21世纪应用型本科院校规划教材

运筹学教程

主　编　陈荣军　范新华
副主编　李文超　曹　国　王晓宇　秦立珍

YUNCHOUXUE JIAOCHENG

南京大学出版社

21 世纪应用型本科院校规划教材

运筹学教程

主　编　陈荣军　范新华
副主编　李文超　曹　国　王晓宇　秦立珍

南京大学出版社

内容提要

本教材力图反映面向21世纪教学内容和课程体系改革研究项目的成果,并融入教师多年的教学经验与教改成果,注重选材的精练性、结构的整体性和文字表达的可接受性,使读者能在较短的时间内掌握运筹学有关内容的思想和方法.《运筹学教程》共九章,包含绪论、线性规划、对偶、整数规划、图论、排队论、预测与决策、对策论和存储论,主要介绍运筹学的基本概念、理论和方法以及在经济和管理中的应用.在编写过程中着眼于实践,着重介绍实用的模型和方法,配以计算实例,主要讲清原理和步骤,而对数学基础要求较高的证明予以忽略;论述上深入浅出,文字通俗易懂.每章后面附有习题,并在书末给出习题答案,同时增加选择题与填空题.《运筹学教程》可作为高等学校,特别是应用型本科院校理工科类和经济管理类各专业的本科生教材,也可作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目(CIP)数据

运筹学教程 / 陈荣军,范新华主编. — 南京:南京大学出版社,2014.8

21世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-13362-6

Ⅰ.①运… Ⅱ.①陈… ②范… Ⅲ.①运筹学—高等学校—教材 Ⅵ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第121675号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 运筹学教程
主　　编 陈荣军　范新华
责任编辑 胥橙庭　单　宁　　编辑热线 025-83596923

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 徐州新华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张15.75 字数393千
版　　次 2014年8月第1版 2014年8月第1次印刷
ISBN 978-7-305-13362-6
定　　价 33.50元

网址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025)83594756

前　言

运筹学是理工、经济、管理类本科专业一门重要的基础课，它以定量分析方法为主研究管理问题，应用系统的、科学的、数学分析的方法，通过建立数学模型和求解模型获得最优决策方案.经过学习，可以使学生掌握运筹学整体优化的思想和若干定量分析的优化技术，能正确应用各类模型分析，解决不十分复杂的实际问题，培养和提高本科生科学思维、科学方法、实践技能和创新能力.

本书是作者根据教育部关于高等学校理工科类和经济管理类本科运筹学课程教学基本要求，在多年从事理工科类和经济管理类专业运筹学教学基础上编写而成的.

本书对运筹学的内容进行了取舍和整合，适合应用型本科院校的教学；在难易程度上，充分考虑了高等教育大众化背景下的学生特点和教学要求，既删除了较艰深的理论推导，突出应用性，又保持了理论体系的连贯性和完整性，可为学生继续深造和考研提供保障.本书注重用数学知识解决实际问题的基本思想和方法，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力.

本书由陈荣军教授、范新华副教授任主编，李文超、曹国、王晓宇、秦立珍任副主编，夏红卫、王献东、姚俊等参加了编写与校对工作，陈荣军教授还负责编写教程大纲与全书统稿工作.

在本书的编写过程中得到了常州工学院领导和理学院领导的大力支持，同时也得到了南京大学出版社的大力支持，在此向他们深表谢意.

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正.

编　者

2014年3月

目　录

第一章

绪　论

现在普遍认为，运筹学是近代应用数学的一个分支，它把科学的方法、技术和工具应用到包括系统管理在内的各种问题上，以便为那些掌管系统的人们提供最佳的解决问题的方法. P. M. Morse 与 G. E. Kimball 给运筹学下的定义：“运筹学是在实行管理的领域运用数学方法，对需要进行管理的问题统筹规划，作出决策的一门应用科学.”

本章首先介绍运筹学的发展历史、性质与特点以及发展趋势，然后介绍本教科书涉及的主要内容，最后通过几个例子介绍运筹学中线性规划、随机规划和网络优化的数学模型.

§1.1　运筹学简介

运筹学是 20 世纪新兴的学科之一，它能帮助决策者解决那些可以用定量方法和有关理论来处理的问题，在工业、商业、农业、军事、交通运输、政府部门和其他方面有重要的应用. 现在，运筹学已经成为经济计划、系统工程、现代管理等领域强有力的工具.

1.1.1　运筹学的发展历史

运筹学作为一门现代科学，是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的，但在这之前已有许多蕴含运筹学思想和方法的书籍和论文出现，例如，原苏联数学家 JI. B. KaHToPoBИч 的《生产组织与管理中的数学方法》一书（属于运筹学中的规划论）出版于 1939 年；J. Von Neumann 等所著《对策论和经济行为》一书（运筹学中对策论的创始作）成书前所发表的一系列论文在 1928 年就开始刊出；A. K. Erlang 关于用概率论理论来研究电话服务的论文（属于运筹学中的排队论）发表于 1909 年. 因此，运筹学的起源还能追溯得更早. 只是西方的运筹研究或“运筹学”这一名词确实出现在第二次世界大战期间，以运筹研究命名的、直接为战争服务的、跨学科的研究小组也是在这一期间出现的. 最早是在英国皇家空军战斗指挥部管辖下，1938 年出现的名为“（军事）行动的研究”小组，其英文是“Operational Research”（缩写为 O. R.），我国译为“运筹研究”或“运筹学”. 继英国的“（军事）行动的研究”小组之后，美国、加拿大等国也组成一些同名小组进行战术评价、战术改进、作战计划、战略选择等方面的研究，同时也包括如何改进后勤调度和训练计划等方面的研究. 这些研究，由于综合地运用了科学方法和技术，纠正了人们一些直观想象的错误，解决了当时战争中提出的一些新问题，从而引起人们对运筹学的重视. 据统计，战时同盟国参加（军事）运筹研究的科学工作者超过了 700 人.

第二次世界大战后，美国等国家的军方仍保留一些运筹研究小组，其他多数人转向把运筹

学研究用于和平时期的工商业.因此,美、德等国家的运筹学得以蓬勃发展,出现了应用研究和理论研究相互促进的局面.我国从 20 世纪 50 年代开始了运筹学的理论研究及应用推广.运筹学在工商业管理中的应用是主要的.随着工商业规模日益扩大、市场竞争日益激烈,迫使更多的管理决策者组织跨学科的专业人员组成研究集体,运用科学的方法指导工商业的运作.这一做法为工商业带来了巨大的生机和活力.例如,美洲航空公司通过设计和运行一个票价结构、订票和协调航班的系统,年效益超过 5 亿美元;我国从 20 世纪 80 年代起,经过多年的工作,建立了一个考虑国民经济发展对能源需求、减少煤炭对环境污染条件下,对发电、煤炭开采、交通建设综合优化平衡的混合整数规划模型,所获得的对该项目的优选及投产安排方案年经济效益在 4 亿美元以上.因此,在一些国家的政府部门、大公司和企业中,建立了许多运筹研究机构.许多大学理学院的数学系及工学院、管理学院、经济学院中都开设运筹学课程;近年来,许多国家的大学设立了经济与运筹学系或计算机与运筹学系,并设有攻读硕士和博士学位.在运筹研究或运筹学这一名称下发展起来多个运筹学分支学科,如规划论(包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、随机规划等)、网络分析、排队论、对策论、存储论、可靠性理论、模型论、投入产出分析等.与此相应,世界上许多国家成立了运筹学学会,并于 1959 年成立了国际运筹学联盟.该会的一个主要出版物为《运筹国际文摘》,它对各国主要的运筹专刊和期刊中关于运筹学理论和应用的新进展进行介绍和评述.我国的运筹学学会成立于 1980 年,学会的主要出版物有《运筹学学报》《运筹与管理》.

1.1.2 运筹学的性质与特点

运筹学是多种学科的综合性科学,它使用许多数学工具(包括概率统计、数理分析、线性代数等)和逻辑判断方法研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题,以期发挥最大效益.当人们把战时的运筹学研究取得成功的经验在和平时期加以推广应用时,面临着一个广阔的研究领域.在这一领域中,对于运筹学主要研究和解决什么问题有许多说法,至今争论不休,实际上形成了一个在争论中发展运筹学的局面.那么,在这 60 多年中,我们能从它的争论中看出一些什么特点呢?

(1) 引进数学研究方法.运筹学是一门以数学为主要工具,寻求各种问题最优方案的学科,所以是一门优化科学.随着生产与管理的规模日益庞大,其间的数量关系也就更加复杂,从数量关系来研究这些问题,即引进数学研究方法,是运筹学的一大特点.

(2) 系统性.运筹学研究问题是从系统的观点出发,研究全局性的问题,研究综合优化的规律,它是系统工程的主要理论依据.

(3) 着重实际应用.在运筹学术界,有许多人强调运筹学的实用性和对研究结果的"执行",把"执行"看作运筹工作中的一个重要组成部分.

(4) 跨学科性.由有关的各种专家组成的进行集体研究的运筹小组综合应用多种学科的知识来解决实际问题是早期军事运筹研究的一个重要特点.这种组织和这种特点一直在一些地方和一些部门以不同的形式保留下来,这往往是研究和解决实际问题的需要.从世界范围来看,运筹学应用的成败及应用的广泛程度,无不与有这样的研究组织和这种组织的研究水平有关.

(5) 理论和应用的发展相互促进.运筹学的各个分支学科,都是由于实际问题的需要或以一定的实际问题为背景逐渐发展起来的.初期一些老的学科方面的专家对运筹学作出了贡献.

随后新的人才也逐渐涌现，新的理论相继出现，这往往就开拓出新的领域. 如线性规划中的KaHToPoBИч问题A、B、C就是在研究生产的组织和计划中出现的. 后来G. B. Dantzig等人重新进行独立研究使其形成了一套较完整的理论和方法，进而又开拓了线性规划的应用范围，并相继出现了一批职业的线性规划工作者. 由于他们从事了大量的实践活动，反过来又进一步促进了线性规划方法的发展，从而又出现了椭球法、内点法等新的解线性规划的方法. 目前运筹学家们仍在孜孜不倦地研究新技术、新方法，使运筹学这门年轻的学科不断地向前发展.

1.1.3 运筹学的发展趋势

运筹学作为一门学科在理论和应用方面，就广度和深度来说，都有着无限广阔的前景. 它不是一门衰老过时的学科，而是一门处于年轻发展时期的学科，这从运筹学目前的发展趋势便可看出.

(1) 运筹学的理论研究将会得到进一步系统地、深入地发展. 数学规划是20世纪40年代末期才开始出现的. 到了20世纪60年代，它已经形成了应用数学中一个重要的分支，各种方法和理论的纷纷出现，蔚为大观. 但是，数学规划也和别的学科一样，在各种方法和理论出现以后，自然要走上统一的途径. 也就是说，用一种或几种方法或理论把现存的东西统一在某些系统之下来进行研究. 而目前这种由分散到统一、由具体到抽象的过程正在形成，而且将得到进一步的发展.

(2) 运筹学向一些新的研究领域发展. 运筹学的一个重要特点是应用十分广泛，近年来它迅速地向一些新的研究领域或原来研究较少的领域发展，如研究世界性的问题、研究国家决策、研究系统工程等.

(3) 运筹学分散融化于其他学科，并结合其他学科一起发展. 如数学规划方法用于工程设计，常常叫作“最优化方法”，已成为工程技术中一个有力的研究工具；数学规划用于Leontief的投入产出模型，也成为西方计量经济学派常用的数学工具等.

(4) 运筹学沿原有的各学科分支向前发展，这仍是目前发展的一个重要方面. 如规划论，从研究单目标规划进而研究多目标规划，这当然可以看成是对事物进行深入研究的自然延伸. 事实上，在实际问题中想达到的目标往往有多个，而且有些还是互相矛盾的. 再如，从研究确定性的数学规划到研究随机规划，这种深入研究也很自然，因为在实际应用中，很多因素不确定，它们被表示为随机变量或随机过程等.

(5) 运筹学中建立模型的问题将日益受到重视. 从事实际问题研究的运筹学工作者，常常感到他们所遇到的困难是如何把一个实际问题变成一个可以用数学方法或别的方法来处理的问题. 就目前来说，关于运筹理论和方法的研究，远远超过了对上述困难的研究，而要使运筹学保持它的生命力，这种研究非常必要.

(6) 运筹学的发展将进一步依赖于计算机的运用和发展. 电子计算机的问世与广泛的使用是运筹学得以迅猛发展的重要原因. 实际问题中的运筹学问题，计算量一般都是很大的. 只是有了存储量大、计算速度快的计算机，才使得运筹学的应用成为可能，并反过来推动了运筹学的发展. 如算法复杂性这个学科就是运筹学与计算机的产物.

总之，运筹学虽然只有60多年的历史，但发展如此之快、运筹学工作者如此之多，都是前所未有的. 运筹学作为一门学科，在理论和应用方面，无论就其广度还是深度来说，都有着无限

广阔的前景.它对于加速我国的四个现代化建设必将起到十分重要的作用.

§1.2 运筹学的分支

运筹学发展到现在虽然只有60多年的历史,但是内容丰富、涉及面广、应用范围大,已形成了一个相当庞大的学科.运筹学按要解决问题的差别,归结为不同类型的数学模型.这些数学模型构成了运筹学的各个分支.本教科书将涉及如下一些分支:

线性规划.线性规划是一种解决在线性约束条件下追求最大或最小的线性目标函数的方法.例如,当决策者在现有的条件下追求最大利润或在完成任务的前提下追求最小成本的时候,如果现有条件(或完成任务的前提)的约束可以用数学上变量的线性等式或不等式来表示,最大的利润(或最小成本)的目标也可以用变量的线性函数来表示,那么这样的问题我们就可以用线性规划的方法来解决.简而言之,线性规划主要是解决两个方面的问题:一个方面的问题是对于给定的人力、物力和财力,怎样才能发挥它们的最大效益;另一个方面的问题是对于给定的任务,怎样才能用最少的人力、物力和财力去完成它.

整数规划.整数规划是一种特殊的线性规划问题,它要求某些决策变量的解为整数.

网络分析.网络分析主要是研究解决生产组织、计划管理中诸如最短路径问题、最小连接问题、最小费用流问题、最优分派问题及关键线路图等.在这种模型中,把研究对象用点表示,对象之间的关系用边(或弧)来表示,并赋予边(或弧)某些特定含义的数据,这样的点边集合构成了网络图.特别在计划和安排大型的复杂工程时,网络技术是重要的工具.

排队论.排队论又叫随机服务系统理论,最初是在20世纪初由丹麦工程师艾尔郎关于电话交换机的效率研究开始的,在第二次世界大战中得到了进一步的发展.排队现象在日常生活中屡见不鲜,如机器等待修理、船舶等待装卸、顾客等待服务等.它们有一个共同问题,就是等待时间长了,就会影响生产任务的完成,或者顾客会自动离去而影响经济效益;如果增加修理工、装卸码头和服务台,固然能解决等待时间过长的问题,但又会蒙受修理工、码头和服务台空闲的损失.这类问题的妥善解决是排队论的任务.排队论是解决排队服务系统工作过程优化的模型,它可以帮助管理者对一些包括排队问题的运作系统作出更好的决策.

决策分析.决策问题是普遍存在的,凡属举棋不定的事情都必须作出决策.人们之所以举棋不定,是因为人们在着手实现某个预期目标时,面前出现了多种情况,又有多种行动方案可供选择.决策者如何从中选择一个最优方案,才能达到他的预期目标,这是决策论的研究任务.该方法是在决策环境不确定和风险情况下对几种备选方案进行决策的准则和方法.

预测分析.预测分析是根据客观对象的已知信息,运用各种定性和定量的分析理论与方法,对事物未来发展的趋势和水平进行判断和推测的一种活动.因此,预测是一种可以用于预见事物未来的技术,分为定性与定量两种技术.

对策论.也叫博弈论,系统地创建这门学科的数学家,现在一般公认为是美籍匈牙利数学家、计算机之父——冯·诺依曼.对策论是研究具有利害冲突的各方,如何制定出对自己有利从而战胜对手的斗争策略.例如,战国时代田忌赛马的故事便是对策论的一个绝妙的例子.对策论是用于解决具有对抗性局势的模型,在这类模型中,参与对抗的双方都有一些策略可供选择,该模型为对抗各方提供获得最优对策的方法.

存储论.人们在生产和消费过程中,都必须储备一定数量的原材料、半成品或商品.存储少

了会因停工待料或失去销售机会而遭受损失，储存多了又会造成资金积压、原材料及商品的损耗. 因此，如何确定合理的存储量、购货批量和购货周期至关重要，这便是存储论要解决的问题.

上面介绍的每一个部分都可以独立成册，都有丰富的内容.

§1.3 运筹学的数学模型

模型是实际系统过程的代表或描述，它能反映实际且具有足够的精确度. 模型就是用一种简化的方式表现一个复杂过程或系统，用以帮助人们进行思考和解决问题. 运筹学所研究的模型一般来说都是数学模型，也就是用字母、数字和运算符号将系统或过程的某些特征及相互关系表达出来. 它试图精确地和定量地表示系统的各种关系，是实现系统或过程的一种抽象，近似实际系统或过程而又非实际系统或过程的复制品. 它应能反映实际系统或过程的某些特征而又比实际系统或过程本身简单. 下面我们就介绍几个常用的数学模型.

1.3.1 线性规划模型

某工厂用 3 种原料 P_1，P_2，P_3 生产 3 种产品 Q_1，Q_2，Q_3，已知条件如表 1-1 所示. 试制订出总利润最大的生产计划.

表 1-1

单位产品所需原料数量/kg　产品　原料	Q_1	Q_2	Q_3	原料可用量/(千克/日)
P_1	2	3	0	1 500
P_2	0	2	4	800
P_3	3	2	5	2 000
单位产品的利润/万元	3	5	4	

设产品 Q_j 的日产量为 x_j 个单位，$j=1, 2, 3$，它们受到一些条件的限制. 首先，它们不能取负值，即必须有 $x_j \geqslant 0$，$j=1, 2, 3$；其次，根据题设，3 种原料的日消耗量分别不能超过它们的日可用量，即它们又必须满足

$$2x_1+3x_2 \leqslant 1\,500,\ 2x_2+4x_3 \leqslant 800,\ 3x_1+2x_2+5x_3 \leqslant 2\,000$$

我们希望在以上的约束条件下，求 x_1，x_2，x_3，使总利润 $z=3x_1+5x_2+4x_3$ 达到最大. 故求解该问题的数学模型为

$$\max z=3x_1+5x_2+4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leqslant 1\,500 \\ 2x_2+4x_3 \leqslant 800 \\ 3x_1+2x_2+5x_3 \leqslant 2\,000 \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2,3) \end{cases}$$

其中 max 是极大化(maximize)的简记符号.

由以上分析可以看出，抽象成数学形式的核心就是求一组变量的值，在满足一定的约束条件下，使某个目标达到最小或最大，而这些约束条件又都可以用一组线性不等式或线性方程来表示. 具有这些特征的数学形式，我们就叫作线性规划模型.

1.3.2 随机规划模型

设决策者设计一个水库，使水库的容量 C 在满足限制条件下达到最小以使其造价最省.

首先，为防止洪水灾害，在一年中第 i 季节水库应空出一定的容量 V_i，以保证洪水的注入. 由于洪水不一定年年有，洪水量的大小也会变化. 因此，比较合理的约束条件应为以较大的概率 α_1 保证水库容纳洪水，即

$$P(C-s_i\geqslant V_i)\geqslant\alpha_1,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

其中 s_i 为第 i 个季节初水库的储水量.

其次，为保证灌溉、发电、航运等用水供应，水库在每一季节应能保证一定的放水量 q_i. 由于考虑随机因素，要求满足这一条件的概率不小于某一数 α_2，即

$$P(x_i\geqslant q_i)\geqslant\alpha_2,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

其中 x_i 为第 i 个季节的可放水量.

同样，为保护水库的安全和水生放养，一般还要求水库保持最小储水量 $s_{\min}$，即

$$P(s_i\geqslant s_{\min})\geqslant\alpha_3,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

另外，表示放水量和储水量的 x_i，s_i 不能是负数，即

$$s_i\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

于是，写成数学形式就是

$$\min C$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}P(C-s_i\geqslant V_i)\geqslant\alpha_1\\ P(x_i\geqslant q_i)\geqslant\alpha_2\\ P(s_i\geqslant s_{\min})\geqslant\alpha_3\\ x_i\geqslant 0,s_i\geqslant 0,i=1,2,3,4\end{cases}$$

其中约束条件采用了概率约束形式，具有这种特征的数学形式我们就叫作随机规划模型.

1.3.3 网络优化模型

设某公司准备派 n 个工人 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ 去做 n 件工作 $y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n$. 已知工人 x_i 去做工作 y_j 的效率为 $w_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$. 现问：如何确定一个分派工人去工作的方案，使得工人们的工作总效率达到最大？这个问题通常称为最优分派问题.

我们构造一个二分网络 $G=(X,\ Y,\ E,\ W)$，其中 $X=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$，$Y=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n)$为 G 的顶点集合二分划，分别表示 n 个工人和 n 件工作；$E=\{e_{ij}\mid i,\ j=1,\ 2,\cdots,n\}$为 G 的边集合，其中 e_{ij} 表示工人 x_i 去做工作 y_j；$W=\{w_{ij}\mid i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n\}$为 G 的边权集合，其中 w_{ij} 表示工人 x_i 去做工作 y_j 的效率. 二分图 G 如图 1-1 所示.

现在我们来建立分派方案与 G 的边集合之间的对应关系. 首先，一个可行的分派方案应该满足：任一工人都不能去做两件或两件以上的工作；同样，任一件工作都不能同时接受两个或两个以上的工人去做. 然后将其对应到 G 的边集合中，于是就得到这样一个边的子集，它没有两条边关联于同一个顶点，这样的边的子集我们称为 G 的对集. 因此. 一个可行的分派方案

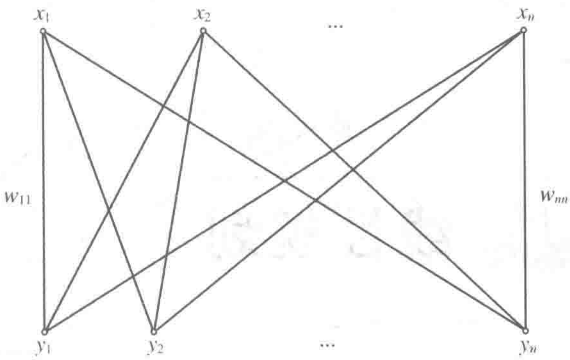

图 1-1

就对应于 G 的一个对集.

我们最终要求的是使总效率达到最大的分派方案,而一个分派方案的总效率就对应 G 的一个对集的边权总和. 于是求一个使总效率达到最大的分派方案就转化成求 G 的一个边权总和达到最大的对集,通常称为最大权对集.

综合以上分析可以看出,我们首先将最优分配问题转化成网络的最大权对集问题,然后求出网络的最大权对集,最后再回到最优分派问题中去,从而得到最优分派问题. 这种分析问题的方法通常称为网络分析法,这种数学形式通常称为网络优化模型.

综合以上几个模型我们可以看出,这些模型一般都具有以下两个共同特征:

(1) 都有一个明确的目标,这个目标就是从众多的可行方案中挑选出一个最优方案;

(2) 用来表达目标的变量都要受一组条件的约束,它反映了问题本身所受到的客观条件的限制.

因此,运筹学模型大都可以表示为求一组变量,使在一定的约束条件之下,某一(或某些)目标达到最优.

第二章

线性规划

§2.1 线性规划简介

运筹学(Operations Research)是20世纪30年代二次大战期间由于战争的需要发展起来的一门学科. 当时,英国组织了一批自然科学和工程科学的学者,和军队指挥员一起,研究大规模战争提出的一些问题. 如轰炸战术的评价和改进、反潜艇作战研究等,研究结果在战争实践中取得了明显效果. 这些研究当时在英国称为 Operational Research,直译为作战研究. 战争结束以后,这些研究方法不断发展、完善,并逐步形成学科理论体系,其中一些主要的理论和方法包括线性规划、网络流、整数规划、动态规划、非线性规划、排队论、决策分析、对策论、计算机模拟等. 这些理论和方法在经济管理领域也得到了广泛应用,Operations Research 也转义成为“作业研究”. 我国将 Operations Research 译成“运筹学”,非常贴切地将 Operations Research 这一英文术语所包含的作战研究和作业研究两方面的涵义都体现了出来.

现在,运筹学已经成为管理科学重要的基础理论和应用方法,是管理科学专业基本的必修课程之一.

线性规划是运筹学中最重要的一种系统优化方法. 它的理论和算法已十分成熟,应用领域十分广泛,包括生产计划、物资调运、资源优化配置、物料配方、任务分配、经济规划等问题. 随着计算机硬件和软件技术的发展,目前用微型计算机就可以求解变量个数达 10^6、约束个数达 10^4 的巨大规模的问题,并且计算时间也不太长.

线性规划问题最早是前苏联学者康德洛维奇(L. V. Kantorovich)于1939年提出的,但他的工作当时并未广为人知. 第二次世界大战中,美国空军的一个研究小组 SCOOP(Scientific Computation of Optimum Programs)在研究战时稀缺资源的最优化分配这一问题时,提出了线性规划问题,并且由丹泽(G. B. Dantzig)于1947年提出了求解线性规划问题的单纯形法. 单纯形法至今还是求解线性规划最有效的方法. 20世纪50年代初,电子计算机研制成功,较大规模的线性规划问题的计算已经成为可能. 因此,线性规划和单纯形法受到数学家、经济学家和计算机工作者的重视,得到迅速发展,很快发展成一门完整的学科并得到广泛的应用. 1952年,美国国家标准局(NBS)在当时的 SEAC 电子计算机上首次实现单纯形算法. 1976年,IBM 研制成功功能十分强大、计算效率极高的线性规划软件 MPS,后来又发展成为更为完善的 MPSX. 这些软件的研制成功,为线性规划的实际应用提供了强有力的工具.

在本章中,我们将介绍线性规划的基本概念、单纯形法的基本原理及线性规划在经济分析

中的应用. 后面的题目求解均可以通过软件求解答案，对计算机软件应用和计算方法方面的问题，可参阅有关文献.

§2.2　线性规划问题

根据实际问题的要求，可以建立线性规划问题数学模型. 线性规划问题由目标函数、约束条件以及变量的非负约束三部分组成. 下面列举五种最常见的线性规划问题的类型.

2.2.1　生产计划问题

例 2.1　某工厂拥有 A、B、C 三种类型的设备，生产甲、乙、丙、丁四种产品. 每件产品在生产中需要占用的设备机时数，每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如表 2 - 1 所示.

表 2 - 1

每件产品占用的机时数/(小时/件)	产品甲	产品乙	产品丙	产品丁	设备能力/小时
设备 A	1.5	1.0	2.4	1.0	2 000
设备 B	1.0	5.0	1.0	3.5	8 000
设备 C	1.5	3.0	3.5	1.0	5 000
利润/(元/件)	5.24	7.30	8.34	4.18	

用线性规划制定使总利润最大的生产计划.

设变量 x_i 为第 i 种产品的生产件数($i=1,2,3,4$)，目标函数 z 为相应的生产计划可以获得的总利润. 在加工时间以及利润与产品产量成线性关系的假设下，可以建立如下的线性规划模型：

$$\max z=5.24x_1+7.30x_2+8.34x_3+4.18x_4 \qquad \text{目标函数}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}1.5x_1+1.0x_2+2.4x_3+1.0x_4\leqslant 2\ 000 \\ 1.0x_1+5.0x_2+1.0x_3+3.5x_4\leqslant 8\ 000 \qquad \text{约束条件} \\ 1.5x_1+3.0x_2+3.5x_3+1.0x_4\leqslant 5\ 000 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 \qquad \text{变量非负约束}\end{cases}$$

这是一个典型的利润最大化的生产计划问题. 其中 max 表示极大化(maximize)，s. t. 是 subject to 的缩写. 求解这个线性规划，可以得到最优解为

$$x_1=294.12(\text{件}),x_2=1\ 500(\text{件}),x_3=0,x_4=58.82(\text{件})$$

最大利润为

$$z=12\ 737.06(\text{元})$$

请注意最优解中利润率最高的产品丙在最优生产计划中不安排生产. 说明按产品利润率大小为优先次序来安排生产计划的方法有很大局限性. 尤其当产品品种很多、设备类型很多的情况下，用手工方法安排生产计划很难获得满意的结果.

2.2.2 配料问题

例 2.2 某工厂要用四种合金 T_1,T_2,T_3 和 T_4 为原料，熔炼成为一种新的不锈钢 G. 这四种原料含元素铬(Cr)、锰(Mn)和镍(Ni)，这四种原料的单价以及新的不锈钢材料 G 所要求的 Cr、Mn 和 Ni 的最低含量(%)如表 2-2 所示.

表 2-2

	T_1	T_2	T_3	T_4	G
Cr	3.21	4.53	2.19	1.76	3.20
Mn	2.04	1.12	3.57	4.33	2.10
Ni	5.82	3.06	4.27	2.73	4.30
单价/(元/千克)	115	97	82	76	

设熔炼时质量没有损耗. 要熔炼成 100 千克不锈钢 G，应选用原料 T_1,T_2,T_3 和 T_4 各多少千克，使成本最小?

设选用原料 T_1,T_2,T_3 和 T_4 分别为 x_1,x_2,x_3,x_4 千克. 根据条件，可建立相应的线性规划模型如下：

$$\min z=115x_1+97x_2+82x_3+76x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.0321x_1+0.0453x_2+0.0219x_3+0.0176x_4\geqslant 3.20\\0.0204x_1+0.0112x_2+0.0357x_3+0.0433x_4\geqslant 2.10\\0.0582x_1+0.0306x_2+0.0427x_3+0.0273x_4\geqslant 4.30\\x_1+x_2+x_3+x_4=100\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

这是一个典型的成本最小化的问题. 其中 min 表示极小化(minimize). 这个线性规划问题的最优解是

$$x_1=26.58(\text{千克}),x_2=31.57(\text{千克}),x_3=41.84(\text{千克}),x_4=0(\text{千克})$$

最低成本为

$$z=9\ 549.87(\text{元})$$

2.2.3 背包问题

例 2.3 一只背包最大装载质量为 50 千克. 现有三种物品，每种物品数量无限，每种物品每件的质量、价值如表 2-3 所示.

表 2-3

物品	1	2	3
质量/(千克/件)	10	41	20
价值/(元/件)	17	72	35

要在背包中装入这三种物品各多少件，使背包中的物品价值最高?

设装入物品 1,2 和 3 各为 x_1,x_2,x_3 件. 由于物品的件数必须是整数，因此背包问题的线性规划模型是一个整数规划问题：

$$\max z = 17x_1 + 72x_2 + 35x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 10x_1 + 41x_2 + 20x_3 \leqslant 50 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\ \text{是整数} \end{cases}$$

这个问题的最优解是 $x_1=1$(件),$x_2=0$(件),$x_3=2$(件);最高价值为 $z=87$(元).

2.2.4 运输问题

例 2.4 设某种物资从两个供应地 A_1,A_2 运往三个需求地 B_1,B_2,B_3. 各供应地的供应量、各需求地的需求量、每个供应地到每个需求地的单位物资运价如表 2-4 所示.

表 2-4

运价/(元/吨)	B_1	B_2	B_3	供应量/吨
A_1	2	3	5	35
A_2	4	7	8	25
需求量/吨	10	30	20	

这个问题也可以用图解表示如下,其中节点 A_1,A_2 表示发地,节点 B_1,B_2,B_3 表示收地,从每一发地到每一收地都有相应的运输路线,共有 6 条不同的运输路线.

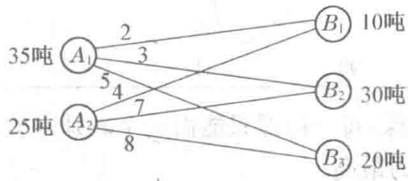

图 2-1

设 x_{ij} 为从供应地 A_i 运往需求地 B_j 的物资数量($i=1,2;j=1,2,3$),z 为总运费,则总运费最小的线性规划模型为

$$\min z = 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 8x_{23}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 35 & (1) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 & (2) \\ x_{11} + x_{21} = 10 & (3) \\ x_{12} + x_{22} = 30 & (4) \\ x_{13} + x_{23} = 20 & (5) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

以上约束条件(1)(2)称为供应地约束,(3)(4)(5)称为需求地约束. 这个问题的最优解为 $x_{11}=0$,$x_{12}=30$(吨),$x_{13}=5$(吨),$x_{21}=10$(吨),$x_{22}=0$,$x_{23}=15$(吨);最小运费为 $z=275$(元).

2.2.5 指派问题

例 2.5 有 n 项任务由 n 个人去完成,每项任务交给一个人,每个人都有一项任务,由第 i 个人去做第 j 项任务的成本(或效益)为 c_{ij}. 求使总成本最小(或效益最大)的分配方案.