走向奥林匹克

——全国小学数学竞赛解题指导

中国国际广播出版社

责任编辑：柏　森
封面设计：过介初

ISBN7—80035—256—3/G·83

定价：3.30元

走向奥林匹克

——全国小学数学竞赛解题指导

主　编：颜尔达　沈利民
副主编：钱俊荣
编　著：颜尔达　沈利民
　　　　钱俊荣　程　伟
　　　　孙　云　王奇娟
　　　　黄　平

中国国际广播出版社
1993.1.

(京)新登字第096号

走向奥林匹克

——全国小学数学竞赛解题指导

主　编：颜尔达　沈利民
副主编：钱俊荣
编　著：颜尔达　沈利民　钱俊荣
程　伟　孙　云　王奇娟
黄　平

中国国际广播出版社出版
(北京复兴门外广播电影电视部内)
邮政编码　100866
中国国际广播出版社发行部发行
苏州印刷总厂张家港市分厂电脑排印
浙江省新华书店经销

开本 787×1092　1/32　印张 7.5　字数 185,500
1993年1月第二版　　1993年1月第一次印刷
印数　27,001—40,500册
ISBN7—80035—256—3/G・83
定价：3.30元

再 版 前 言

多年来开展各级数学竞赛的实践充分证明，数学竞赛的广泛开展，对促进我国数学教育的发展，提高我国青少年数学素质和全民族的数学水准都起着积极的作用。

我国自 1956 年起，在北京、上海、武汉等地开始举办了省、市一级的高中数学竞赛，后因“文革”而中断；1978 年开始恢复举办全国性高中数学竞赛；1983 年开始举行全国性初中数学竞赛。近几年来，各地举办了各种地方性的小学数学竞赛和邀请赛，91 年又首次举办了全国性小学数学奥林匹克。这样，在我国从小学、初中到高中已正式形成了每年举行一次的国家级的数学竞赛体制。这无疑进一步为使我国在国际数学竞赛(IMO)中跻身于世界数学强国之列打下了更坚实的基础，也是使我国在数学学科中多出人才、快出人才的一项有效措施。

为了帮助小学生提高分析问题和解决问题的能力，以适应参加各级小学数学竞赛的要求，我们编写了这本书。书中以国内外小学数学竞赛题为背景，选用了较多的典型例题，通过对这些例题解法的探索和分析，渗透常见的数学思想方法及其在解题中的应用。全书分“专题选讲”和“思想方法”两大篇，共 26 讲。取材新颖，分析透彻，行文力求符合小学生习惯，通

俗易懂。各讲之间既注意到整体上的统一性，又保持了相对独立性，以便于读者根据各自情况自由选学。各讲之后都安排了一定数量的习题，通过练习，可使读者进一步加深对书中内容的理解，在附录 3 中给出了习题的答案或提示，供读者对照、参考。

在附录 1 及附录 2 中我们分别对 91 年和 92 年举办的全国小学数学奥林匹克试题进行了详细分析、解答，供读者参考。

我们祈望本书能帮助读者提高数学水平和实际解题的能力，成为小学高年级学生的课外读物和参赛指导书；成为中等师范学生、小学教师和家长的一本有益参考书；并作为小学教师继续教育研究班的选修课教材。

本书写作中，得到了沙洲工学院府钰副教授的大力支持，她提出了不少有益的建议，审阅了全部初稿，并对部分章节进行了改写，在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，难免有疏漏和错误之处，敬请读者批评指正。

作　者

1992 年 12 月

目　录

I　专题选讲篇

（第一部分　有关数的问题）

（第二部分　应用题专题选讲）

（第三部分　几何形体问题）

（第四部分　其他）

Ⅱ　思想方法篇

Ⅰ 专题选讲篇

（第一部分 有关数的问题）

第1讲 奇数与偶数

大家知道，能被2整除的整数叫做偶数，不能被2整除的整数叫做奇数。奇偶数有许多性质，下面我们列出几个简单而常用的性质：

(1)一个整数不是奇数就是偶数。

(2)奇数＋奇数＝偶数；奇数＋偶数＝奇数；偶数＋偶数＝偶数。

一般地，奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和是偶数；多个偶数的和总是偶数。

(3)奇数－奇数＝偶数；奇数－偶数＝奇数；偶数－奇数＝奇数。

(4)奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；偶数×偶数＝偶数。

一般地，奇数的连乘积永远是奇数；若干个整数连乘，如果其中有一个数是偶数，则乘积是偶数。

上面的这些性质虽然很简单，但是只要我们加以恰当、巧妙的运用，就可以解决很多有趣的、有一定难度的数学竞赛

题。

例1 1＋2＋3＋…＋1990＋1991是奇数还是偶数？

思考方法 由于只要知道这些数和的奇偶性，不需要知道这个和究竟是多少，所以不必把这些数一一加起来，那样做很费事。

我们将其中所有的偶数去掉，只讨论1＋3＋5＋7＋9＋…＋1989＋1991的奇偶性就行了，这是因为这个和与原数有相同的奇偶性。这个和中共有1992÷2＝996个奇数，因此是偶数。从而可知原数也是偶数。

例2 平面上有5个点，每三个点都不在一条直线上，现在从每个点都正好引出三条直线和其余的任意三个点相连，你能连成吗？

思考方法 通过试验我们发现，不管怎样连，都不能满足题目的要求。这是什么道理呢？因为一条线从A引到B，同样可以看作是从B引到A的，因此如果把每点所引出线的数目加起来得到的数，实际上是把连线的总数重复算了一次，所以是连线总数的2倍。现在有5个点，每点引3条线，所引线总数是3×5＝15（条），这是一个奇数，不可能是某个整数的2倍。这就是说明要连成满足本题要求的线是不可能实现的。

说明 由于本例中所给的点数较少，因此用实际连线试验的方法也可推出问题的解答。但当所给数点较多时（例如有10001个点引出9999条线），那末就必须采用本例所介绍的方法进行分析，利用奇偶数性质来解，读者可自行练习。

例3 桌上有7只底朝上倒扣着的茶杯，规定每次必须翻转其中4只茶杯，称为一次“运动”。问能否进行若干次“运动”，使7只茶杯的杯口都朝上？

思考方法 一只倒扣茶杯翻转一次，杯口朝上；翻转2

次，杯口朝下；翻转3次，杯口又朝上了，……。不难看出，每只倒扣的茶杯必须翻转奇数次才能使杯口朝上。由于奇数乘以7仍是奇数，所以要使7只茶杯全翻过来，翻转的总次数必须是奇数。根据规定，一次“运动”必须同时翻转4只茶杯（应算作4次翻转），所以不管进行若干次“运动”，翻转的总次数永远是偶数（任意多个4相加，和必是偶数）。由此可知，按题目要求使7只茶杯都翻过来是不可能的。

例4 教室里有7排椅子，每排7张，每张椅子上坐着一个学生，如果一周后，每个学生都必须和他相邻（前、后、左、右）的某一同学交换座位，问能不能换成？

思考方法 如图1—1，我们用方格表示椅子，并把相邻两格分别涂上黑白两种颜色（图中阴影部分表示黑色）。根据题意，每个学生都必须和他相邻的同学交换座位，也就是原来在白格内的都要换到黑格去，原来在黑格内的都要换到白格去，因此黑、白格数必须相等，它们的总和必须是偶数。但是黑格与白格的总数是$7\times7=49$（格），所以按题意交换座位是不可能的。

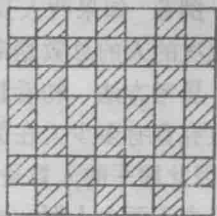


图1—1

本题的解法叫做“涂色方法”，用这种方法思考某些问题常常显得巧妙、简便。

例5 能不能把1，1，2，2，3，3，4，4，5，5这十个数排成一行，使行两个1之间夹着1个数，两个2之间夹着2个数，……，两个5之间夹着5个数？

思考方法 如图1—2，我们将一行十个位置画成十个方格，并黑白相间地涂色（图中阴影部分为黑色）。这样，共有五

个黑格和五个白格。

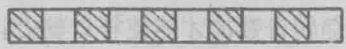


图 1—2

先考虑两个 2 所占格的情况，因为它们中间要夹两个数，所以两个 2 必占一个黑格和一个白格，同样，两个 4 也必须占一黑一白两格。于是还剩三个黑格和三个白格。

因为两个 1 中间夹着一个数，所以两个 3 也必须占两个同色格，两个 5 也是这样。从而可以得到 1，1，3，3，5，5 这六个数占的黑格（或白格）数必定是偶数，不可能占三个黑格（或白格），所以满足题目条件的排法是无法实现的。

例 6 如果两人互相握手，则每人都记握手一次，问握手奇数次的人的总数是奇数还是偶数？

思考方法 初看起来，似乎这个题目还缺少一个条件，不知道究竟有多少人在握手。但是由于问题只涉及到数的奇偶性，因此握手的人数是无关紧要的。

由于两个人握一次手，每人都算握了一次，所以两个人握手一次的次数和是 2。所以不论有多少人握手，握手次数总和一定是偶数。

我们把所有的这些人分成两类，甲类是握手的次数是偶数的那些人，乙类是握手的次数是奇数的那些人。那么，甲类人握手的总次数是偶数。由于乙类人握手的总次数等于所有人握手总次数减去甲类人握手的总次数，是两个偶数的差，所以也是偶数。

因为乙类中每人握手的次数都是奇数，又只有偶数个奇数相加其和才能是偶数，所以乙类中只能有偶数个人，即握手的次数是奇数的那些人的总数是个偶数。

习 题 1

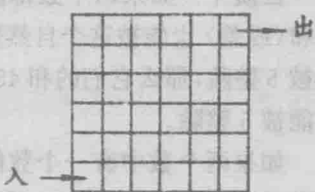
1. 某班的35个小朋友举行乒乓球比赛，能不能让他们每个人恰与其他三个人比赛一次？

2. 有29个省市的篮球队参加比赛，能否安排出这样的比赛场次，使每个球队恰好参加奇数次比赛？

3. 将数1,2,3,…,20排成一个圆圈，如果甲报出一个数a(在1—20之间)，那么就从这个数a往前再数a个数(不连本身)，例如a=3，就从3往前数3个数到6。若a=15，就从15往前再数15个数到10。问a是多少时，可以数到17？

4. 10枚5分硬币，“5分”的面朝上放在桌子上，现在规定每次翻动其中9枚，要你翻动10次，你能把“国徽”全部翻成朝上吗？

5. 某展览会共有36个陈列室，如图所示。相邻两室之间都有门可以通行，有人希望每个展室都去一次，而且只去一次，你能替他设计参观路线吗？



(第5题图)

6. 将8×8的棋盘的左下角及右上角的1×1小正方形剪去。问用31张1×2的小长方形纸片能不能完全盖住残缺的棋盘？

第2讲　数的整除

数的整除是小学数学的基本内容之一，在小学数学竞赛中常常涉及到这一内容。我们先简要地叙述一下有关概念和性质，然后举例介绍这类问题的题型、解题思路和解题方法。

一、整除的概念

整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$，商是整数且余数为零，我们就说 a 能被 b 整除，或称 b 能整除 a。a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数。用式子表示，就是 $a \div b = q$，或 $a = b \times q$。在小学数学里，这里出现的数一般指自然数。

二、整除的性质

性质1　如果两个数都能被同一自然数整除，那么它们的和（或差）也能被这个自然数整除。例如：45 能被 5 整除，60 能被 5 整除，那么它们的和 $45 + 60 = 105$ 及差 $60 - 45 = 15$ 也能被 5 整除。

如果两个数中有一个数能被某数整除，另一个数不能被某数整除，那么它们的和（或差）也不能被这个数整除。例如 39 能被 13 整除，15 不能被 13 整除，它们的和 $39 + 15 = 54$ 及差 $39 - 15 = 24$ 都不能被 13 整除。

性质2　如果整数 a 能被整数 b 整除，整数 b 能被整数 c 整除，那么 a 必定能被 c 整除。例如 30 能被 15 整除，15 又能被 5 整除，所以 30 能被 5 整除。

性质3　若干个数相乘，如果其中一个因数能被某一数整除，那么它们的积也能被这个数整除。例如 18 能被 3 整除，那么 $18 \times 2 \times 7$ 也能被 3 整除。

三、整除的一些常用特征

(1) 能被 2(或 5) 整除的数的特征是:这个数的个位数字能被 2(或 5) 整除。

(2) 能被 3(或 9) 整除的数的特征是:这个数的各位数字之和能被 3(或 9) 整除。

(3) 能被 4(或 25) 整除的数的特征是:这个数的末两位数能被 4(或 25) 整除。

(4) 能被 8(或 125) 整除的数的特征是:这个数的末三位数能被 8(125) 整除。

(5) 能被 11 整除的数的特征是:这个数各奇位上的数字之和与偶位上的数字之和相减,所得的差是 11 的倍数。

例 1 由 2000 个 1 组成的数 11…11 能否被 41 和 271 两个质数整除?

思考方法 因为 41×271=11111。将由 2000 个 1 组成的数 11…11 按"11111"5 位分节,正好可分为 2000÷5=400(节),由此可知由 2000 个 1 组成的数能被 11111 整除。而 11111 又能被 41 和 271 整除,所以由 2000 个 1 组成的数能被 41 和 271 整除。

例 2 有分别写着 1,2,3…,13 的卡片各 2 张,任意抽出 2 张,计算这两张卡片上的数的积,这样会得到许多不相等的积。试问,这些积中有多少个能被 6 整除?

思考方法一 这些积中能被 6 整除的最大一个是 13×12=26×6,最小的是 6,而介于 1×6 与 26×6 之间的 6 的倍数除了 25×6,23×6,21×6,19×6,17×6 这五个 6 的倍数之外,其余都是 2 张卡片上数的积,所以其中有 26-5=21(个)能被 6 整除。

思考方法二 本题还可以按一定的顺序进行思考,逐一

列出：$6\times1,6\times2,6\times3,\cdots\cdots,6\times13$，共 13 个；再加上 12×7，$12\times8,\cdots\cdots,12\times13$，共 7 个；还有 10×9 一个。总共 21 个。

例 3 某人在一张纸上写了一个五位数，其中第二和第四个数字看不清了，成了 3□6□5 的情形。但是已知这个五位数是 75 的倍数，那么满足上述条件的五位数中，最大的一个是多少？

思考方法 这个五位数能被 75 整除，必定能被 25 和 3 整除。因为这个数的末位数是 5，所以它的末两位数只能为 25 或 75。当末两位数是 25 时，因为这个数要能被 3 整除，所以它的各位数字之和能被 3 整除，经试验，它的千位数只能是 2，5，8。这时这些五位数中最大的一个是 38625。同理当这个五位数的末两位数为 75 时，最大的五位数为 39675。因此满足条件的五位数中最大的一个是 39675。

例 4 有一个四位数，它的个位数与千位数之和为 10，且个位数既是偶数，又是质数。去掉个位数与千位数得到的一个两位数是个质数，又知道这个四位数能被 72 整除，求这个四位数。

思考方法 既是偶数又是质数的自然数只有 2，所以个位数为 2，千位数为 $10-2=8$。我们可以假设所求的四位数是 $\overline{8ab2}$，要使它能被 72 整除，必须既能被 9 整除又能被 8 整除。由于 $\overline{8ab2}$ 能被 9 整除，所以 $8+a+b+2$ 能被 9 整除，这样 $a+b$ 只能等于 8 或 17。这样 $\overline{8ab2}$ 只可能为 8082，8802，8172，8712，8262，8622，8352，8532，8442，8892，8982。经检验知，其中只有 8712 和 8352 能被 8 整除。又由题意知数 $\overline{ab}$ 是一个质数，因此所求的四位数为 8712。

例 5 由 1，3，4，5，7，8 这六个数字所组成的六位数中，能被 11 整除的最大的数是什么？

思考方法　根据能被11整除的数的特征，这个六位数的奇位数字之和与偶位数字之和相减，所得的差是11的倍数（包括是0）。这个差显然不会超过这个六位数各位数字之和1+3+4+5+7+8=28。所以这个差只可能是11，22或0。由于各位数字之和为28，所以奇位数字之和与偶位数字之和或者都是偶数，或者都是奇数，所以它们的差不会是11。如果这个差是22，那么奇位数字的和与偶位数字的和只能一个为25，一个为3，但是题中所给的数字中任意三个数的和都不会是3，所以这是不可能的。如果这个差为0，那么奇位数字之和与偶位数字的和都是14，所以奇位数字与偶位数字一组为8，5，1；另一组为7，4，3。所以所求最大的数是875413。

习　题　2

1. 从0，3，5，7四个数字中任意选三个排成能同时被2，3，5整除的三位数，这样的三位数共有多少？

2. 要使六位数$\overline{15\square\square\square6}$能被36整除，而且所得的商最大，□内应填什么数？

3. 三个质数的倒数和为$\dfrac{311}{1001}$，这三个质数是什么？

4. 修改31743的某一个数字，可以得到823的倍数，问修改后的这个数是多少？

5. 五位数$\overline{4a97b}$能被3整除，它的最末两位数字$\overline{7b}$能被6整除，请求出这个五位数。

6. 已知一个六位数$a=\overline{ABCABC}$，它适合下列条件：(1) 含有质因数2和5；(2) 十位数字比个位数字多1；(3) 十位数字与百位数字的和是两个连续自然数的乘积；(4) a能被17整除。求不能整除a的最小的质数。