XINZHUANTI JIAOCHENG

新专题教程

杨象富 主编

高中数学 5

数列与数学归纳法

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 5

数列与数学归纳法

主　编　杨象富

参　编　柴盛楣　贝跃敏　罗伟洲

章以东　郑新君　徐明月

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程.高中数学 5　数列与数学归纳法/杨象富主编.—上海:华东师范大学出版社,2004.3
ISBN 978-7-5617-3766-8

Ⅰ.新...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021816 号

新专题教程
高中数学 5·数列与数学归纳法

主　　编　杨象富
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　武宏琳
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16 开
印　　张　13.5
字　　数　256 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 7 月第三次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3766-8/G·2073
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学 5 个学科，共计 50 个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用 丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学 丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

前 言

2003年，教育部颁发《普通高中数学课程标准(实验)》，体现“三个面向”的精神，这是中国数学教育史上的一件大事．华东师大出版社与时偕行，及时推出《新专题教程》．我与14位在教学第一线的合作者(他们大都是特级、高级教师)，荣幸受聘编写本书，特别在以下四方面作了努力：

(一) 学习《标准》，体现《标准》：新颁的《标准》在课程的基本理念、设计思路、课程目标、内容标准以及实施建议诸方面都有新的表述和要求，高考大纲(说明)也随之改写，本书力求体现以上的新要求和新精神．

(二) 广泛搜炼，求精务实：学习数学离不开读题和解题，而且是相当数量和质量的题．但题海无边，题有好差，解有优劣，我们广泛搜炼，选题求精(基础性、典型性、时代性、多样性)，解法求美，力图举一反三，以一当十．

(三) 抓住“三基”，能力立意：“万丈高楼平地起”，本书重视引导读者理解和掌握基础知识、基本思想，培养基本技能，培养读者发现、提出、解决数学问题的能力，发展思维能力，特别是探究、创新能力和应用意识．

(四) 易学易用，拾级登高：本书精心编排，可拾级而上，起点较低，终点较高，练习分“基础训练”和“能力提高”，并附有提示或参考答案，各类读者可各取所需，各有收获．本书重视返璞归真，深入浅出，抓住重点，把握关键，化难难点，点拨概括，变厚为薄，使读者平稳地达到较高的水平．

杨象富

CONTENTS

目　录

高中数学5・数列与数学归纳法

CONTENTS
目　录

高中数学5·数列与数学归纳法

专题 1

数列的概念和表示法

【知识梳理】

1. 数列的概念

按一定次序排列的一列数叫做数列,数列中的每一个数都叫做这个数列的项.

从映射、函数的观点看,数列可以看作是一个定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1, 2, \cdots, n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

数列是一种特殊的函数.

2. 数列的表示法

数列的一般形式:$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$,有时简记为$\{a_n\}$,其中 a_n 是数列的第 n 项(通项).

表示数列可用列举法、图象法和解析法等.

图象法:以(n, a_n)为坐标,数列可以用直角坐标系中的一串孤立的点来表示.

解析法:可以用数列的通项公式或递推关系来表示.如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用 $a_n = f(n)$ 来表示,这个公式就叫做这个数列的通项公式.

如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项(或前几项),且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.递推公式也是给出数列的一种重要方法.

用列表法表示质数数列:

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	2	3	5	7	11	$\cdots$

递推公式如:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_n = f(a_{n-1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = a,\ a_2 = b, \\ a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}). \end{cases}$$

3. 数列的分类

按项数有限或无限,可分为有穷数列(如数列:1, 2, 3, 4)和无穷数列(如数列:1, 2, 3, 4, $\cdots$);按项与项之间的大小关系,可分为递增数列、递减数列、摆动数列和常数数列等.

可联系函数的单调性.

显然有：

$S_n = S_{n-1} + a_n$，

$a_{n-1} + a_n = S_n - S_{n-2}$ 等.

4. 数列$\{a_n\}$的前 n 项之和S_n

记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则有如下关系：

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}^*). \end{cases}$$

【分类举例】

1. 通项公式的探求与应用

这是重要的基础题，有利于培养观察、分析、联想和归纳能力.

例 1 写出下列数列的一个通项公式，使它的前 4 项如下：

(1) $-2, 3, -4, 5$；　(2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{20}$；

(3) $-1, \frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{8}$；　(4) $\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{8}}{10}, \frac{\sqrt{15}}{17}, \frac{\sqrt{24}}{26}$；

(5) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999$；　(6) $5, 55, 555, 5555$.

分析 用含 n 的解析式表示 a_n.

注意符号变化和分子分母的结构.

解 (1) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)$.

(2) $a_n = -\frac{1}{n(n+1)}$.　(3) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

(4) $a_n = \frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)^2+1}$.　(5) $a_n = 1-(0.1)^n$.

(6) 联想数列(5)，可得 $a_n = \frac{5}{9}(10^n - 1)$.

说明 仅给出一个数列的前几项，这个数列一般尚不确定，因此通项公式并不是唯一的. 如数列(1)的通项公式也可以是

$a_n = (-1)^{n+2} \cdot (n+1) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ 等，

目前只需选一个较简单的公式.

你能写出其他的表达式吗？

例 2 写出下列数列的一个通项公式：

(1) $0, 1, 0, 1, 0, 1$；

(2) a, b, a, b, a, b；

(3) $1, 1, 2, 2, 3, 3$.

解 (1) 可表示为 $a_n = \begin{cases} 0 & (n\text{ 为奇数}), \\ 1 & (n\text{ 为偶数}) \end{cases}$ 或 $a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$.

注意到 $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$，$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$，$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$.

(2) 注意到 $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$，$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$，可得

$$a_n = \frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a-b}{2}.$$

(3) 注意到 $a_1=\frac{1+1}{2}$，$a_2=\frac{2+0}{2}$，$a_3=\frac{3+1}{2}$，$a_4=\frac{4+0}{2}$ 等，可得 $a_n=\frac{1}{4}[2n+1-(-1)^n]$.

$$a_n=\frac{n+\frac{1}{2}[1-(-1)^n]}{2}=\frac{1}{4}[2n+1-(-1)^n].$$

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

这个数列有数值最大的项吗?

分析 假设数值最大的项为 a_k，则必须满足 $a_k\geqslant a_{k-1}$ 且 $a_k\geqslant a_{k+1}$.

数列是特殊的函数.

解 由 $\begin{cases}(k+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^k\geqslant(k+1)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1},\\(k+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^k\geqslant(k+3)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k+1},\end{cases}$ 整理得

$$\begin{cases}(k+2)\cdot\frac{9}{10}\geqslant k+1,\\k+2\geqslant(k+3)\cdot\frac{9}{10}.\end{cases}$$

解得 $7\leqslant k\leqslant 8$. 所以，当 $n=7$ 或 8 时，a_n 取得最大值 $\frac{9^8}{10^7}$.

例 4 已知两个数列：

3, 7, 11, …, 139;

2, 9, 16, …, 142.

求它们所有的公共项.

分析 先探求各数列的通项公式.

分别记两数列为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，则它们的通项公式为

$$a_n=4n-1\ (n\in\mathbf{N}^*,\ n\leqslant 35);$$

$$b_k=7k-5\ (k\in\mathbf{N}^*,\ k\leqslant 21).$$

写出通项公式是关键的一环.

要使 $4n-1=7k-5$，即 $4(n+1)=7k$.

$4(n+1)=7\cdot 4t$.

$n=$

由于 4 与 7 互质，故令 $k=4t\ (t\leqslant 5)$，即有

$$n=7t-1\ (t\leqslant 5).$$

当 $t=1, 2, 3, 4, 5$ 时，相应的有

$$n=6, 13, 20, 27, 34;\ k=4, 8, 12, 16, 20.$$

所以，两数列的公共项是 23, 51, 79, 107, 135.

由已知等式，你能得出 a_1， a_2， a_3，…吗？

例 5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n+1)(n+2),$$

求 a_n.

解 当 $n \geqslant 2$ 时，由已知等式得

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = n(n+1). \quad ①$$

把已知等式与①式相减，得

$$na_n = (n+1)(n+2) - n(n+1).$$

故 $$a_n = \frac{2(n+1)}{n}\ (n \geqslant 2).$$

当 $n = 1$ 时，$a_1 = 2 \times 3 = 6$，不满足上式，所以

$$a_n = \begin{cases} 6 & (n=1), \\ \dfrac{2(n+1)}{n} & (n \geqslant 2). \end{cases}$$

$n^2+3n+2-n^2-n$

$\frac{3n+2}{n}$ $n \geqslant 2$

例 6 整数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\ (n = 2, 3, \cdots), \quad ①$$

求这样的数列的个数.

解 由已知等式①可知

递推关系.

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad ②$$

②－①，即得

$$a_n \cdot a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = n(n+1)\ (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad ③$$

在③中取 $n = 1$，得 $a_1 \cdot a_2 = 2$，又因为 a_1 和 a_2 都是整数，所以有四种可能：

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2 \end{cases} 或 \begin{cases} a_1 = -1, \\ a_2 = -2 \end{cases} 或 \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_2 = 1 \end{cases} 或 \begin{cases} a_1 = -2, \\ a_2 = -1. \end{cases} \quad ④$$

你能写出这 4 个数列吗？

因此，这样的数列有 4 个.

2. 由递推关系给出的数列

例 7 分别写出下列数列$\{a_n\}$的前 4 项：

(1) $a_1=-1$, $a_n=\frac{2}{a_{n-1}}+1\ (n\geqslant 2)$；

(2) $a_1=\frac{1}{3}$, $a_n^2-2a_na_{n-1}=3a_{n-1}^2$,且 $a_n>a_{n-1}(n\geqslant 2)$.

递推公式是给出数列的一种重要方法,有广泛的应用.

解 (1) $a_2=\frac{2}{a_1}+1=\frac{2}{-1}+1=-1$,同样,$a_3=-1$, $a_4=-1$. 这数列的前 4 项为-1, -1, -1, -1.

这是一个常数数列.

(2) 已知等式即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-3a_{n-1})=0$.

由 $a_n>a_{n-1}$,得 $a_n>a_1>0$,得 $a_n=3a_{n-1}$. 由 $a_1=\frac{1}{3}$,可知这数列的前 4 项为$\frac{1}{3}$, 1, 3, 9.

归结为递推式 $a_n=3a_{n-1}$.

例 8 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta$,且 $a_2=3$, $a_4=15$,求 α、β的值.

分析 为了求 α 和β,需有关于 α、β的两个方程.

解 由 $a_1=1$ 和 $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta$,得 $a_2=\alpha a_1+\beta$, 即

$$\alpha+\beta=3. \quad ①$$

又 $a_3=\alpha a_2+\beta=3\alpha+\beta$,

$a_4=\alpha a_3+\beta=\alpha(3\alpha+\beta)+\beta=3\alpha^2+\alpha\beta+\beta$.

已知 $a_4=15$, 又有方程

$$3\alpha^2+\alpha\beta+\beta=15. \quad ②$$

方程是"好的数学",在解数列问题时也是常用的.

由①和②,可解得 $\alpha_1=2$, $\beta_1=1$ 或 $\alpha_2=-3$, $\beta_2=6$. 所以,$\alpha=2$, $\beta=1$ 或 $\alpha=-3$, $\beta=6$.

例 9 已知有穷数列$\{a_n\}$：1, 12, 123, 1 234, 12 345, …, 123 456 789(在每一项的数字后面添写后一项的序号,便得到后一项).

(1) 求数列$\{a_n\}$的递推公式；

(2) 用上面的数列$\{a_n\}$,通过公式 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 构造一个新数列,写出数列$\{b_n\}$的前 4 项；

(3) 写出数列$\{b_n\}$的递推公式；

(4) 求数列$\{b_n\}$的通项公式.

用递推公式表达是方便的.

解 (1) $a_1=1$, $a_n=10a_{n-1}+n\ (2\leqslant n\leqslant 9)$.

(2) 由 $b_1 = a_2 - a_1$，$b_2 = a_3 - a_2$，$b_3 = a_4 - a_3$，$b_4 = a_5 - a_4$，容易得出数列$\{b_n\}$的前 4 项为 11，111，1 111，11 111.

(3) $\{b_n\}$的递推公式为 $b_1 = 11$，$b_n = 10b_{n-1} + 1\ (2 \leqslant n \leqslant 8)$.

(4) $\{b_n\}$的通项公式为 $b_n = \dfrac{1}{9}(10^{n+1} - 1)\ (1 \leqslant n \leqslant 8)$.

美国第 40 届高中数学竞赛题.

例 10 考虑如下逐项定义的序列：$u_1 = a$（a 为任意正数），$u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n + 1}(n = 1, 2, 3, \cdots)$，问 n 取下列哪个值时，$u_n = a$.（　　）.

(A) 14　　(B) 15　　(C) 16　　(D) 17　　(E) 18

分析　试算

$$u_2 = \frac{-1}{u_1 + 1} = \frac{-1}{a + 1},$$

$$u_3 = \frac{-1}{u_2 + 1} = \frac{-1}{\dfrac{-1}{a+1} + 1} = \frac{-a-1}{a},$$

$$u_4 = \frac{-1}{u_3 + 1} = \frac{-1}{\dfrac{-a-1}{a} + 1} = a.$$

猜测 $u_{n+3} = u_n$，已给数列为“周期数列”，周期为 3.

解　由

$$u_{n+3} = \frac{-1}{u_{n+2} + 1} = \frac{-1}{\dfrac{-1}{u_{n+1} + 1} + 1} = \frac{-u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

$$= -1 - \frac{1}{u_{n+1}} = -1 + u_n + 1 = u_n,$$

试验、观察、猜想、证明、选择.

可知$\{u_n\}$为周期是 3 的周期函数，即有

$$u_{3k+1} = u_1 = a.$$

因为 $u_{16} = u_{3\times 5+1} = u_1 = a$，故选 C.

例 11 已知数列$\{a_n\}$：$a_1 = 2$，且

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1\ (n = 1, 2, \cdots).$$

求证：$a_n \geqslant 2^{n-1} + 1\ (n = 2, 3, \cdots)$.

证明　由已知等式可得

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) = a_n[a_{n-1}(a_{n-1} - 1)]$$
$$= \cdots = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1(a_1 - 1).$$

由此可知，$a_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 + 1$.

因为 $n \geqslant 2$，所以有

$$a_n - a_{n-1} = (a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 1) - a_{n-1}$$
$$= (a_{n-1} - 1)^2 \geqslant 0.$$

即有 $a_n \geqslant a_{n-1}$.

所以 $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 = 2$，
因此 $a_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 + 1 \geqslant 2^{n-1} + 1$.

3. 与数列前 n 项和 S_n 有关的问题

例 12 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，求 a_n：
(1) $S_n = \frac{3}{4}(1 - 5^n)$； (2) $S_n = n^2 + 4n - 1$.

解 (1) 当 $n \geqslant 2$ 时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{4}(1 - 5^n) - \frac{3}{4}(1 - 5^{n-1})$$
$$= -3 \times 5^{n-1}.$$

因为 $a_1 = S_1 = \frac{3}{4}(1-5) = -3$ 适合上式，故所求通项公式为 $a_n = -3 \times 5^{n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

检验 a_1 是必要的.

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 4n - 1 - [(n-1)^2 + 4(n-1) - 1]$$
$$= 2n + 3.$$

因为 $a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \times 1 - 1 = 4$，不适合上式，故所求通项公式为

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1), \\ 2n + 3 & (n \geqslant 2). \end{cases}$$

也是分段函数.

例 13 求下列数列的和：

(1) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$；

(2) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(3) $\frac{5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{2n+3}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}$.

和式可缩写：

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}$，

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$，

(3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+3}{i(i+1)} \cdot \frac{1}{3^i}$.

分析 设法分裂各通项，使前后各项可以相抵消.

解 (1) 因为 $a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3}\right)$，
故

注意消掉了哪些项.

$$S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

(2) 因为 $a_k=\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right],$$ 故

搞清相消的规律.

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

注意裂项.

(3) 因为 $a_k=\dfrac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\dfrac{1}{3^k}=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{3^{k-1}}-\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{1}{3^k}$, 故

$$S_n=\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3^0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^1}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

例 14 求下列数列前 10 项的和 S_{10}:

$$\frac{2^2+1}{2^2-1},\ \frac{3^2+1}{3^2-1},\ \frac{4^2+1}{4^2-1},\ \cdots.$$

通项为 $\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}$.

分析 把通项公式适当变形.

解 $a_n=\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}=\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+2n}=1+\dfrac{2}{n(n+2)}$,

即有

$$a_n = 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

$$S_{10} = 10 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right)$$

$$= 10 + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) = 11\frac{43}{132}.$$

注意相消后的结果.

例 15 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，且

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (n+2) \cdot a_n,\ (n = 2, 3, \cdots), \quad ①$$

则$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} =$ ______.

由已知①式可获得哪些"可知"？

分析 由递推式①可得

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) = (n+3) \cdot a_{n+1}. \quad ②$$

②－①，得 $3a_{n+1} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n.$

即有 $na_{n+1} = (n+2)a_n$，亦即$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n}.$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$

可以写成$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)}$，于是有

更加对称和谐.

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)n} = \cdots = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

所以$a_n = \frac{n(n+1)}{2}\ (n \geqslant 1)$，于是得

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

例 16 已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1 = a$，$x_2 = b$，且$x_{n+1} = x_n - x_{n-1}\ (n \geqslant 2)$，$S_n$为数列前$n$项的和，则有（ ）.

二阶递推式.

(A) $x_{100} = -a$，$S_{100} = 2b - a$