"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

大学数学系列教材（第三版）

大学数学 5

湖南大学数学与计量经济学院 组编

主编 周金华 李丹衡 顾广泽

高等教育出版社

大学数学 5

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

大学数学系列教材（第三版）

大学数学 5

Daxue Shuxue

湖南大学数学与计量经济学院 组编

主编 周金华 李丹衡 顾广泽

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是大学数学系列教材之一，主要介绍复变函数的基本概念、基本理论和基本方法及其应用，内容包括复数、复变函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开、留数理论及其应用、共形映射。各节后配有适量的习题，各章后配有综合复习题。

本书结构严谨，内容丰富，重点突出，难点分散，概念、定理及理论叙述准确、精练，符号表示标准、规范，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性，便于教学。

本书是为高等学校本科非数学类各专业编写的“复变函数”课程的教材，同时适合其他需要获得相应数学知识、提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学. 5 / 周金华，李丹衡，顾广泽主编；湖南大学数学与计量经济学院组编. -- 3 版. --北京：高等教育出版社，2015.1
大学数学系列教材
ISBN 978-7-04-041407-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①周… ②李… ③顾… ④湖… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 261583 号

策划编辑 杨 波　责任编辑 杨 波　特约编辑 张让让　封面设计 张申申
版式设计 范晓红　插图绘制 黄建英　责任校对 张小镝　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京鑫海金澳胶印有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 10.5
字　　数 180 千字
购书热线 010－58581118
咨询电话 400－810－0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2003 年 1 月第 1 版
　　　　 2015 年 1 月第 3 版
印　　次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 16.00 元

物 料 号 41407-00

大学数学系列教材

（第三版）

湖南大学数学与计量经济学院组编

第三版前言

《大学数学》(1 ~5)系列教材是为了配合教育部“新世纪高等教育教学改革工程”,体现湖南大学课程教学改革的特色和经验,根据非数学类理工科各专业数学系列课程教学的需要,于2001年由我院组织部分教师编写出版的。内容包括传统的“高等数学”、“线性代数”、“概率论”和“数理统计”等,并统一用“大学数学”具名。2006年又成立编写委员会对该系列教材进行修订,陆续出版了第二版。

第二版的编委会由黄立宏担任主任,黄立宏、马柏林主编了《大学数学1》,曹定华、孟益民主编了《大学数学2》,曾金平、彭亚新主编了《大学数学3》,罗汉、杨湘豫主编了《大学数学4》,李丹衡、顾广泽、蒋月评主编了《大学数学5》。该套系列教材的初版和第二版先后被确定为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”和“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”,除作为湖南大学的理工学科各专业通识教育平台数学核心课程的指定教材外,也被国内许多高校选作本科相关专业的数学课程教材,使用十余年来受到了师生们的广泛好评。

大家在使用过程中也向我们提出了许多宝贵的意见和修改的建议,为了适应当前高等学校非数学类专业的数学核心课程教学的新要求,同时打造精品教材,我们决定组织人员对这套教材做进一步修订。此次修订保持原有的体系不变,改写了部分内容,调整了部分章节,订正了已发现的错误,精选和补充了部分例题和习题,并增加了每章之后的综合复习题。由于有一些参加原系列教材第二版编写的教师陆续调离或退休,为此我们调整了编委会和各教材的部分主编。

本书是在原《大学数学5》(第二版)的基础上进一步修订而成,由周金华、李丹衡、顾广泽任主编,内容主要包括复数与复变函数、复变函数的积分、复级数、留数理论以及共形映射等。

尽管如此,教材中不妥之处在所难免。仍然希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见,以便我们进一步改进。

本系列教材第三版的编写和出版继续得到我院各位教师和学校教务处以及高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

湖南大学数学与计量经济学院
2014年3月

第二版前言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1～5)系列教材，由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主编，其中，《大学数学1》由黄立宏和戴斌祥主编，刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写；《大学数学2》由曾金平和李晓沛主编，彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写；《大学数学3》由刘楚中和曹定华主编，杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、厉亚、朱郁森参加编写；《大学数学4》由杨湘豫和邓爱珍主编，喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写；《大学数学5》由李董辉和曾金平主编，马传秀参加编写。该系列教材被列为"普通高等教育'十五'国家级规划教材"，由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后历经湖南大学各非数学专业多届本科生使用，国内许多高等学校也将其选作一些本科专业的教材，得到师生的好评，同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量，打造精品教材，学院决定组织人员对该系列教材进行修订，并于2005年底由黄立宏牵头将教材的修订申报了"普通高等教育'十一五'国家级规划教材"，且顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1～5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离，在此次修订工作中，我们新成立了编写委员会，委员会由黄立宏任主任，罗汉任副主任，修订版各分册的主编为委员会成员。

本分册由李丹衡、顾广泽、蒋月评任主编，参加编写的还有：李永群、肖映青。根据目前湖南大学本科通识教育平台课程的设置，本分册的内容调整为复变函数，介绍复变函数的基本概念、理论和方法，主要包括复数、复平面、解析函数、复积分、复级数、留数理论、共形映射等。本书的内容依照原国家教委颁布的《复变函数课程教学基本要求》进行选择和安排。本书结构严谨，逻辑性强，叙述力求做到简洁、易懂；同时精选了例题，并配有适量的习题，便于教学。

由于编者水平有限，本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材是许多教师多年教学实践的结晶，其编写和出版得到湖南大学

数学与计量经济学院各位教师、湖南大学教务处和高等教育出版社的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2010年3月

郑重声明

目　　录

第一章　复　　数

复变函数讨论的是自变量为复数的函数理论，它是本课程的研究对象．本章先从较高的角度介绍复数的定义、运算、复平面点集和扩充复平面，为后面的复变函数的研究作准备．

第一节　复数的定义及其代数运算

一、复数的概念

在学习初等代数时已经知道，在实数范围内，方程 $x^2=-1$ 是无解的，因为没有一个实数的平方等于 -1．如果我们把"实数范围"的限制取消，情况将会是如何呢？为此，人们自然想到了这样一个问题：是否存在一个比实数集更大的数集，在这个数集内包含了上述方程的解？回答是肯定的．下面我们来介绍这个集合．

用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，我们把有序实数对 (a,b) 的全体称为复数集合，记为

$$\mathbf{C}=\{(a,b)\mid a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}.$$

(a,b) 称为一个**复数**．对于两个复数 (a,b)，(c,d)，如果 $a=c$，$b=d$，则称这两个复数**相等**，记为 $(a,b)=(c,d)$．

在复数集中，我们定义**加法**和**乘法**两种运算：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

容易验证，加法和乘法对复数集 $\mathbf{C}$ 是封闭的，都满足交换律．此外，$\mathbf{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律：

$$[(a,b)+(c,d)](e,f)=(a,b)(e,f)+(c,d)(e,f).$$

根据上述运算，我们可以找到类似于实数中的零元、单位元、负元和逆元．

复数 $(0,0)$ 满足如下性质：$\forall\,(a,b)\in\mathbf{C}$，有

$$(0,0)+(a,b)=(a,b),$$

$$(0,0)(a,b)=(0,0).$$

因此,$(0,0)$为复数集中的**零元素**,容易验证,零元素是唯一的,且$(a,b)=(0,0)$的充要条件是$a^2+b^2=0$.

复数$(1,0)$是乘法的**单位元**,因为$\forall(a,b)\in\mathbf{C}$,都有

$$(1,0)(a,b)=(a,b).$$

另外,不难验证,$(-a,-b)$是(a,b)唯一的**负元**;对每一个非零元素(a,b),有唯一的**逆元**$(a,b)^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

很自然地,我们可定义复数的**减法**和**除法**:

$$(a,b)-(c,d)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d);$$

对$(c,d)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}(a,b)\div(c,d)&=(a,b)(c,d)^{-1}=(a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right)\\&=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\right).\end{aligned}$$

综上所述,我们在复数集上建立的基本代数运算符合代数学中的一般公理,因此,$\mathbf{C}$也称为**复数域**.(实数集在实数的加法和乘法运算下则构成实数域.)

下面我们来讨论复数集和实数集之间的关系.记$\widetilde{\mathbf{R}}=\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$,则$\widetilde{\mathbf{R}}$是$\mathbf{C}$的一个子集,而$(a,0)\to a$是$\widetilde{\mathbf{R}}$与$\mathbf{R}$之间的一一对应.当把复数集中的运算作用在$\widetilde{\mathbf{R}}$上时,有

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$

$$(a,0)(b,0)=(ab,0).$$

即运算是**封闭**的,因而$\widetilde{\mathbf{R}}$是$\mathbf{C}$的一个子域.可以看出,作用在$\widetilde{\mathbf{R}}$上的运算实质上就是实数集$\mathbf{R}$上的运算.因此,我们认为$\widetilde{\mathbf{R}}$就是实数域$\mathbf{R}$,并直接记$\widetilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}$,$(a,0)=a$.从而实数域$\mathbf{R}$是复数域的一个子域.

在复数域中,方程$x^2=-1$的解存在,它就是$(0,1)$,事实上,$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

二、复数的表示及运算

在$\mathbf{C}$中,$(0,1)$这个元素有其特殊性,我们专门用i记$(0,1)$这个元素,于是

有 $i^2=-1$. 由于 $(0,b)=(b,0)(0,1)=bi$，于是每一个复数 (a,b) 都可以写成：

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+bi.$$

从现在开始，我们不再用实数对 (a,b) 来表示复数，而直接用 $z=a+bi$ 的形式来记复数. a 称为复数 z 的**实部**，记为 $a=\operatorname{Re} z$，b 称为 z 的**虚部**，记为 $b=\operatorname{Im} z$；复数集记为

$$\mathbf{C}=\{z\mid z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}\}.$$

在这种表示下，复数的代数运算可以像实数一样地进行. 比如，合并同类项、多项式乘法、分母有理化等.

加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=(a+bi)\left(\dfrac{c-di}{c^2+d^2}\right)=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i\quad(c^2+d^2\neq 0)$.

设 $z=a+bi$，定义 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\bar{z}=a-bi$. 称 $|z|$ 为 z 的**模**，$\bar{z}$ 为 z 的**共轭复数**. 它们有如下一些基本性质：

(1) $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$；

(2) $z\bar{z}=|z|^2=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$；

(3) $\bar{\bar{z}}=z$，$|z|=|\bar{z}|$；

(4) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$，$\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$，$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$；

(5) $|zw|=|z|\,|w|$，$\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.

以上性质的证明，留给读者作为练习.

例 1　设 $z_1=1+2i$，$z_2=-3+4i$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$ 和 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

解　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\dfrac{1-2i}{-3-4i}=\dfrac{(1-2i)(-3+4i)}{25}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{|1+2i|}{|-3+4i|}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例 2　设 $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z$ 和 $|z|^2$.

解 $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{i}{i(-i)}-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=i-\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i.$

所以，$\mathrm{Re}\,z=\dfrac{3}{2}$，$|z|^2=z\bar{z}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}.$

例 3 证明：若 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数，则有 $\mathrm{Im}\,z=0$ 或 $z\bar{z}=1$.

证 设 $z=x+yi$，由于 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{x^2+y^2}$，故

$$z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)i}{x^2+y^2},$$

已知 $z+\dfrac{1}{z}$ 为实数，故有

$$\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}=0,$$

从而 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$，即 $\mathrm{Im}\,z=0$ 或 $z\bar{z}=1$.

习 题 1-1

1. 将下列复数表示成代数形式：

(1) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$；　(2) $(1+i)^n+(1-i)^n$；　(3) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{3}{1+i}$.

2. 设 $z=x+iy$（x,y 为实数），求下列各复数的实部和虚部：

(1) $\dfrac{z-a}{z+a}(a\in\mathbf{R})$；　(2) $\dfrac{1}{z^2}$；　(3) z^3.

3. 设 z_1,z_2,z 为复数，证明

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；　(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$；　(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(4) $\bar{\bar{z}}=z$；　(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$；　(6) $z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}\,z$.

4. 已知 $(1+2i)\bar{z}=4+3i$，求复数 z.

5. 证明所有形如 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ 的矩阵经过用矩阵加法与矩阵乘法组合起来以后所成的集合与复数域同构.

第二节　复数的几何意义

一、复平面及复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系,实数对(a,b)就表示平面上的一个点M,也确定了向径$\overrightarrow{OM}$(如图 1－1).所以,复数的全体与该平面上的点成一一对应,也与向径的全体成一一对应,即

$$z=a+b\mathrm{i}\longleftrightarrow M(a,b)\longleftrightarrow\overrightarrow{OM}.$$

因此,在表述上,我们常将复数、复平面上的点、以原点为起点的向量三者不加区别.

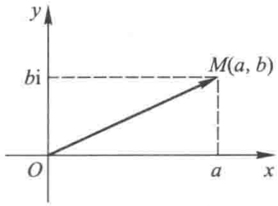

图 1－1

我们把直角坐标系的横轴称为实轴,纵轴称为虚轴,两轴所在的平面称为**复平面**,有时也可以用表示复数的字母来称呼复平面,比如,z 平面,w 平面等.

在复平面上,我们可以对复数的一些特征和性质进行几何描述.比如,从图 1－1 知,复数 z 的模 $|z|$ 即为向量$\overrightarrow{OM}$的长度 $|\overrightarrow{OM}|$;复数的实部 $\mathrm{Re}\,z=a$ 和虚部 $\mathrm{Im}\,z=b$ 分别为向量$\overrightarrow{OM}$在实轴和虚轴上的投影.显然,下列各式成立:

$$|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|.$$

根据向量理论,由一向量经过平移所得的所有向量表示的是同一向量,向量的加、减法遵循平行四边形法则.我们可以给出复数加、减法运算的几何意义(如图 1－2).并得出复数的三角不等式:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

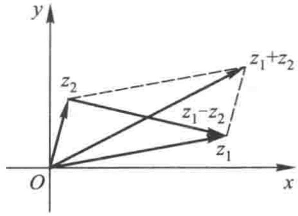

图 1－2

二、复数的三角形式和指数形式

在复平面上,不为零的复数 $z=x+\mathrm{i}y$,其对应的点有极坐标(r,θ)(如图 1－3).于是有:$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$.显然,$r=|z|$,θ 是正实轴与从原点 O 到点 z 的射线的夹角,称为复数 z 的**辐角**.显然有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

我们规定:正实轴按逆时针方向转动到射线$\overrightarrow{Oz}$,所成的角为正值;按顺时针方

向转动,所成的角为负值. 容易看出,每一个不为零的复数的辐角有无穷多个值,它们彼此间相差 2π 的整数倍. 记复数 $z(\neq 0)$ 的全部辐角的集合为 $\operatorname{Arg} z$,则有 $\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,其中 θ 为复数 z 的一个辐角. 通常把满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角 θ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的**主值**,记为 $\theta=\arg z$. 于是有

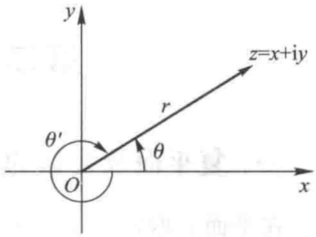

图 1－3

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{1-1}$$

当 $z=0$ 时, $|z|=0$,辐角不确定,即 Arg 0 没有意义.

利用极坐标表示,复数 z 可以表示为:

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1-2}$$

(1－2)式称为复数的三角表示. 再利用欧拉(Euler)公式:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. \tag{1-3}$$

又可以将复数表示成指数形式:

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-4}$$

复数的各种表示形式可以相互转换,以适应运算和研究问题的需要.

例 1　把复数 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 表示成三角形式和指数形式.

解　$r=\sqrt{3+1}=2$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限,所以 $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{6}$,于是 $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

例 2　求 $\operatorname{Arg}(-4-3\mathrm{i})$.

解　由式(1－1), $\operatorname{Arg}(-4-3\mathrm{i})=\arg(-4-3\mathrm{i})+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 及 $-4-3\mathrm{i}$ 位于第三象限知, $\arg(-4-3\mathrm{i})=\arctan\dfrac{3}{4}-\pi$(如图 1－4),所以有

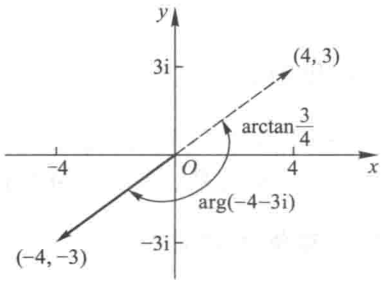

图 1－4