算學小叢書

算術
整數之性質

林鶴一　加藤幸重郎著
崔朝慶譯

商務印書館發行

算術 整數之性質

第 一 章

倍 數

1. 倍數

某整數，用他整數除得商爲整數，無餘數，則被除之某整數，爲他整數之倍數。

例如 42 爲 2,3,6,7,14 各數之倍數，36 爲 2,3,4,6,12 各數之倍數。

某數之倍數，乃以某數乘任何整數而得之數，其被乘之整數爲若干，則乘得之數，卽某數之若干倍。（如 2 之倍數 6，乃以 2 乘 3 而得之數，6 卽 2 之 3 倍。）

注意 本篇專論整數，凡云數，皆整數也。

2. 倍數之和與差.

述倍數之和與差，當先詳細說明乘法之數種法則。

（甲） 各數之和與某數相乘之積，等於各數與某數相乘之積之和。

例如 $(8+7+4)\times 3=19\times 3=57$。

又 $(8+7+4)\times3=(8\times3)+(7\times3)+(4\times3)$

$=24+21+12=57$.

(乙) 二數之差與某數相乘之積,等於從被減數與某數相乘之積。減去減數與某數相乘之積之差。

例如 $(15-8)\times4=7\times4=28$.

又 $(15-8)\times4=(15\times4)-(8\times4)=60-32=28$.

(丙) 若干因數之積,因數之次序改變而積不變。

例如 $4\times7\times3=4\times3\times7=3\times7\times4$

$=3\times4\times7=7\times4\times3$

$=7\times3\times4=84$.

(丁) 若干因數之積,等於任意以各因數中之一因數與其餘因數之積相乘。

例如 $(4\times7)\times3=(4\times3)\times7=4\times(7\times3)=84$.

注意 此四種法則,其用甚廣,讀者固須了解其意,且須熟記於心。

某數之倍數之和與差,仍爲某數之倍數.

例如75爲5之倍數,35亦爲5之倍數,75+35卽110仍爲5之倍數,又75−35卽40,仍爲5之倍數.

此因 $75+35=(5\times15)+(5\times7)=5\times(15+7)=5\times22$.

$75-35=(5\times15)-(5\times7)=5\times(15-7)=5\times8$.

(見前(甲),(乙)之法則)

3. 倍數之倍數.

某數之倍數之倍數,仍爲某數之倍數.

例如12爲3之倍數,12之5倍60,仍爲3之倍數.

此因 $12=3\times4$，故 $12\times5=3\times4\times5=3\times(4\times5)=3\times20$。

(見前(丁)之法則)

4. 10,100,1000 等之倍數。

某整數之 10 倍 100 倍 1000 倍等，僅須添 0 (十倍添一箇 0，百倍添兩箇 0；千倍添三箇 0，餘可類推，) 於某整數之右端。

右端有一箇 0 之數，爲 10 之倍數，有兩箇 0 之數，爲 100 之倍數，有三箇 0 之數，爲 1000 之倍數。

5. 2 之倍數。

某數之末位爲 0，或爲 2 之倍數，其數爲 2 之倍數；末位非 0，又非 2 之倍數，其數非 2 之倍數。

例如: 3670 與 578，皆爲 2 之倍數。

此因 $3670=10\times367=2\times5\times367=2$ 之倍數之倍數。

$=2$ 之倍數。

$578=570+8=2$ 之倍數 $+2$ 之倍數 $=2$ 之倍數。

(參觀第 2 節及第 3 節)

注意　凡 2 之倍數之整數，名曰偶數，非 2 之倍數之整數，名曰奇數，

6. 5 之倍數。

某數之末位爲 0，或爲 5，其數爲 5 之倍數；末位非 0 又非 5，其數非 5 之倍數。

例如 380 與 305,皆爲 5 之倍數。

因 380 爲 10 之倍數,而 10 爲 5 之倍數,故 380 爲 5 之倍數之倍數,仍爲 5 之倍數(參觀第 3 節)。

又 305 爲 5 之倍數 300 與 5 之和,因 5 之倍數與 5 之倍數之和,仍爲 5 之倍數,故 305 仍爲 5 之倍數(參觀第 2 節)。

7. 4 之倍數. 25 之倍數.

某數右端之二位,俱爲 0,或爲 4 之倍數,其數爲 4 之倍數;末二位,不俱爲 0,又非 4 之倍數,其數非 4 之倍數。

某數右端之二位,俱爲 0,或爲 25 之倍數,其數爲 25 之倍數;末二位,不俱爲 0,又非 25 之倍數,其數非 25 之倍數。

例一. 500 與 624 皆爲 4 之倍數。

因 $500=100\times5=4\times25\times5=4$ 之倍數之倍數 $=4$ 之倍數。

又 $624=600+24=4$ 之倍數 $+4$ 之倍數 $=4$ 之倍數。

(參觀第 2 節第 3 節)

例二. 3700 與 575,皆爲 25 之倍數。

因 $3700=100\times37=25\times4\times37=25$ 之倍數之倍數。

$=25$ 之倍數。

又 $575=500+75=25$ 之倍數 $+25$ 之倍數 $=25$ 之倍數。

(參觀第 2 節第 3 節)

8. 8 之倍數 125 之倍數

某數之右端三位,俱爲0,或爲8之倍數,其數爲8之倍數;末三位,不俱爲0,又非8之倍數,其數非8之倍數.

某數之右端三位,俱爲0,或爲125之倍數 其數爲125之倍數,末三位,不俱爲0,又非125之倍數,其數非125之倍數.

例一. 4000與3832,皆爲8之倍數.

因　4000=1000×4=8×125×4=8之倍數之倍數

=8之倍數.

又　3832=3000+832=8之倍數+8之倍數=8之倍數.

(參觀第2節第3節)

例二　5000與4625,皆爲125之倍數.

因　5000=1000×5=125×8×5=125之倍數之倍數

=125之倍數.

又　4625=4000+625=125之倍數+125之倍數

=125之倍數.

(參觀第2節第3節)

9. 9之倍數

某數之數字之和爲9之倍數,其數爲9之倍數,數字之和非9之倍數,其數非9之倍數.

例如2736之數字之和2+7+3+6=18爲9之倍數,故2736爲9之倍數.

其理如次

$$2000=2\times1000=(2\times999)+2.$$

$$700=7\times100=(7\times99)+7.$$

$$30=3\times10=(3\times9)+3.$$

$$6=6.$$

$$2736=\underbrace{(2\times999)+(7\times99)+(3\times9)}_{}+2+7+3+6.$$

$$2736=\text{9 之倍數}+(2+7+3+6).$$

若 $(2+7+3+6)$ 爲 9 之倍數，則 2736 爲 9 之倍數，今 $2+7+3+6$ 適爲 9 之倍數，故知 2736 爲 9 之倍數。

如上所示之例，任何數皆等於 9 之倍數與其數字之和，故述於次之事，亦合於理。

以 9 除某數之餘數，等於以 9 除其數字之和之餘數。

例如以 9 除 3629，得商 403，餘 2，又以 9 除其數字和 $3+6+2+9$（即 20）亦餘 2。

因 $3629=9$ 之倍數 $+(3+6+2+9)=9$ 之倍數 $+(9$ 之倍數 $+2)$

$=9$ 之倍數 $+2$。

故以 9 除 3629，餘數爲 2。

10. 3 之倍數

某數之數字之和爲 3 之倍數，其數爲 3 之倍數，數字之和非 3 之倍數，其數非 3 之倍數。

例如 564 數字之和 $5+6+4$（即 15）爲 3 之倍數，即知 564 爲 3 之倍數。

因 $564=9$ 之倍數 $+(5+6+4=3)$ 之倍數 $+(5+6+4)$，今 $5+6+4$ 適爲 3 之倍數，故 564 爲 3 之倍數。

由此知述於次之事，亦合於理．

以 3 除某數之餘數，等於以 3 除其數字之和之餘數．

例如以 3 除 2561，得商 853，餘 2，又以 3 除其數字和 2+5+6+1（卽 14）亦餘 2．

因　2561＝9 之倍數＋(2+5+6+1)＝3 之倍數＋14

＝3 之倍數＋(3之倍數＋2)＝3 之倍數＋2．

故以 3 除 2561 之餘數，等於以 3 除 2+5+6+1（卽 14）之餘數．

11.　11 之倍數

從某數之右端起，奇數位之數字之和，等於偶數位之數字之和，或其差爲 11 之倍數，其數爲 11 之倍數．

例如　637813 之奇數位數字之和 3+8+3=14，偶數位數字之和 1+7+6=14，其二和數相等，故其數爲 11 之倍數．

又 63745 之奇數位數字 5+7+6=18，偶數位數字 4+3=7，二和數 18 與 7 之差爲 11 之倍數，故 63745 爲 11 之倍數．

詳示其理於次．

凡基數（從 1 至 9 之九數，名曰基數，）之右，附奇數 0 之數，等於 11 之倍數與其基數之差．

例如　700000＝11 之倍數－7．

因　700000＝7×100000＝7×(99990+10)

＝7×(99990+11－1)＝7×(11 之倍數－1)

＝11 之倍數－7．

又 8000＝8×1000＝8×(990+10)＝8×(990+11－1)

＝8×(11 之倍數－1)＝11 之倍數－8．

凡基數之右，附偶數 0 之數，等於 11 之倍數與其基數之和。

例如　$50000=5\times10000=5\times(9999+1)$

$=5\times(11\text{之倍數}+1)=11\text{之倍數}+5$。

又　$800=8\times100=8\times(99+1)=8\times(11\text{之倍數}+1)$

$=11\text{之倍數}+8$。

由此詳解 63745 為 11 之倍數於次。

$$
\begin{array}{r@{}l}
60000 &= 11\text{之倍數}+6\text{。}\\
3000 &= 11\text{之倍數}-3\text{。}\\
700 &= 11\text{之倍數}+7\text{。}\\
40 &= 11\text{之倍數}-4\text{。}\\
5 &= \qquad\qquad 5,\\
\hline
63745 &= 11\text{之倍數}+6-3+7-4+5\\
&= 11\text{之倍數}+\{(6+7+5)-(3+4)\}\text{。}
\end{array}
$$

因 $(6+7+5)-(3+4)$ 為 11 之倍數，故知 63745 為 11 之倍數。

又依同法計算 629783 為 11 之倍數。

$629783=11\text{之倍數}+(3+7+2)-(6+9+8)$

$=11\text{之倍數}-\{(6+9+8)-(3+7+2)\}$。

因 $(6+9+8)-(3+7+2)$ 為 11 之倍數，故知 629783 為 11 之倍數，

由上所說明之理由，知述於次之事，亦合於理。

任何數，皆等於 11 之某倍數加其奇數位之各數字而減其偶數位之各數字。

故以 11 除某數，其餘數等於從其奇數位之數字之和減其偶數位之數字之和，(若奇數位之數字之和，小則酌加 11 之若干倍，而以偶數位之數字之和減之，)或等於以 11 除其相減之數之餘數。

例如以 11 除 84567 之餘數 10，卽從 (8+5+7) 減 (4+6) 之餘數。又以 11 除 678531 之餘數 7，卽從 (1+5+7+11) 減 (3+8+6) 之餘數也。

12. 用 9 及 11 驗運算有無錯誤.

驗加法及乘法，先求以 9 或 11 除被加數或各因數之餘數，此各餘數相加或相乘，又以 9 或 11 除之，得餘數，加法之和乘法之積，亦以 9 或 11 除之，所得之餘數，與前所得之餘數相等，則其運算多分不誤。

例一　驗加法

4568……………5.(用 9 驗)　……………………3.(用 11 驗)

7391……………2.　……………………10.

7854……………6.　……………………0.

53469……………5.　……………………9.

13470……………6.　……………………6.

+58143……………3.　……………………8.

144895………4.　22……4.　……3.　36………3.

例二　驗乘法

3748…………4.(用 9 驗)　…………………8.(用 11 驗)

×　6236…………8.　…………………10.

積23372528……5.　32………5　3.　80………3.

證明用 9 驗加法之理由如次.

(9 之倍數+A)+(9 之倍數+B)+(9 之倍數+C)+………

=(若干 9 之倍數之和+A+B+C+………).

故以 9 除各被加數，所得各餘數之和，復用 9 除之之餘數，等於以 9 除

被加數之和所得之餘數。

用11驗加法之理由,與用9驗同。

證明用9驗乘法之理由如次。

(9之倍數+A)×(9之倍數+B)

=9之倍數×(9之倍數+B)+A×(9之倍數+B)

=(9之倍數×9之倍數)+(9之倍數×B)+(A×9之倍數)+(B×A)

=9之倍數+A×B。

故以9除各因數所得各餘數相乘,復以9除之之餘數,等於以9除因數之積之餘數。

用11驗乘法之理由,與用9驗同。

驗減法,先求以9或11除減數及差數之餘數相加復以9或11除之之餘數,次求以9或11除被減數之餘數,若兩餘數相等,則其運算多分不誤。

其例如次

985697	……………8。(用9驗)	………9。(用11驗)
−759876	……………6。	………7。
225821	……………2。	………2。
	2+6=8。	2+7=9。

驗除法,先求以9或11除除數及商數之餘數相乘復以9或11除之餘數,次求以9或11除被除數之餘數,若兩餘數相等,則其運算多分不誤。

其例如次

157)1288342(8206

  1256

  323

314	157……4。(用9驗)	………3。(用11驗)
942	8206……7。	………0。
942	1288342……1。	………0。
0	4×7=28……1。	3×0=0。

若以除數除被除數，不能適盡，有賸餘之數，宜從以9或11除被除數之餘數，減以9或11除賸餘之數之餘數，與以9或11除除數及商數之餘數相乘復以9或11除之餘數比較。

其例如次

438)3202791(7312

3066		
1367		
1314		
539	(用9驗)	(用11驗)
438	438………6.	…………9。
1011	7312………4。	…………8。
876	3202791………6。	…………9。
135	135………0。	…………3。
	6×4=24……6。	9×8=72……6。
	6−0=6。	9−3=6。

減法與加法相反，減數與差數之和，等於被減數，除法與乘法相反，除數與商數之積，等於被除數，(或從被除數減賸餘數)故驗減法及除法之理，卽從驗加法及乘法之理而出。

問題 1

1. 100 爲何數之倍數.

2. 999 以內有幾偶數.

3. 從次之七數中,選出 2 之倍數.

131, 180, 300, 477, 302, 4309, 12345.

4. 從次之八數中,選出 5 之倍數.

207, 400, 305, 709, 1015, 3136, 8196, 2005.

5. 從小於 100 之奇數中,選出 5 之倍數.

6. 從次之七數中,選出 4 之倍數.

114, 346, 820, 910, 100, 304, 708.

7. 從 1 至 100 之各數中,選出 4 之倍數,其單位之數相同者,合爲一組記之.

8. 從次之五數中,選出 25 之倍數.

3025, 5765, 2775, 8740, 74350.

9. 從 1 至 1000 之各數中,選出 25 之倍數,其十位之數相同者,合爲一組記之.

10. 從次之六數中,選出 8 之倍數.

375, 1200, 784, 2376, 3760, 1356.

11. 從次之八數中,選出 125 之倍數.

375, 1200, 2375, 725, 1675, 12000, 3625, 42000.

12. 從次之七數中,選出 9 之倍數.

117, 207, 3609, 8001, 4653, 2604, 36549.

13. 次之五數,各以 9 除之,記其餘數.

23678, 37658, 96785, 1234567, 854321.

14. 從次之七數中,選出 3 之倍數。

51, 307, 5810, 23540, 81654, 4021, 528.

15. 從次之五數中,選出 11 之倍數。

495, 8439, 73909, 505050, 3075430.

16. 記於次之式,實行乘法減法除法後,用 9 及 11 驗算。

$(34567^3-7654^3)\div(34567-7654)$。

17. 求次之式中＊處之數字, 5＊2×33=19＊36.

18. 記於次之式之某數爲整數, 求式之右邊＊處之數字,又問某數究爲何數。 某數 ×9=93＊718.

19. 從某數減其數字之和,餘數爲 2＊76. 求＊處之數字。

第二章

約數

13. 約數.

整數甲,用整數乙除之,得整數之商,無餘數,則乙數為甲數之約數.

例如7為42之約數,6為36之約數.

若甲數為乙數之倍數,則乙數為甲數之約數;若乙數為甲數之約數,則甲數為乙數之倍數.

約數與除數,微有區別,除數除被除數,或適盡,或有餘數,約數約某數,須無餘數約者,約某數為簡單之數,使便於計算也.

注意　在前章所述2,3,4,5,8,9,11等倍數之性質之數,即有此等約數之性質之數也.

14. 質數.

凡以1乘任何數,其數不變,故整數與以1乘其數之積無異,由此知整數至少有1與本數之兩約數.

除1與本數之外,無約數之整數,名曰質數.

質數外之整數,對於質數而言,則謂之非質數.

例如2,3,5,7等為質數,4,6,8,9等為非質數.

15. 100以內之質數.

求100以內之各質數法,先順次記從1至100之各數,從4起,每隔

一奇數之各偶數，皆用斜畫塗消，又從 9 起，每隔二數之各數，皆用斜畫塗消，又從 25 起，每隔四數之各數，皆用斜畫塗消，又從 49 起，每隔六數之各數，皆用斜畫塗消，所餘未塗消之數，皆爲質數。

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

此爲西曆紀元前第三世紀時，耶列多德尼 (Eratosthenes) 發明之求質數法，泰西算書中，稱爲耶列多德尼之篩。

16. 100 以外之質數。

欲分別大於 100 之各數，孰爲質數，孰爲非質數，惟有繼續用耶列多德尼之法求之，若有大於 100 之某數，欲知其是否質數，可用 2,3,5,7 等質數一一試除，至商數不大於除數，而猶有餘數，則其數必爲質數。

例如欲知 523 是否質數，順次以 2,3,5,7 等質數一一試除，至用 23 試除，商數爲 22，(小於 23) 仍有餘數，即能決定 523 爲質數。

因已用 2,3,5,7,……23 各質數次第除 523，皆不能適盡．設除數再

大於 23，則商數更小於 22，若有大於 23 之數爲能約 523 之數，早有小於 23 之數爲能約 523 之數，故至用 23 試除 523，仍有餘數，即知除 1 與 523 之外無約數，無庸以大於 23 之數繼續試除 523，可決定 523 爲質數.

今記錄 100 至 500 間之七十質數於次，以備查閱.

101	103	107	109	113	127	131	137	139
149	151	157	163	167	173	179	181	191
193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283
293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499		

17. 分解非質數之質因數.

非質數之因數中之質數，名曰質因數

凡非質數，皆得以質因數之積表之.

求非質數之因數中之質數，名曰分解質因數.

例　分解 968 爲質因數如次.

運算

$$\begin{array}{r|l} 2 & 968 \\ \hline 2 & 484 \\ \hline 2 & 242 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline & 11 \end{array}$$

答　$968=2\times2\times2\times11\times11$

或 $968=2^3\times11^2$.

驗算 $2\times2\times2\times11\times11=968$.