 f 的次数, 然后代入一个同次的多项式, 求解其系数.)

59. $f(f(x)) = 9x - 8$.

60. $(f(x))^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

61. $f(f(x)) = x^4 - 12x^2 + 30$.

62. $(f(x))^2 = x^4 - 12x^2 + 36$.

应用

63. 发射火箭 在距地面 80 ft 高的悬崖边上以 96 ft/s 的速度垂直向上发射一枚小型火箭. 它距地面的高度由函数 $h = -16t^2 + 96t + 80$ 确定, 其中 t 表示时间, 以秒计.

a. 假设在 $t = 0$ 时发射火箭, h 的定义域是什么?

b. 作出 h 的图像并确定火箭到达其最高点的时间. 此时的高度是多少?

64. 水箱排水 (托里切利定律) 一个横截面面积为 $100\,\mathrm{cm}^2$ 的直圆柱形水箱充满了 100 cm 深的水. 在 $t = 0$ 时, 水箱底部的一个面积为 $10\,\mathrm{cm}^2$ 的出水孔被打开使水流出. 在 $t \geqslant 0$ 时, 水箱中的水深是 $d(t) = (10 - 2.2t)^2$.

a. 验证 $d(0) = 100$.

b. d 合适的定义域是什么?

c. 何时水箱中的水被排空?

附加练习

65～71. 偶函数与奇函数的组合 设 E 是偶函数, O 是奇函数. 判断下列函数是否有对称性.

65. $E + O$.

66. $E \cdot O$.

67. E/O.

68. $E \circ O$.

69. $E \circ E$.

70. $O \circ O$.

71. $O \circ E$.

72～75. 使用函数记号 考虑下列函数, 化简表达式