

好玩的

数学

修订版

张景中 主编

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

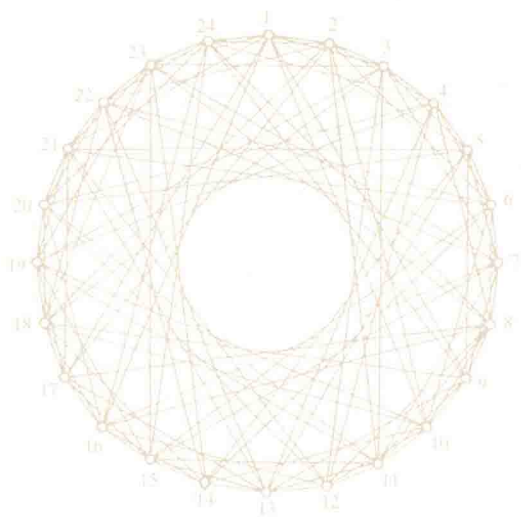
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

数学志异

王树和 著

满纸悖论危机混沌言
一部数学思想志异书



科学出版社

好玩的



数学

(修订版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”
科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

数学志异

王树和 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要内容包括数学悖论,第一次、第二次、第三次数学危机,哥德尔不可判定命题、混沌等非平凡问题;离散数学当中的有趣问题;数学思想与数学哲学当中的敏感问题等。如将来数学还会产生悖论与危机吗?尚未解决的数学难题是否为不可判定命题?既然是确定性系统为什么会产生轰动?愚公移山式的穷举法为什么可能无效?牛顿创立的微积分能得100分吗?数学家是些什么人?数学定理为什么要证明?等等。本书集知识性、思想性和趣味性为一体,说理直观严密,通俗易懂,充分展示数学之美妙,之深刻。

本书读者对象为中学生、大学生、中小学教师及数学工作者。

图书在版编目(CIP)数据

数学志异/王树和著. —修订本. —北京:科学出版社, 2015. 3

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-043579-8

I. ①数… II. ①王… III. ①数学—普及读物 IV. ①1.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 044259 号

责任编辑:霍羽升 李 敏 杨 波 / 责任校对:胡小洁

责任印制:张 倩 / 整体设计:黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年4月第 三 版 开本:720×1000 1/16

2015年4月第一次印刷 印张:11 1/2

字数:183 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自 2004 年 10 月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印 10 余次，平均发行量近 45 000 套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于 2004 年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006 年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009 年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为 B5 开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编 者
2015 年 3 月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是

人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无学生版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中

外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x + 4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x + 4) / 5$$

$$b = 4(x + 4) / 25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1 / (113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

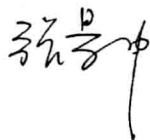
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

A handwritten signature in black ink, appearing to be '张汉阳' (Zhang Hanyang), written in a cursive style.

2004年9月9日

前 言

任何研究工作的开端，几乎都是极不完善的尝试，为了寻求真理，我们是注定要经历挫折和失败的。

——狄德罗 (D. Diderot, 1713—1784, 法国启蒙思想家)

清代文豪蒲松龄著奇书《聊斋志异》，借鬼狐故事伐恶扬善，名冠文学史，只可惜蒲留仙老先生的书用文言写成，令今日一般读者较为费解，《聊斋志异》已有不少版本的白话文译本发行，深受大众欢迎。

数学当中也有很多难理解、难证明、难计算的问题，犹如《聊斋志异》中众多的神奇故事。例如由正方形对角线的长引发的第一次数学危机，由理发师悖论（罗素悖论）引发的第三次数学危机，在简单确定的规律支配下却孕育出混沌的紊乱运动等；又如臭名昭著的 $3x+1$ 问题（ x 为偶数，则取其半； x 为奇数，则取 $3x+1$ 之半；得出的结果再如上“取半”，实验与猜想最后会得出1），它是至今数学界无力解决的问题之一，到现在无人证其真，亦无人证其伪。美籍奥地利数学家哥德尔严格证明了确乎存在既不能证其真亦不能证其伪的命题！如果问： π 的小数部分会不会有100个8连贯出现，即

$$\pi = 3.14159265 \cdots \underbrace{888 \cdots 888}_{100 \text{ 个 } 8} \cdots ?$$

如果有，有几处？在小数点后第几位上发生？这种“坏问题”数学中到处都有，要多少有多少。种种涉及数学与计算

机数学的尖锐、重大的问题，很值得我们关心。但是，在现代数学专著当中，设定了繁多的专用符号和艰涩的定义、定理，弄得连非本分支的数学家们都成了隔山之人，感到好似“两个黄鹂鸣翠柳”，不知所云。

能否拣一些现代的数学内容和生动有趣的经典数学内容，用“普通话”写一本貌似《聊斋志异》那般有思想哲理、活泼巧妙的数学科普著作，来传播普及这些重要、优雅的数学知识呢？本书对此做了尝试，在兼顾数学知识的趣味性和严肃性的前提下，最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”，亦“知其所以然”，力争通而不俗，美而不媚。

本书几乎完全用 $+-\times\div$ 解决问题， $\lim$ 只用过不多几次，力争不沾微积分等现代数学中非初等运算的边，使得凡具中学文化的读者百分之百地可以读懂全书。当然，数学专业的师生也不至于认为太肤浅。如此使得各个层次的读者都可以在欢快轻松的阅读欣赏当中，学到新知识，见识新技巧，在幽默的智能娱乐之中，体会和进一步思考现代数学的本质和是非。

书中的标题是“摘要”式的，有的比较具体，写作时则借题发挥，多讲了一些与该标题相关的道理和要例。

但愿本书能介绍你与数学结缘，如果你被书中那些诱人的问题和技巧迷住而流连忘返，从此痴情数学，提升了数学的悟性和技能，那正是作者的初衷。

国际数学联盟（IMU）把2000年定为“世界数学年”，并且制订了如下宗旨：

“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解。”

本书按上述宗旨献给广大的数学爱好者和“数学不爱好者”。我相信，你读了这本书之后就会与别人争辩说，数学绝不像有些人传说的那样枯燥乏味。如果你原不是一位数学爱

好者，当你看完这本书，数学的面具被你亲手揭掉之后，你已经由一个数学的疏远者变成数学爱好者了。但愿本书是你永远的好朋友。

作者学识浅薄，文字工夫亦不深，不敢说写作愿望已经达到，盼请读者与同行批评。

本书第一版与第二版发行近 3 万册，深受各阶层数学爱好者的厚爱，今做普及版，根据读者与科学出版社编辑的意见，进行了全面修正、润色和精炼。在此对关心本书的诸位同志与众读者深表谢忱。更要感谢我的学长和同事张景中院士，他对本书的写作贡献了重要意见，使之增色不少。

王树和

2008 年 1 月

于中国科学技术大学

目 录

丛书修订版前言

第一版总序

前言

01 离散篇	1
1.1 神龟龙马, 洛书河图	1
1.2 三只鸽子两个窝	4
1.3 好括号和姊妹洗碗	7
1.4 兔子不是濒危物种	12
1.5 兔儿兔孙与优选法	17
1.6 36 军官问题与拉丁方正交试验	19
1.7 这些钱怎么花	23
1.8 劝君多画示意图	25
1.9 棋盘之旅	29
1.10 中国筹码游戏	32
1.11 组合在几何中作怪	34
1.12 投票排列名次是否公正	38
1.13 合时容易分时难	42
1.14 夫妇入席问题	45
1.15 把握机会, 成自险出	46
1.16 摔碎的砝码还能用吗	53
1.17 排队打水	54
1.18 不患寡而患不均	57
1.19 核按钮的钥匙	59

02 混沌篇	61
2.1 面包师抻面与砍头映射	61
2.2 混沌礼赞	65
2.3 北京拉面的数学模型	68
2.4 三角帐篷中的混沌	70
2.5 蒙古包里的混沌	73
2.6 面片上的混沌	74
2.7 非整数维数的奇怪不变集	76
2.8 生命游戏	78
2.9 20 世纪最伟大的数学家之一	80
2.10 混沌学座谈纪要	81
03 危机篇	87
3.1 毕达哥拉斯学派何以把门生投入大海	87
3.2 有理数平易近人, 可数可列	90
3.3 无理数神出鬼没, 数不胜数	91
3.4 有理数是米, 无理数是汤	92
3.5 问遍天堂地狱, 谁人知 π 真面貌	93
3.6 为全人类增添光彩的人物	97
3.7 此人就是一所科学院	100
3.8 第二次数学危机	102
3.9 代牛顿圈改《流数简论》	105
3.10 皮囊悖论	109
3.11 整体等于其半	110
3.12 神秘的康托尔尘集	113
3.13 理发师悖论与第三次数学危机	116
3.14 悖论欣赏	117
3.15 哥德尔抖出了数学的家丑	124
04 思想篇	126
4.1 从秃头悖论谈起	126
4.2 数学内容是发现的还是发明的	129
4.3 应用数学是坏数学吗	130