

# 沥青路面

## 结构与材料定量化理论

张嘎吱◎著

陕西出版集团  
陕西科学技术出版社

# 沥青路面结构与材料定量化理论

张嘎岐 著

西 安

陕 西 出 版 集 团

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

## 图书在版编目(CIP)数据

沥青路面结构与材料定量化理论/张嘎吱著. —西安:陕西科学技术出版社,2011.12

ISBN 978 - 7 - 5369 - 5334 - 5

I. ①沥… II. ①张… III. ①沥青路面 - 道路工程 - 工程结构 - 研究②沥青路面 - 建筑材料 - 研究 IV. ①U416.217

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 269988 号

---

出版者 陕西出版集团 陕西科学技术出版社  
西安北大街 147 号 邮编 710003  
电话(029)87211894 传真(029)87218236  
<http://www.snstp.com>

发行者 陕西出版集团 陕西科学技术出版社  
电话(029)87212206 87260001

印刷 长安大学雁塔印刷厂

规格 787mm × 1092mm 1/16

印张 31.5

字数 734 千字

版次 2011 年 12 月第 1 版  
2011 年 12 月第 1 次印刷

定价 58.00 元

---

版权所有 翻印必究

## 前 言

2004年我亲爱的女儿出生了。在她的成长过程中,我发现一颗糖果、一个玩具就可以给她带来无限的快乐。这一点深深影响并改变了我,使我不再想过以前的“心有所执”的生活。知足和好奇能给孩子带来快乐,同样也能给我带来快乐。知足充沛了我的精力,而好奇专注了我的视线。“沥青路面结构与材料定量设计”犹如一座从未被窥视的美国作家弗朗西丝·霍奇森·伯内特笔下的“秘密花园”,深深地吸引住了我的眼球。

在屡次循着他人路径试图进入但均告失败的情况下,我开始重新审视我的思维方式。女儿游戏时我行我素、天马行空般的想法给我的触动很大,使我意识到必须从本原出发,遵从直觉和洞察力的引导,不拘泥于细节的纠结,才有可能进入这座迷宫。

终有一天曙光出现了,兴冲冲的我急不可耐地从稍纵即逝的灵感之门挤进了“秘密花园”。花园里的景致回旋曲折,并非一下子能够尽收眼底。兜头而立的是一棵橡树,它之所以高大健硕,不是因为长得快,而是因为长得持久而缓慢。在它的荫护下,各色植物脉络有致,枝蔓横生。在领略了花园里外层令人目眩神迷的景致之后,强烈的好奇心又驱使我向内层进发。在披荆斩棘的行军过程中,真的有“其入愈深,其进愈难,其见愈奇”的感觉。

风景的奇幻深深攫住了我的心,使我完全忘记了外界的喧嚣。经过了将近7年持续不断的游历之后,我对“秘密花园”里景致的布局和方位已经基本上了然于心。据此集结成书,以飨未来的参观者。希望他们在我的启发下能找到更加“别有洞天”的景致。

本书的出版,得到了陕西科学技术出版社的支持和帮助,在此表示诚挚的感

谢! 硕士研究生易辉同学将书稿的所有草图用 CAD 进行了绘制, 在此一并表示感谢! 最后, 我将此书献给我贤慧的妻子刘楠女士和可爱的女儿张书源小朋友, 因为她们的快乐则是我最大的快乐。

张嘎吱

2011 年 11 月于西安

# 内容简介

本书是作者将近七年时间研究成果的总结。全书共分六章,第一章介绍了“沥青路面结构与材料定量化理论”的框架体系;第二章建立了基于概率流密度的沥青路面静力学理论;第三章建立了基于概率流密度的沥青路面动力学理论;第四章首先研究了沥青胶浆和沥青混合料动态参数的定量衰变规律和不可恢复变形的定量累积规律,接着给出了沥青混合料中动水压力的计算方法,最后提出了低温缩裂和温度疲劳开裂的定量预测方法;第五章提供了两个矿质集料掺配时的指导性原理,即“等疏松度原理”和“最大表面积原理”;第六章以第二章至第五章的内容为基础,提出了定量化设计沥青路面结构与各层材料的系统方法。

本书可作为道路与铁道工程专业和材料科学专业的研究人员、大学教师、博士和硕士的参考用书。

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	(1)
1.1 基于概率流密度的沥青路面静力学理论 .....	(2)
1.2 基于概率流密度的沥青路面动力学理论 .....	(2)
1.3 沥青混合料路用性能的定量预测 .....	(2)
1.4 矿质集料掺配理论 .....	(4)
1.5 沥青路面结构与材料的定量化设计 .....	(4)
<b>第二章 基于概率流密度的沥青路面静力学理论</b> .....	(6)
2.1 沥青混合料的最大扩散角 .....	(6)
2.2 沥青混合料静态抗压回弹模量的数学模型 .....	(14)
2.3 沥青路面概率流密度形式 .....	(16)
2.4 确定扩散弧面描述函数类型的步骤 .....	(138)
2.5 沥青混合料静态应力、应变线性可叠加性的证明 .....	(155)
2.6 真实荷载作用下沥青路面的静态应力、应变计算 .....	(156)
<b>第三章 基于概率流密度的沥青路面动力学理论</b> .....	(157)
3.1 沥青混合料动态抗压回弹模量的数学模型 .....	(157)
3.2 沥青混合料动态抗拉回弹模量定量预测模型 .....	(159)
3.3 完全约束条件下沥青混合料动态抗压回弹模量的数学模型 .....	(161)
3.4 双层沥青路面概率流密度形式 .....	(162)
3.5 $n$ 层沥青路面第 $n-1$ 层概率流密度形式 .....	(184)
3.6 $n$ 层沥青路面涉及 $x$ 层概率流密度形式 .....	(235)
3.7 沥青混合料动态应力、应变线性可叠加性的证明 .....	(330)
3.8 真实荷载作用下沥青路面的动态应力、应变计算 .....	(332)

<b>第四章 沥青混合料路用性能的定量预测</b> .....	(334)
4.1 沥青胶浆不可恢复变形和动态剪切模量的定量预测 .....	(334)
4.2 仅考虑疲劳效应时沥青胶浆动态参数的定量预测 .....	(353)
4.3 沥青胶浆能量阈值衰变的定量预测 .....	(354)
4.4 沥青混合料不可恢复变形和动态抗压回弹模量衰变的定量预测 .....	(355)
4.5 沥青混合料抗压强度的数学模型 .....	(426)
4.6 沥青混合料抗拉强度的数学模型 .....	(427)
4.7 沥青混合料孔隙水压力的定量预测 .....	(428)
4.8 沥青路面温度开裂的定量预测 .....	(432)
<b>第五章 矿质集料掺配理论</b> .....	(447)
5.1 等疏松度原理 .....	(447)
5.2 最大表面积原理 .....	(456)
<b>第六章 沥青路面结构与材料的定量化设计</b> .....	(469)
6.1 表面结构层的材料设计 .....	(469)
6.2 选择基质沥青和设计沥青胶浆 .....	(477)
6.3 结构与材料的一体化设计 .....	(480)
6.4 沥青路面疲劳开裂面积的定量预测 .....	(487)
6.5 沥青路面车辙深度的定量预测 .....	(490)
<b>参考文献</b> .....	(495)



# 第一章 绪 论

自从19世纪初用沥青筑路以来,人们一直没有停止对沥青路面设计方法方面的改进和探索。迄今为止,国内外曾经使用,或者正在使用的典型路面分析设计方法有 CBR 法、AASHTO 法、SHELL 法、AI 法以及近若干年在国内风靡一时的 SUPERPAVE 法。这些方法或者是以前实践经验的集大成者,或者是反映了一段时间内理论研究的最新成果。但随着行车速度的提高和汽车轴载的加重,沥青路面出现了许多按照现有方法均难以有效预测和控制的破坏现象,从而充分暴露了这些方法共同具有的许多整体性缺陷:<sup>[1]</sup>① 无法解决沥青路面结构设计、厚度设计和材料设计的一体化问题;② 不能根据荷载类型、环境特点和经济约束等条件定量设计或最优化设计路面的结构和材料;③ 不能预测不同结构组合沥青路面的路用性能在使用过程中的定量演化过程;④ 不能预测一定荷载和环境条件下,不同沥青混合料路用性能的定量衰变路径;⑤ 不能定量描述沥青混合料中沥青结合料和集料在荷载和环境的交互作用中分别承担的责任,以及这种责任与它们自身性质的关系。上述这些缺陷不是各自独立的,而是相互渗透和相互依存的,而且在现有的理论框架内是无法从根本上彻底解决的。总之,这些方法尤其是基于平面弹性层状理论的沥青路面力学——经验设计分析方法——已经是一条触礁的破木船,试图对它进行修补或者改造以适应新的应用环境显然无济于事,因此必须构建一种全新的定量化设计理论体系。

现代科学研究的方法论指出<sup>[2]</sup>,采用科学发展幼年阶段屡试不爽的归纳法是很难提出描述复杂物理现象,物理本质的形式方程的,而爱因斯坦提出的探索性演绎法则在理解复杂物理现象方面具有无可比拟的优势。因此对于影响因素众多,而且各因素交互作用的沥青混合料,要窥视和把握它性能变化的抽象本质,必须采用探索性演绎法,即在直觉和洞察力的引导下,既能深入问题内部识其精微,又能出乎问题外部把握整体,从而打通微观与宏观的因果脉络,确定所研究问题逻辑上的简单数学条件,这些数学条件完全地或者几乎完全地决定着描述现象变化的形式方程。一旦找到了足够强有力的数学条件,则仅需要关于事实的少量知识,就可以逻辑地推演出整个新理论框架的全貌。

本书作者充分运用“探索性演绎法”方法论,以沥青混合料的材料参数基本遵循摩尔-库仑理论,沥青黏度与剪切速率之间符合幂律关系等少量事实为理论起点,逻辑地推演出新的沥青路面理论框架。新理论框架分为以下五章内容:① 基于概率流密度的沥青路面静力学理论;② 基于概率流密度的沥青路面动力学理论;③ 沥青混合料路用性能的定量预测;④ 矿料掺配的等疏松度理论和最大表面积原理;⑤ 沥青路面材料与结构的定量化设计。下面简要介绍以上五章的核心内容。

## 1.1 基于概率流密度的沥青路面静力学理论

构建该理论的基本思路如下：

(1) 根据沥青混合料的内摩擦角, 沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径的比值, 沥青胶浆的静态剪切模量, 以及矿质集料接触点处的摩擦系数等参数, 建立了沥青混合料静态抗压回弹模量的数学模型。该数学模型还可定量计算静压荷载作用下, 沥青结合料和集料各自承担的荷载份额。

(2) 在竖向点荷载作用下, 沥青路面中的沥青混合料是在最大扩散角限定的圆锥范围内, 以概率流密度的形式向下扩散式传递荷载的。由沥青混合料的泊松比 $\mu$ 可以计算出最大扩散角。在最大扩散角限定的范围内, 假设扩散圆弧在竖向点荷载作用下虽然有所下降, 但基本不改变原来尺寸和形状, 据此可计算扩散圆弧上各点概率意义上的应力。

(3) 根据最小势能原理, 可以确定在多层材料组成的沥青路面中, 扩散到各层的荷载和应变的概率流密度函数。

(4) 沥青路面中某点应力、应变的概率流密度函数随着竖向点荷载到该点所在竖轴的垂直距离的变化而变化。要计算车辆静荷载在该点产生的总应力和总应变, 必须明确所有经过该点的扩散弧面的应力和应变概率流密度函数。在扩散弧面涉及的最多结构层次给定的情况下, 根据本书提供的步骤可以确定所有经过该点的扩散弧面的应力和应变概率流密度函数。

(5) 无论车辆轮胎与路面的接触压力呈现何种不均匀的分布类型, 只要将荷载分布所在的闭区域合理地划分为若干个小闭区域, 并将作用在小闭区域上的分布荷载用集中荷载代替, 便可通过对应力和应变概率流密度函数求和或积分的方式, 定量计算给定的接触压力分布类型在沥青路面结构层内任一点产生的概率意义上的应力和应变。

## 1.2 基于概率流密度的沥青路面动力学理论

(1) 根据沥青混合料的内摩擦角, 沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径的比值, 沥青胶浆的动态参数, 以及矿质集料接触点处的摩擦系数等参数, 建立沥青混合料动态抗压回弹模量的数学模型。该数学模型还可定量计算动荷载作用下, 沥青结合料和集料各自承担的动荷载份额。

(2)、(3)、(4) 和(5) 与沥青路面静力学理论中的相应步骤是类似的, 只不过计算出的是概率意义上的动态应力和动态应变。

## 1.3 沥青混合料路用性能的定量预测

(1) 在较低温度条件下, 可以仅考虑动荷载在沥青混合料中产生的疲劳效应, 不考虑引起的不可恢复塑性变形。此时根据沥青混合料在动荷载作用下的微分方程和沥青黏度与剪切速率之间的幂律关系, 可以建立较低温度条件下, 一次动荷载作用后沥青混合料的动态参数和动态抗压回弹模量的衰变值与沥青混合料的内摩擦角, 沥青胶浆厚度与矿

质集料当量半径的比值,沥青胶浆的动态剪切参数等内因以及动荷载的大小和频率,两次相邻动荷载之间的间歇时间等外因的定量关系。对此关系反复迭代计算,可以预测沥青胶浆的动态参数和沥青混合料动态抗压回弹模量的定量衰变规律。

(2) 在较高温条件下,可以仅考虑动荷载在沥青混合料中产生的不可恢复塑性变形,不考虑它留下的疲劳烙印。此时根据沥青混合料的考虑牵连加速度的动力响应微分方程和沥青黏度与剪切速率之间的幂律关系,可以建立较高温条件下,一次动荷载作用在沥青混合料中产生的不可恢复塑性变形量与沥青混合料的内摩擦角,沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径的比值,沥青胶浆的动态剪切参数、动荷载来临时刻沥青混合料应变和应变速率的初始条件等内因,以及动荷载的大小和频率,两次相邻动荷载之间的间歇时间等外因的定量关系。对此关系反复迭代计算,可以预测沥青混合料不可恢复塑性变形的定量增长规律。

(3) 在中等温度条件下,既要考虑动荷载在沥青混合料中产生的不可恢复塑性变形,又要考虑它留下的疲劳烙印。此时根据沥青混合料在动荷载作用下的微分方程,沥青黏度与剪切速率之间的幂律关系和能量守恒定律,可以建立在中等温度条件下,一次动荷载作用在沥青混合料中产生的不可恢复塑性变形量和留下的疲劳烙印与沥青混合料的内摩擦角,沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径的比值,沥青胶浆的动态剪切参数,甚至动荷载来临时刻沥青混合料应变和应变速率的初始条件等内因,以及动荷载的大小和频率,两次相邻动荷载之间的间歇时间等外因的定量关系。对此关系反复迭代计算,可以预测沥青混合料不可恢复塑性变形的定量增长规律和动态参数、动态抗压回弹模量的定量衰变规律。

作用在沥青混合料上的实际动荷载最大幅值并非是一成不变的,因此必须考虑以一定概率出现的动荷载组合对路用性能的影响。本书研究了以下两种类型的动荷载组合:①各个动荷载的幅值都很小,而且动荷载幅值间的差异也很小;②若干个动荷载或所有动荷载幅值都很大,或动荷载幅值间的差异很大。

在对沥青混合料衰变路径研究的基础上,本书提炼出了定量描述疲劳效应的数学条件,并进一步给出了计算疲劳极限处材料参数的数学方法。这一内容实际上提示了材料疲劳过程和疲劳极限的物理本质,因而对所有领域的材料寿命设计均具有里程碑意义。

(4) 动荷载在沥青混合料内产生的疲劳效应既体现为动态抗压回弹模量的衰变,又体现为动态抗压强度的衰减。为了描述后者随动荷载的变化情况,本书根据橡胶类材料的相关理论,建立了沥青胶浆的能量阈值与黏弹性体单位体积内有效弹性分子链数,每个弹性分子链的碳碳单键数目和单体单元个数,单体单元的长度以及断裂点处每个单键内储存的能量等参数间的近似定量关系;并结合动荷载作用前后沥青胶浆单位体积内有效弹性分子链数的变化情况,进一步建立了沥青胶浆的能量阈值或沥青混合料的挤压强度的近似衰变规律。此规律是确定沥青混合料疲劳开裂寿命的依据。另外,本书还建立了沥青混合料抗压强度和抗拉强度的数学模型,以揭示传统强度公式中参数的物理本质。

(5) 在假定沥青混合料孔隙与孔隙之间是连通的,不存在完全封闭孔隙,且孔隙的饱水率为100%等两个前提的基础上,定量预测了完全横向约束条件下,静荷载产生的静水压力和动荷载产生的动水压力,以及它们的存在对沥青胶浆应力、应变的影响。

(6) 沥青路面低温开裂分一次性降温骤然开裂和温度疲劳开裂两种类型。在研究前者时,首先根据沥青混合料的内摩擦角,沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径比值,以及沥青胶浆静态剪切模量等参数,建立了沥青混合料静态抗拉回弹模量的数学模型;然后根据矿质集料的总收缩应变,沥青胶浆的总收缩应变,以及沥青胶浆厚度与矿质集料当量半径比值等参数计算沥青混合料的总收缩应变;接着提出了“最终等效模量”概念,并给出了快速确定“最终等效模量”的思路;最后建立了定量预测沥青混合料温度应力的公式。研究温度疲劳开裂所采用的思路与研究沥青混合料疲劳问题的思路类似。

## 1.4 矿质集料掺配理论

本书提供了两个矿质集料掺配时的指导性原理,即“等疏松度原理”和“最大表面积原理”。前者能够计算出给定矿料按何种比例掺配时,混合矿料可以提供最大骨架强度;后者能够计算出使设计的沥青混合料既稳定,又符合骨架强度要求的矿料掺配比例。现做简要介绍:

(1) 等疏松度原理:同径球体在自然堆积状态下有相同的空隙率,此时认为它们的疏密程度相同,但不同径球体按不同比例掺配而成的混合球体在自然堆积状态下却有不同的空隙率。如果用疏松度指标表示同径球体自然堆积状态时的疏密程度,则根据拉格朗日乘法,可以计算出不同径球体按何种比例掺配时,混合球体在自然堆积状态下具有最小疏松度或者最小空隙率。因为这个原理认为同径球体在自然堆积状态下具有相同的疏松度,所以将它命名为等疏松度原理。采用此原理掺配而成的矿料级配其骨架强度能达到最大。

(2) 最大表面积原理:最大表面积原理是在骨架强度和混合矿料质量均不变的条件下,采用拉格朗日乘法寻找最均匀,最稳定级配的方法。该原理实现了沥青混合料矿料级配的定量化设计。

## 1.5 沥青路面结构与材料的定量化设计

(1) 表面结构层的材料设计:本书提供了表面结构层材料最优化设计的步骤,并给出了定量预测表面结构层材料设计年限末疲劳开裂面积,平均车辙深度,横向温度缩裂间距和水损害面积等路用性能的相应方法。另外,为了在材料设计时更加快速地选择基质沥青和设计沥青胶浆,给出了建立基质沥青和/或改性沥青各项路用性能分级标准的思路。

(2) 结构与材料的一体化设计:本书提供了沥青路面结构设计时应该遵循的基本原则,给出了进行某一结构层的材料设计时,如何定量考虑其他已知的和未知的结构层对该结构层疲劳开裂面积和平均车辙深度等路用性能的影响。

(3) 沥青路面疲劳开裂面积和车辙深度的定量预测:本书给出了在沥青路面的结构与材料设计工作完成之后,如何预测设计年限内各结构层疲劳开裂面积的定量增长规律,车辙深度的定量累积规律,以及设计年限末各结构层的最终疲劳开裂面积,最终车辙深度和整个沥青路面的最终车辙深度等的数学方法。

以上所述即为本书所构建的沥青路面结构与材料设计的新理论框架。该理论框架是  
与传统理论框架完全不同的,在逻辑上有其内在的自恰性,实现了沥青路面技术的整体  
性突破。

## 第二章 基于概率流密度的沥青路面静力学理论

在竖向静荷载作用下,沥青路面是在最大扩散角限定范围内以概率流密度的形式向下扩散式传递荷载的。最大扩散角的大小限定了荷载的扩散范围,而概率流密度函数决定了沥青路面内任一点的应力、应变。后者与各层材料参数、各层厚度及沥青路面总厚度等因素密切相关。

### 2.1 沥青混合料的最大扩散角

沥青混合料的集料是由形状多样而不规则的矿质粒料组成。虽然矿料形状千变万化,但将矿料形状抽象为球体并对球体进行受力分析,其结果还是对矿料级配的研究有重要的参考价值。传统上研究不同半径球体颗粒间的排列和填充关系只能解决空隙率问题,不能提供反映集料间摩擦和嵌挤程度的任何定量信息,为此下面将从更抽象的角度来研究这一问题。

工程实践表明,随着沥青混合料压实度的提高,粗集料间的接触点增多,粗集料的嵌挤程度越好。如果用一个当量球体来代表沥青混合料中的所有矿质粒料,当该当量球体上的接触点数应为所有矿质粒料有嵌挤效果的接触点数的平均值,该平均值在当量球体上均匀分布后呈现的疏密程度能够反映集料间的嵌挤程度。为了寻找描述嵌挤程度的定量指标,必须首先解决平均接触点数在当量球体表面均匀分配的方法问题。

当量球体表面三个相邻的接触点连线可以构成一个球面三角形,这一点使我们首先想到的是是否可采用微分几何中的 Gauss - Bonnet 公式<sup>[3]</sup>来分配接触点。当分割球面的三角形均为测地三角形时,Gauss - Bonnet 公式为:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_D K d\sigma \quad (2.1)$$

其中 $\alpha_i$ 是测地三角形的内角, $D$ 是测地三角形所包围的区域, $K$ 是球面 $S$ 的 Gauss 曲率。

当球面上的所有相邻接触点的连线三角形均为等边球面测地三角形时,上面的公式可变为:

$$3\alpha = \pi + \iint_D K d\sigma \quad (2.2)$$

如果 $D$ 是整个球面的面积时,则 $\iint_D K d\sigma = 4\pi$ 。如果球面被分为 $n$ 个球面等边测地三角形,则:

$$3\alpha = \pi + \frac{4\pi}{n}$$

$$\text{所以: } \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3n} \quad (2.3)$$

假设  $A$  为当量球体球面上的任一接触点, 则以  $A$  为一个顶点的球面等边测地三角形的个数  $t$  应为:

$$t = 2\pi / \left( \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3n} \right) = \frac{6n}{n+4} \quad (2.4)$$

由式(2.4)可知,  $n$  取绝大多数整数时,  $t$  都不是整数。所以在绝大多数情况下, 球面都不能被等分为若干个等边测地三角形, 因此按照以上思路试图将平均接触点数均匀地分配在球面上是行不通的。不过均匀分配接触点的思想对我们后面的研究工作仍具有重要的参考价值。

三轴试验能够测定沥青混合料的内摩擦角  $\varphi$  和黏结力  $c$ 。因为具有侧向约束, 所以传统上认为它比较接近于沥青路面的实际受力模式。这个方法曾经在我国一度得到过重视, 但由于内摩擦角和黏结力两个指标不仅敏感度低, 而且常常此高彼低, 致使在评价方法上有些困难。加上操作和经济方面的原因而逐渐遭受冷落。但实际上, 三轴试验内蕴着沥青混合料扩散式传递荷载的重要思想。

试验时它需要首先对圆柱形试件施加均匀的围压, 然后再以一定的加荷速度施加垂直压力, 直至试件破坏。均匀的围压和唯一的内摩擦角  $\varphi$  表明圆柱形试件以纵轴为中心而水平向外辐射的任何方向上具有相同的内摩擦角  $\varphi$ , 如图 2-1 所示。从当量球体的角度看, 上面的说法意味着当量球体在经过球心的不同竖直剖面切割而成的一系列圆具有相同的内摩擦角  $\varphi$ 。因此可将接触点分配方法的研究范围限定在当量球体的某一竖直剖面切割而成的圆上, 如图 2-2 所示。从理论上讲, 从图 2-2 上半圆传递下来的嵌挤摩擦阻力应等于下半圆传递出去的嵌挤摩擦阻力, 因此图 2-2 上半圆各接触点的位置与下半圆各接触点的位置关于水平轴  $A'A$  对称。另外, 因为  $\overrightarrow{OA}$  方向的内摩擦角与  $\overrightarrow{OA'}$  方向的内摩擦角相等, 所以图 2-2 中左半圆各接触点的位置与右半圆各接触点的位置关于竖轴  $B'B$  也对称。

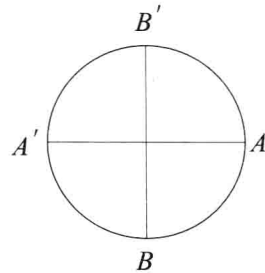
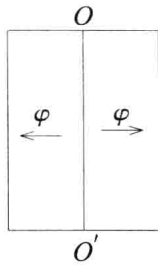
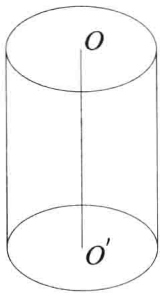


图 2-1 圆柱形试件的内摩擦角示意图

图 2-2 当量球体的竖直剖面示意图

根据上面的对称性原则, 如果有 8 个接触点等间距地分布在图 2-2 的圆上, 则其中的  $1/4$  圆弧  $\widehat{AB}$  上分配到的两个接触点  $a$  和  $b$  的具体位置如图 2-3 所示; 如果有 12 个接触点等间距地分布在图 2-2 的圆上, 则其中的  $1/4$  圆弧  $\widehat{AB}$  上分配到的 3 个接触点  $a$ 、 $b$  和  $c$  的具体位置如图 2-4 所示。细心的读者可能会问: 为什么不在圆弧的两端  $A$  和  $B$  分配接触点? 后面的研究将会说明, 如果在  $A$  和  $B$  上分配接触点, 则集料产生的内摩擦阻力将是无法克服的。假设

沥青混合料的矿质集料有一个未知接触点  $\alpha$ , 当接触点的分配以图 2-3 的形式出现时, 接触点  $\alpha$  为  $a$ 、或为  $b$  的概率均为  $\frac{1}{2}$ ; 当接触点的分配以图 2-4 的形式出现时, 接触点  $\alpha$  为  $a$ 、或为  $b$ 、或为  $c$  的概率均为  $\frac{1}{3}$ 。假设图 2-3 和图 2-4 对应的嵌挤度分别用内摩擦角  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  表示, 并且图 2-4 的嵌挤度  $\varphi_2$  比图 2-3 的嵌挤度  $\varphi_1$  大。如果其矿质集料的嵌挤度  $\varphi$  大于  $\varphi_1$  且小于  $\varphi_2$ , 那么它的接触点在圆弧  $\widehat{AB}$  上该如何分配?

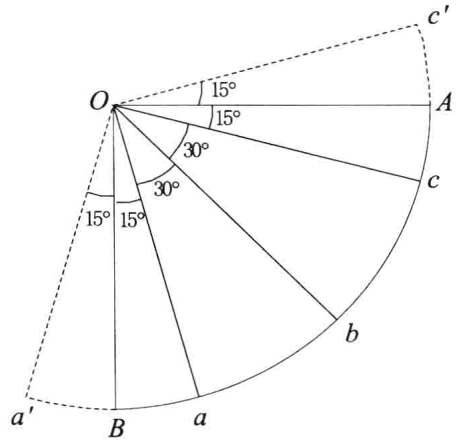
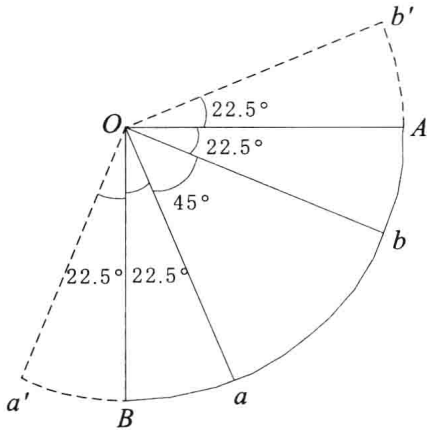


图 2-3 两个接触点在 1/4 圆弧上的分配示意图      图 2-4 三个接触点在 1/4 圆弧上的分配示意图  
也就是说, 理论上嵌挤度是可以连续变化的。当嵌挤度介于图 2-3 和图 2-4 之间时, 接触

点如何分配或变化以模拟连续的嵌挤力? 图 2-3 的接触点已经均匀地分配在圆弧  $\widehat{AB}$  上, 如果矿质集料的嵌挤度稍微大于图 2-3, 则圆弧  $\widehat{AB}$  的接触点应从 2 个增加为 3 个。为了保证嵌挤力变化的连续性, 图 2-5 所示的过渡模式应该是合理的, 即视图 2-5 中的  $b$  点为相重合的  $b$ 、 $c$  两点, 随着嵌挤力的增强,  $a$  和  $b$  两点沿着圆弧均匀地向下方移动, 增加的接触点  $c$  则沿着圆弧均匀地向上方移动。当达到某一嵌挤度时,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三点位置固定下来。那么此时,  $a$ 、 $b$  和  $c$  三点出现的概率分别是多少? 我们回顾一下图 2-3, 假设弧  $\widehat{AB}$  的中点是  $t$ , 接触点  $a$  的摆动范围是弧  $\widehat{Bt}$ , 它对应的圆心角为  $\alpha_{Bt}$ ; 接触点  $b$  的摆动范围是弧  $\widehat{At}$ , 它对应的圆心角为  $\alpha_{At}$ , 且  $\alpha_{Bt} = 45^\circ, \alpha_{At} = 45^\circ, \alpha_{Bt}/\alpha_{AB} = \alpha_{At}/\alpha_{AB} = 1/2$ 。因此由接触点在圆弧上的允许摆动范围可以确定它们各自出现的概率。根据这样的思路, 假设图 2-5 中弧  $\widehat{ab}$  和  $\widehat{bc}$  的中点分别是  $t_1$  和  $t_2$ , 则图 2-5 中  $a$  接触点出现的概率是  $(\alpha_{Bt_1}/\alpha_{AB})$ ,  $b$  和  $c$  两个接触点出现的总概率是  $(\alpha_{At_1}/\alpha_{AB})$ 。图 2-5 所示的过渡模式中  $b$  和  $c$  两个接触点最初是重合的。重合时  $b$  和  $c$  两个接触点各自出现的概率显然是相等的, 即都应等于  $(\alpha_{At_1}/2\alpha_{AB})$ 。两个接触点分开后, 从保证过渡模

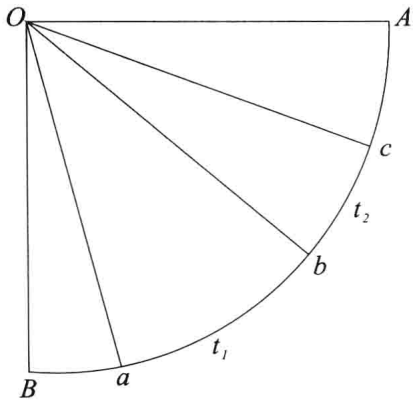


图 2-5 1/4 圆弧上嵌挤力连续变化示意图

式继续, 从保证过渡模



式嵌挤度的连续性角度考虑,  $b$  和  $c$  两个接触点各自出现的概率也应该等于  $\alpha_{At_1}/2\alpha_{AB}$ 。当嵌挤度进一步增大到图 2-4 时,  $\alpha_{Bt_1} = \alpha_{t_1t_2} = \alpha_{At_2} = 30^\circ$ , 因而  $a$ 、 $b$  和  $c$  三个接触点各自出现的概率都等于  $1/3$ 。如果按照上面的过渡模式思路计算接触点的出现概率, 则  $a$  接触点出现的概率等于  $\alpha_{Bt_1}/\alpha_{AB} = 30^\circ/90^\circ = \frac{1}{3}$ ,  $b$  和  $c$  两个接触点各自出现的概率应等于  $\alpha_{At_1}/2\alpha_{AB} = 60^\circ/(2 \times 90^\circ) = \frac{1}{3}$ 。可见, 上面计算各接触点出现概率的方法能够保证嵌挤度的连续性, 因而是近似合理的。

如果已知圆弧上存在三个接触点, 那么这三个接触点所处的位置应该如何确定? 或者换句话说,  $a$ 、 $b$  和  $c$  三个接触点之间是否存在依存关系。存在依存关系意味着已知  $c$  接触点的位置后,  $a$  和  $b$  两个接触点的位置也能够确定下来。在此我们用归纳法给出这个问题的答案。在图 2-3 中, 因为  $\alpha_{Ba} = \frac{1}{2}\alpha_{ab} = \alpha_{Ab} = 22.5^\circ$ , 所以  $\alpha_{Ba} = 1 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bb})$ ,  $\alpha_{Bb} = 3 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bb})$ ; 在图 2-4 中, 因为  $\alpha_{Ba} = \frac{1}{2}\alpha_{ab} = \frac{1}{2}\alpha_{bc} = \alpha_{Ac}$ , 所以  $\alpha_{Ba} = 1 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bc})$ ,  $\alpha_{Bb} = 3 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bc})$ ,  $\alpha_{Bc} = 5 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bc})$ ; 依据同样的思路, 已知三个接触点中最高接触点  $c$  点的位置时,  $\alpha_{Ba} = 1 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bc})$ ,  $\alpha_{Bb} = 3 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha_{Bc})$ 。因此, 圆弧  $\widehat{AB}$  上的所有接触点是相互依存的, 已知最高接触点的位置, 则其他接触点的位置也能相应确定。

根据上面的思路, 如果已知最高接触点  $Z$  的位置(图 2-6), 则也可以确定其他接触点的位置及所有接触点的出现概率。

假设弧  $\widehat{BZ}$  对应的圆心角为  $A$ , 当  $\frac{\pi}{2}/[2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)]$  为整数时, 圆弧上的接触点数  $n$  应为:

$$n = \frac{\pi}{2}/[2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)] \quad (2.5)$$

当  $\frac{\pi}{2}/[2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)]$  不为整数时,  $n = \text{In}\{1 + \frac{\pi}{2}/[2(\frac{\pi}{2} - A)]\}$  (2.6)

所有接触点位置及其出现的概率如表 2-1 所示:

表 2-1 接触点位置及其概率

接触点编号	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	$n$
接触点位置	$(1 \times 2 - 1) \cdot (\frac{\pi}{2} - A)$	$(2 \times 2 - 1) \cdot (\frac{\pi}{2} - A)$	$(3 \times 2 - 1) \cdot (\frac{\pi}{2} - A)$	...	$[(n-2) \times 2 - 1] \cdot (\frac{\pi}{2} - A)$	$[(n-1) \times 2 - 1] \cdot (\frac{\pi}{2} - A)$	$A$
接触点出现概率	$\frac{2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)}{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)}{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)}{\frac{\pi}{2}}$	...	$\frac{2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)}{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)(n-2)}{2 \cdot \frac{\pi}{2}}$	$\frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - A)(n-2)}{2 \cdot \frac{\pi}{2}}$

下面建立宏观上可以测量的物理量即内摩擦角  $\varphi$  与最高接触点  $Z$  所对应的圆心角  $A$  之间的定量关系。从理论上讲, 沥青混合料中任何一点的内摩擦角都是  $\varphi$ 。但实际上, 因为它是一种非均质性材料, 而且其中还存在形状复杂多变的孔隙, 所以  $\varphi$  值只能是概率意义上的数