

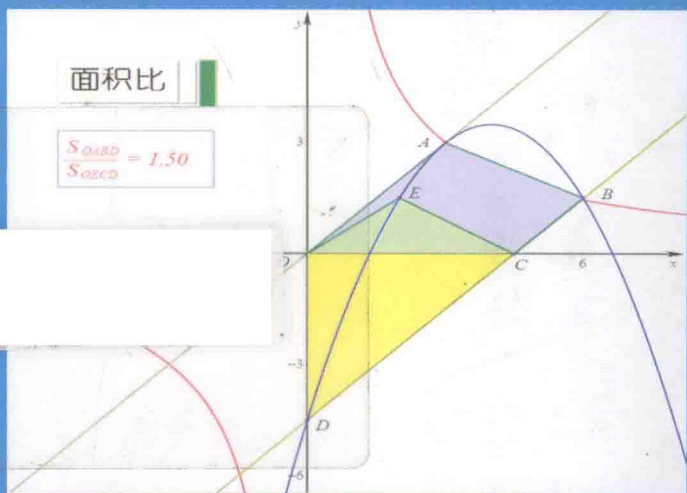
2013



挑战中考数学压轴题

马学斌 舒耀俐 彭翥成 编著

(第六版)



中考数学 压轴题

(第六版)

马学斌 舒耀俐 彭翥成 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战中考数学压轴题/马学斌,舒耀俐,彭翥成编著. —6版.
—上海:华东师范大学出版社,2012.7
ISBN 978-7-5617-9792-1

I. ①挑… II. ①马…②舒…③彭… III. ①中学数学课—
初中—试题—升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 176908 号

本书出版得到

863 探索导向类项目:知识浓缩与融合关键技术研究(编号:2008AA01Z127)的资助

挑战中考数学压轴题(第六版)

编 著 马学斌 舒耀俐 彭翥成
总 策 划 倪 明
项目编辑 舒 刊
组稿编辑 孔令志
审读编辑 李齐会 郜 田 罗秀苹
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克
责任发行 王 祥

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 浙江临安曙光印务有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 19
字 数 439 千字
版 次 2012 年 8 月第六版
印 次 2012 年 8 月第一次
印 数 351401—431400
书 号 ISBN 978-7-5617-9792-1/G·5788
定 价 39.80 元(含光盘)

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

第三版序

——让计算机帮你学数学

把数学变得更容易一些,这是我从上个世纪 70 年代就开始思考的问题.我认为:解决问题的根本就是改造数学本身,为教育的目的改良数学,这也是“教育数学”的来由.“教育数学”的提出,虽然得到很多专家的支持,也取得了不小的成果,但离正式进入中学课堂,还有一段很长的路要走.

治不了本,能治标也好.譬如找一个水平较高的老师,买一本质量可靠的教辅资料……这都是有利于数学学习的.在计算机迅速普及、信息技术高速发展的今天,计算机的辅助作用也不容忽视.

面前的这本《挑战中考数学压轴题》就齐集了上面的三个因素.

本书的写作以及几何画板课件是由马学斌和舒耀俐两位老师完成的.这两位老师长期从事初中教学,教学经验丰富,对压轴题做了很深入的研究.正因为如此,两位老师常被邀请到全国各地讲学,分享成功经验.

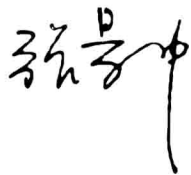
今年本书有一个新亮点,就是增加了配套的超级画板课件.这是由我的助手彭翥成同志完成的.他对数学的认识,对教育的领悟,对技术的掌握,已经远远超出他的年纪.

书中的两套课件,大家可以对照参考使用.本书每年都不断更新,在师生中的口碑极好,已经逐步形成品牌,并持续畅销.

中考数学,题目相对容易,大多数同学的分数都比较高,所谓的区分度很大程度上取决于最后的压轴题.对于基础较好的同学而言,与其把时间浪费在那些简单重复的基础题上,还不如集中精力攻克压轴题.

我对中考压轴题分类是很模糊的,一直认为大致是分为“几何图形的运动问题和带参数的函数问题”两大类吧.但这本书分得更细致,四大类,19 小类,这更有利于大家学习.

本书题目很多,可以有选择性地做.你很快就会发现全国各地的压轴题大同小异,这说明出题人在相互借鉴.我想这种相互借鉴还会延续下去.



2009 年 8 月 6 日

技术让思想更完美

这是一本供初中毕业生复习迎考,研究压轴题,挑战满分的书;

这是一本供初中数学教师通过继续教育学习,研究现代教育技术与中学数学课程整合的参考书;

这是一本用“几何画板”、“超级画板”动态研究中考数学压轴题的书;

这是一本以中考数学压轴题为载体学习“几何画板”、“超级画板”的书;

这是一本初中数学课件资源的素材库.

中考数学压轴题的灵魂是数形结合,数形结合的精髓是函数,函数的核心是运动变化.这本书的最大时尚就在于让读者在图形运动变化的过程中体验、把握、认知数学的美和压轴题的精髓.

全书共分四部分.第一部分为函数图象中点的存在性问题,这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合条件的点.

第二部分为图形运动中的函数关系问题,这部分压轴题的主要特征是在图形运动变化的过程中,探求两个变量之间的函数关系,并根据实际情况探求函数的定义域,进而在一般情形下探求符合条件的特殊性.探求符合条件的特殊性通常和分类讨论思想紧密地联系在一起.

第三部分为图形运动中的计算说理问题,这部分压轴题的主要特征是先给出一个图形进行研究,然后研究图形的位置发生变化后结论是否发生变化,进而进行证明.解决这部分压轴题的关键是抓住图形运动过程中的数据特征和不变关系,通过计算进行说理.

第四部分为图形的平移、翻折与旋转,这部分题目的主要特征是在图形的平移、折叠、旋转等运动变化中寻找不变的量,把握规律,探求关系.另一个主要特征是把图形的对称性与分类讨论思想结合在一起,也就是平常所说的一题多解.

本书收集的压轴题选自2012年上海市和北京市各区县的中考数学模拟题和2011年、2012年全国各地部分省市的中考题.每道压轴题由5个板块组成,首先介绍题目和出处;【动感体验】是这本书的特色,先打开这道题对应的光盘文件,在认真阅读理解题意的基础上,按照提示拖动屏幕上的主动点,在图形运动的过程中把握规律,理解内涵,探求关系;【思路点拨】也是这本书的一个亮点,它通过解读这道压轴题所考查的数学思想和数学方法,挑出解答这道压轴题的突破口,指出这道题目的难点;【满分解答】是比较规范、简练地对这道题目进行解答;【考点伸展】是我们在动态研究压轴题的过程中,对一些题目进行了深入的探讨,对这些题目提出的一点回顾与思考,压轴题作为命题组智慧的浓缩,我们不可能提出有突破性的反思,只是想借用“几何画板”、“超级画板”把智慧延伸一下.更多压轴题的考点伸展我们只是追求形式上的对称,提出了一些常规性的问题.

由于全国各地数学教材版本不同,数学词语的表现有所差别,本书中统一用“连结”、“图

象”等数学词语.

尽管我们对几何画板的研究水平有限,但我们一直在迈着实践的步骤,在此非常感谢全国几何画板的领路人、北京师范大学潘懋德教授和南京师范大学附中特级教师陶维林老师多年来对我们的鼓励和帮助.

这本书多年来受到读者的欢迎并持续畅销.在这个版本中,我们极大地丰富了光盘中的内容,每道题目有三个相同文件的课件,一个是几何画板课件,一个是超级画板课件,还有一个是视频演示课件.本书的文本和几何画板课件由马学斌老师和舒耀俐老师完成,超级画板课件由张景中院士的助手彭翥成老师制作,视频演示课件由马学斌老师制作.

大家在使用本书的过程中有什么问题和建议请随时与我们联系(tzzksxyzt@163.com),以便我们学习和修改.

作 者

2012 年 6 月

目 录

第一部分 函数图象中点的存在性问题

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题	2
例 1 2012 年上海市宝山区中考模拟第 24 题	2
例 2 2012 年上海市杨浦区中考模拟第 24 题	4
例 3 2012 年宁波市中考第 26 题	6
例 4 2012 年天津市中考第 25 题	8
例 5 2012 年湖州市中考第 24 题	10
例 6 2012 年苏州市中考第 29 题	12
例 7 2012 年黄冈市中考第 25 题	14
例 8 2012 年福州市中考第 22 题	16
§ 1.2 因动点产生的等腰三角形问题	18
例 9 2011 年湖州市中考第 24 题	18
例 10 2011 年盐城市中考第 28 题	20
例 11 2012 年扬州市中考第 27 题	23
例 12 2012 年临沂市中考第 26 题	25
§ 1.3 因动点产生的直角三角形问题	27
例 13 2011 年沈阳市中考第 25 题	27
例 14 2011 年温州市中考第 24 题	29
例 15 2011 年浙江省中考第 23 题	31
例 16 2012 年广州市中考第 24 题	32
例 17 2012 年杭州市中考第 22 题	34
§ 1.4 因动点产生的平行四边形问题	36
例 18 2011 年成都市中考第 28 题	36
例 19 2011 年江西省中考第 24 题	38
例 20 2011 年上海市中考第 24 题	40
例 21 2011 年无锡市中考第 27 题	42
例 22 2012 年上海市浦东新区中考模拟第 24 题	44
例 23 2012 年上海市黄浦区中考模拟第 24 题	46
例 24 2012 年福州市中考第 21 题	48
例 25 2012 年烟台市中考第 26 题	50

§ 1.5	因动点产生的梯形问题	52
例 26	2011 年义乌市中考第 24 题	52
例 27	2012 年上海市松江区中考模拟第 24 题	54
例 28	2012 年衢州市中考第 24 题	56
§ 1.6	因动点产生的面积问题	59
例 29	2011 年南通市中考第 28 题	59
例 30	2012 年河南省中考第 23 题	61
例 31	2012 年菏泽市中考第 21 题	63
§ 1.7	因动点产生的相切问题	65
例 32	2012 年上海市长宁区中考模拟第 25 题	65
例 33	2012 年上海市黄浦区中考模拟第 25 题	67
例 34	2012 年上海市浦东新区中考模拟第 25 题	69
例 35	2012 年上海市普陀区中考模拟第 24 题	71
例 36	2012 年上海市杨浦区中考模拟第 25 题	73
例 37	2012 年上海市闸北区中考模拟第 25 题	75
例 38	2012 年河北省中考第 25 题	77
例 39	2012 年无锡市中考第 28 题	78
例 40	2012 年泰州市中考第 27 题	79
§ 1.8	因动点产生的线段和差问题	80
例 41	2011 年福州市中考第 22 题	80
例 42	2011 年菏泽市中考第 21 题	81
例 43	2011 年衢州市中考第 24 题	82
例 44	2011 年嘉兴市中考第 24 题	83
例 45	2012 年滨州市中考第 24 题	86
例 46	2012 年山西省中考第 26 题	87
例 47	2012 年北京市昌平区中考模拟第 24 题	89
例 48	2012 年北京市东城区中考模拟第 25 题	90
例 49	2012 年北京市丰台区中考模拟第 25 题	92
例 50	2012 年北京市密云区中考模拟第 25 题	93

第二部分 图形运动中的函数关系问题

§ 2.1	由比例线段产生的函数关系问题	96
例 1	2011 年上海市中考第 25 题	96
例 2	2012 年上海市奉贤区中考模拟第 25 题	98
例 3	2012 年上海市虹口区中考模拟第 25 题	100
例 4	2012 年上海市静安区中考模拟第 25 题	102
例 5	2012 年上海市普陀区中考模拟第 25 题	104
例 6	2012 年上海市徐汇区中考模拟第 25 题	106
例 7	2012 年连云港市中考第 26 题	109

§ 2.2 由面积公式产生的函数关系问题	111
例 8 2011 年淮安市中考第 28 题	111
例 9 2011 年乐山市中考第 26 题	113
例 10 2011 年聊城市中考第 25 题	115
例 11 2011 年山西省中考第 26 题	117
例 12 2011 年重庆市中考第 26 题	119
例 13 2012 年上海市闵行区中考模拟第 25 题	121
例 14 2012 年上海市金山区中考模拟第 25 题	123
例 15 2012 年上海市松江区中考模拟第 25 题	125
例 16 2012 年广东省中考第 22 题	127
例 17 2012 年河北省中考第 26 题	129
例 18 2012 年淮安市中考第 27 题	131
例 19 2012 年上海市中考第 25 题	133
例 20 2012 年重庆市中考第 26 题	135

第三部分 图形运动中的计算说理问题

§ 3.1 代数计算及通过代数计算进行说理问题	138
例 1 2011 年河北省中考第 26 题	138
例 2 2011 年黄冈市中考第 24 题	140
例 3 2011 年武汉市中考第 25 题	142
例 4 2012 年上海市静安区中考模拟第 24 题	144
例 5 2012 年上海市闵行区中考模拟第 24 题	146
例 6 2012 年北京市石景山区中考模拟第 25 题	148
例 7 2012 年北京市通州区中考模拟第 24 题	149
例 8 2012 年江西省中考第 23 题	150
例 9 2012 年武汉市中考第 25 题	152
例 10 2012 年苏州市中考第 28 题	154
例 11 2012 年盐城市中考第 28 题	156
例 12 2012 年成都市中考第 28 题	159
例 13 2012 年丽水市中考第 23 题	162
例 14 2012 年陕西省中考第 24 题	164
§ 3.2 几何证明及通过几何计算进行说理问题	165
例 15 2011 年北京市中考第 24 题	165
例 16 2011 年北京市中考第 25 题	167
例 17 2011 年宁波市中考第 26 题	170
例 18 2011 年陕西省中考第 25 题	172
例 19 2011 年扬州市中考第 28 题	174
例 20 2011 年浙江省中考第 24 题	176
例 21 2012 年上海市宝山区中考模拟第 25 题	178

例 22	2012 年上海市长宁区中考模拟第 24 题	180
例 23	2012 年上海市金山区中考模拟第 24 题	182
例 24	2012 年上海市闸北区中考模拟第 24 题	184
例 25	2012 年北京市延庆县中考模拟第 25 题	186
例 26	2012 年上海市中考第 24 题	188
例 27	2012 年温州市中考第 24 题	190
例 28	2012 年南通市中考第 28 题	192
例 29	2012 年陕西省中考第 25 题	194
例 30	2012 年绍兴市中考第 24 题	196
例 31	2012 年义乌市中考第 24 题	199
例 32	2012 年抚顺市中考第 25 题	201
例 33	2012 年吉林省中考第 26 题	203
例 34	2012 年沈阳市中考第 25 题	204

第四部分 图形的平移、翻折与旋转

§ 4.1	图形的平移	208
例 1	2011 年陕西省中考第 24 题	208
例 2	2011 年温州市中考第 22 题	209
例 3	2011 年乐山市中考第 7 题	209
例 4	2012 年上海市杨浦区中考模拟第 18 题	210
例 5	2012 年上海市虹口区中考模拟第 18 题	210
§ 4.2	图形的翻折	212
例 6	2011 年南通市中考第 27 题	212
例 7	2011 年威海市中考第 24 题	213
例 8	2012 年上海市静安区中考模拟第 18 题	214
例 9	2012 年北京市平谷区中考模拟第 24 题	214
例 10	2012 年北京市昌平区中考模拟第 25 题	215
§ 4.3	图形的旋转	217
例 11	2011 年安徽省中考第 22 题	217
例 12	2011 年义乌市中考第 23 题	218
例 13	2012 年上海市奉贤区中考模拟第 18 题	219
例 14	2012 年上海市黄浦区中考模拟第 18 题	220
例 15	2012 年上海市金山区中考模拟第 18 题	220
例 16	2012 年北京市朝阳区中考模拟第 25 题	221
例 17	2012 年北京市海淀区中考模拟第 24 题	222
例 18	2012 年北京市怀柔区中考模拟第 24 题	223
例 19	2011 年南京市中考第 14 题	224
例 20	2011 年上海市中考第 18 题	225
例 21	2011 年扬州市中考第 8 题	226

例 22	2011 年盐城市中考第 17 题	226
例 23	2012 年南充市中考第 21 题	227
§ 4.4	三角形	228
例 24	2011 年安徽省中考第 23 题	228
例 25	2011 年大连市中考第 25 题	229
例 26	2011 年广州市中考第 24 题	230
例 27	2011 年广州市中考第 25 题	230
例 28	2011 年南通市中考第 26 题	232
例 29	2011 年衢州市中考第 23 题	233
例 30	2011 年绍兴市中考第 23 题	234
例 31	2011 年泰州市中考第 27 题	235
例 32	2011 年盐城市中考第 27 题	235
例 33	2011 年浙江省中考第 8 题	237
例 34	2011 年义乌市中考第 16 题	237
例 35	2012 年北京市东城区中考模拟第 24 题	238
例 36	2012 年北京市房山区中考模拟第 25 题	239
例 37	2012 年北京市中考第 24 题	241
例 38	2012 年临沂市中考第 25 题	242
例 39	2012 年烟台市中考第 25 题	243
例 40	2012 年义乌市中考第 23 题	244
§ 4.5	四边形	246
例 41	2011 年滨州市中考第 24 题	246
例 42	2011 年东莞市中考第 22 题	246
例 43	2011 年福州市中考第 21 题	247
例 44	2011 年嘉兴市中考第 23 题	249
例 45	2011 年临沂市中考第 25 题	250
例 46	2011 年沈阳市中考第 24 题	251
例 47	2011 年泰州市中考第 28 题	252
例 48	2011 年衢州市中考第 22 题	253
例 49	2011 年泰州市中考第 18 题	254
例 50	2011 年温州市中考第 16 题	254
例 51	2012 年上海市奉贤区中考模拟第 24 题	255
例 52	2012 年上海市杨浦区中考模拟第 23 题	256
例 53	2012 年北京市海淀区中考模拟第 25 题	256
例 54	2012 年北京市石景山区中考模拟第 24 题	257
例 55	2012 年北京市西城区中考模拟第 25 题	258
例 56	2012 年滨州市中考第 25 题	260
例 57	2012 年连云港市中考第 27 题	261

§ 4.6	圆	263
例 58	2011 年南京市中考第 26 题	263
例 59	2011 年镇江市中考第 27 题	263
例 60	2011 年福州市中考第 15 题	264
例 61	2011 年南通市中考第 18 题	265
例 62	2011 年山西省中考第 17 题	266
例 63	2011 年绍兴市中考第 16 题	266
例 64	2011 年苏州市中考第 18 题	267
例 65	2011 年义乌市中考第 13 题	267
例 66	2012 年上海市虹口区中考模拟第 24 题	268
例 67	2012 年南京市中考第 27 题	269
例 68	2012 年宁波市中考第 18 题	270
§ 4.7	函数的图象及性质	271
例 69	2011 年大连市中考第 24 题	271
例 70	2011 年杭州市中考第 23 题	271
例 71	2011 年南京市中考第 28 题	273
例 72	2011 年大连市中考第 16 题	274
例 73	2011 年杭州市中考第 6 题	274
例 74	2011 年金华市中考第 16 题	275
例 75	2011 年宁波市中考第 18 题	276
例 76	2011 年台州市中考第 15 题	276
例 77	2011 年北京市中考第 8 题	277
例 78	2011 年安徽省中考第 10 题	277
例 79	2011 年贵阳市中考第 8 题	278
例 80	2011 年湖州市中考第 10 题	279
例 81	2011 年兰州市中考第 14 题	279
例 82	2011 年威海市中考第 12 题	280
例 83	2012 年北京市昌平区中考模拟第 8 题	281
例 84	2012 年北京市丰台区中考模拟第 8 题	281
例 85	2012 年北京市石景山区中考模拟第 8 题	282
例 86	2012 年北京市顺义区中考模拟第 8 题	283
例 87	2012 年北京市通州区中考模拟第 8 题	284
例 88	2012 年北京市西城区中考模拟第 8 题	284
例 89	2012 年安徽省中考第 9 题	285
例 90	2012 年烟台市中考第 12 题	286
例 91	2012 年温州市中考第 10 题	287
例 92	2012 年北京市中考第 25 题	287
例 93	2012 年福州市中考第 10 题	289
例 94	2012 年黄石市中考第 25 题	290
例 95	2012 年兰州市中考第 20 题	291

第一部分

函数图象中点的存在性问题

这部分压轴题的主要特征是先求函数的解析式,然后在函数的图象上探求符合几何条件的点.

简单一点的题目,就是用待定系数法直接求函数的解析式.

复杂一点的题目,先根据图形给定的数量关系,运用数形结合的思想,求得点的坐标,进而用待定系数法求函数的解析式.

还有一种常见题型,解析式中有待定字母,这个字母可以和根与系数的关系联系起来求解,或者根据题意列出方程组求解.

§ 1.1 因动点产生的相似三角形问题

例 1 2012 年上海市宝山区中考模拟第 24 题

如图 1, 平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(2, 3)$, 线段 AB 垂直于 y 轴, 垂足为 B , 将线段 AB 绕点 A 逆时针方向旋转 90° , 点 B 落在点 C 处, 直线 BC 与 x 轴交于点 D .

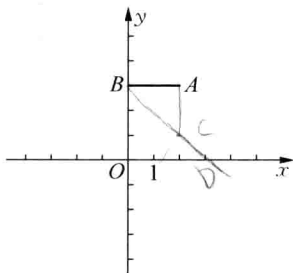


图 1

- (1) 试求出点 D 的坐标;
- (2) 试求经过 A 、 B 、 D 三点的抛物线的表达式, 并写出其顶点 E 的坐标;
- (3) 在(2)中所求抛物线的对称轴上找点 F , 使得以点 A 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ACD$ 相似.



动感体验

请打开几何画板文件“12 宝山 24”, 拖动点 F 在抛物线的对称轴上运动, 可以体验到, 有两个时刻, $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 可以相似.

请打开超级画板文件“12 宝山 24”, 点击动画按钮的左部和中部, 可以体验到, 有两个时刻, $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 可以相似.



思路点拨

1. 要探求 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 是否相似, 应准确地描出点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 的位置, 那么点 F 与点 E 的位置就心中有数了.

2. 按照夹角相等, 对应边成比例, 分两种情况计算 EF 的长度, 从而得到点 F 的坐标.



满分解答

(1) 点 C 的坐标为 $(2, 1)$.

设直线 BC 的表达式为 $y = mx + n$, 代入 $B(0, 3)$ 、 $C(2, 1)$,

$$\text{得} \begin{cases} n = 3, \\ 2m + n = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m = -1, \\ n = 3. \end{cases}$$

所以直线 BC 的表达式为 $y = -x + 3$.

因此直线 BC 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $(3, 0)$.

(2) 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$.

代入 $A(2, 3)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $D(3, 0)$,

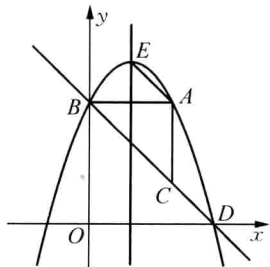


图 2

$$\text{得} \begin{cases} 4a + 2b + c = 3, \\ c = 3, \\ 9a + 3b + c = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 3. \end{cases}$$

所以抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$. 顶点 E 的坐标为 $(1, 4)$.

(3) 如图 3、图 4, 在 $\triangle ACD$ 中, 由 $A(2, 3)$ 、 $C(2, 1)$ 、 $D(3, 0)$, 得 $\angle ACD = 135^\circ$, $CD = \sqrt{2}$, $CA = 2$.

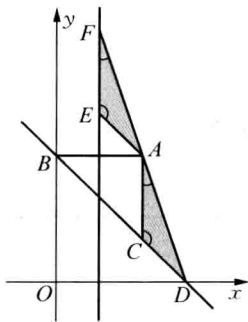


图 3

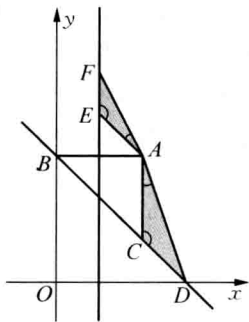


图 4

由 $A(2, 3)$ 、 $E(1, 4)$, 知 $AE = \sqrt{2}$, AE 与抛物线的对称轴的夹角为 45° .

因此要使得 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 相似, 只有点 F 在点 E 的上方时, $\angle AEF = 135^\circ$.

① 如图 3, 当 $\frac{EF}{EA} = \frac{CA}{CD}$ 时, $\frac{EF}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. 所以 $EF = 2$, 此时点 F 的坐标为 $(1, 6)$.

② 如图 4, 当 $\frac{EF}{EA} = \frac{CD}{CA}$ 时, $\frac{EF}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $EF = 1$, 此时点 F 的坐标为 $(1, 5)$.



考点伸展

第(3)题中, 点 F 在抛物线的对称轴上运动时, 如果 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 面积相等, 那么符合条件的点 F 有几个?

因为点 F 与点 D 到直线 AC 的距离相等, 所以 EF 边上的高与 AC 边上的高相等, 因此 $EF = AC = 2$ 时, $\triangle AEF$ 与 $\triangle ACD$ 面积相等. 所以点 F 的坐标为 $(1, 6)$.

例2 2012年上海市杨浦区中考模拟第24题

如图1,已知直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 x 轴交于点 A ,与 y 轴交于点 B ,将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° ,使点 A 落在点 C ,点 B 落在点 D ,抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 A 、 D 、 C ,其对称轴与直线 AB 交于点 P .

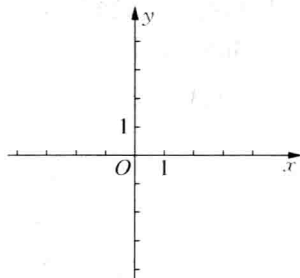


图1

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 求 $\angle POC$ 的正切值;

(3) 点 M 在 x 轴上,且 $\triangle ABM$ 与 $\triangle APD$ 相似,求点 M 的坐标.



动感体验

请打开几何画板文件“12 杨浦 24”,拖动点 M 在 x 轴上运动,可以体验到, $\triangle ABM$ 有两个时刻可以成为钝角等腰三角形,与 $\triangle APD$ 相似.

请打开超级画板文件“12 杨浦 24”,点击动画按钮的左部和中部,可以体验到, $\triangle ABM$ 有两个时刻可以成为钝角等腰三角形,与 $\triangle APD$ 相似.



思路点拨

1. 准确画出直线 AB 和 C 、 D 两点,重新设交点式求抛物线的表达式比较简便.
2. 求出点 P 的坐标是求 $\angle POC$ 的正切值的关键一步.
3. 第(3)题探究 $\triangle ABM$ 与 $\triangle APD$ 相似,要分两种情况讨论.
4. $\triangle APD$ 是钝角等腰三角形,形状是确定的.



满分解答

(1) 如图2,直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$,与 y 轴交于点 $B(0, 1)$.

$\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle COD$,点 C 、 D 的坐标分别为 $(0, 2)$ 、 $(1, 0)$.

因为抛物线与 x 轴交于 A 、 D 两点,设 $y = a(x+2)(x-1)$,代入点 $C(0, 2)$,可得 $a = -1$.

所以抛物线的表达式为 $y = -(x+2)(x-1) = -x^2 - x + 2$.

(2) 抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$,因此点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

如图3,过点 P 作 $PE \perp y$ 轴,垂足为 E ,那么 $\tan \angle POC = \frac{PE}{OE} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$.

(3) 因为 $\triangle APD$ 是钝角等腰三角形,如果 $\triangle ABM$ 与 $\triangle APD$ 相似,那么 $\triangle ABM$ 也是钝

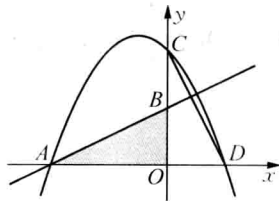


图2

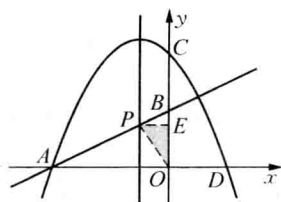


图 3

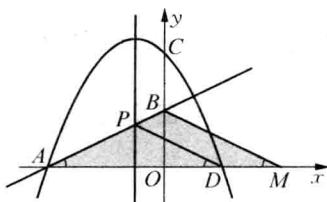


图 4

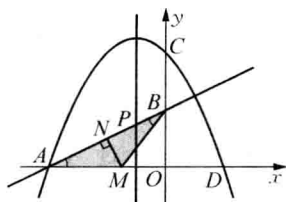


图 5

角等腰三角形,分两种情况:

- ① 如图 4, 当 $BA = BM$ 时, 点 A 与点 M 关于 y 轴对称, 此时点 M 的坐标为 $(2, 0)$.
- ② 如图 5, 当 $MA = MB$ 时, 点 M 在线段 AB 的垂直平分线上, 由

$$\cos \angle A = \frac{AN}{AM} = \frac{AO}{AB},$$

可得

$$AM = \frac{AN \cdot AB}{AO} = \frac{AB^2}{2AO} = \frac{5}{4}.$$

所以 $OM = \frac{3}{4}$, 此时点 M 的坐标为 $(-\frac{3}{4}, 0)$.

考点伸展

第(3)题也可以按照夹角相等, 对应边成比例来分类:

因为 $\triangle ABM$ 与 $\triangle APD$ 有公共角 $\angle A$, 所以分为 $\frac{AP}{AD} = \frac{AB}{AM}$ 和 $\frac{AP}{AD} = \frac{AM}{AB}$ 两种情况, 而

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AB}{2AO} = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ 为定值.}$$

① 当 $\frac{AP}{AD} = \frac{AB}{AM}$ 时, $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{AM}$. 解得 $AM = 4$. 所以 $OM = 2$, $M(2, 0)$, 如图 4.

② 当 $\frac{AP}{AD} = \frac{AM}{AB}$ 时, $\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{AM}{\sqrt{5}}$. 解得 $AM = \frac{5}{4}$. 所以 $OM = \frac{3}{4}$, $M(-\frac{3}{4}, 0)$, 如图 5.