GAODENG SHUXUE
JIQI MATLAB SHIXIAN FUDAO

高等数学及其MATLAB实现辅导

任玉杰　张世泽◎主编

中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

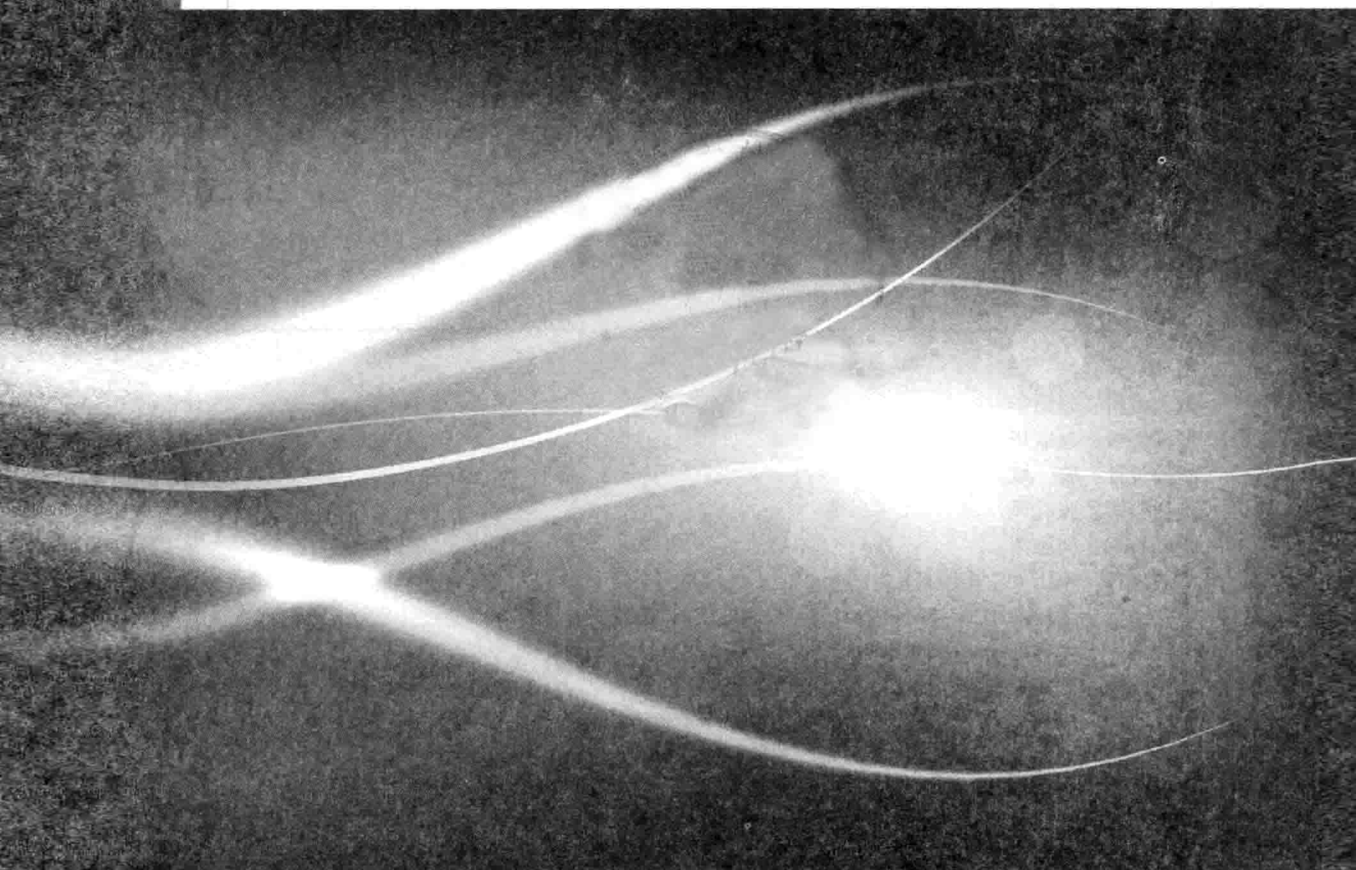
高等数学

MATLAB实现辅导

GAODENG SHUXUE

JIQI MATLAB SHIXIAN FUDAO

高等数学及其MATLAB实现辅导



中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其 MATLAB 实现辅导/任玉杰，张世泽主编 .—广州：中山大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-306-04562-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①任… ②张… Ⅲ.①Matlab 软件—应用—高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 114484 号

出 版 人：徐 劲
策划编辑：赵丽华
责任编辑：赵丽华
封面设计：曾 斌
责任校对：张礼凤
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电 话：编辑部 020-84111996，84113349，84111997，84110779
发行部 020-84111998，84111981，84111160
地 址：广州市新港西路 135 号
邮 编：510275 传 真：020-84036565
网 址：http://www.zsup.com.cn E-mail:zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：广州中大印刷有限公司
规 格：787mm×960mm 1/16 28.5 印张 827 千字
版次印次：2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
印 数：1~2500 册 定 价：35.00 元

前　言

《高等数学及其 MATLAB 实现辅导》是与《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》、《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》和多媒体教学软件配套使用的教学辅导书。本书每章内容分为两部分，第一部分为典型题解析，第二部分为《高等数学及其 MATLAB 实现（上、下册）》中所有书后习题解析。

本书大纲设计、统稿和修改由大连工业大学教授任玉杰策划并负责，由任玉杰和营口理工学院副校长张世泽担任主编。本书中“典型例题解析”部分由任玉杰执笔撰写，王维、辽宁大学研究生刘倩倩和刘绍华做了本书部分文字录入工作。本书“教材习题同步解析”部分撰写分工为：张世泽、郝世栋教授和孙贺琦教授组织营口理工学院何万里、李印、鲁鑫和施宏远等完成部分习题解答工作和统稿等，其中何万里编写《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》第二章极限和连续、《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》第四章级数的习题解答；李印编写《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》第一章预备知识、第八章空间解析几何与向量代数和《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》第三章曲线积分与曲面积分 3.4，3.5、复习题一的习题解答；鲁鑫和施宏远编写《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》第三章导数与微分、第四章中值定理与导数应用、第七章定积分应用和下册第三章曲线积分与曲面积分 3.1，3.2 和 3.3 的习题解答。此外，王琳编写《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》第一章多元函数微分学、第二章重积分和第五章常微分方程的习题解答；孙明岩编写《高等数学及其 MATLAB 实现（上册）》第五章不定积分和第六章定积分的书后习题解答；陈放编写《高等数学及其 MATLAB 实现（下册）》第四章级数的习题解答。其他参编人员还有刘国志、苗晨、杨秀珍、薄宏、谢晓洁、余永龙、徐子玉和程露莹。

本书的编写工作得到了大连工业大学和营口理工学院等有关领导的大力支持，还得到了任玉杰的硕士生导师滕素珍教授和博士生导师张鸿庆教授的热情支持和帮助，在此表示衷心的感谢。本书的出版得到了中山大学出版社的大力支持，特别是编辑赵丽华和有关工作人员的为本书的出版付出了大量辛勤劳动，在此我们表示衷心的感谢！

教学改革中所使用的教材应该是多模式、多品种的，本书只是为其中的一种模式所作的初步探索和尝试。本书在内容精简和实现数学机械化，以及培养学生数学应用能力和科学计算能力等方面虽然也作了一些努力，但仍感觉差距很大。真诚地希望同行、读者和专家提出不同的见解，并希望广大读者对教材中的错误、缺点和不足之处提出批评和指正。最后，我们也真诚地欢迎对本教材有兴趣的同行参加试用。

任玉杰

2014 年 7 月

目　　录

下编　高等数学及其MATLAB实现（下册）

上　编

高等数学及其 MATLAB 实现(上册)

第一章 预 备 知 识

数学一硕士研究生入学考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立.

数学一硕士研究生入学考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

数学三硕士研究生入学考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立.

数学三硕士研究生入学考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

§1.1 典型例题解析

1.1.1 集合和不等式

例 1 用集合的描述法表示下列集合.

(1) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

解 (1) $B=\{(x, y)\mid x^2+y^2<25, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$;

(2) $C=\{(x, y)\mid y=x^2$ 且 $x-y=0, x, y\in\mathbf{R}\}$.

例 2 用列举法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合 $\{x \mid |x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$.

解 (1) $A=\{3, 4\}$;

(2) $B=\{(1, 1), (0, 0)\}$;

(3) $C=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例 3 如果 $A=\{x \mid 3<x<5\}$, $B=\{x \mid x>4\}$, 求: (1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$.

解 (1)$A\cup B=\{x\,|x>3\}$；(2)$A\cap B=\{x\,|4<x<5\}$.

例 4 如果 $A=\{(x,\ y)\,|x-y+2\geqslant 0\}$，$B=\{(x,\ y)\,|2x+3y-6\geqslant 0\}$，$C=\{(x,\ y)\,|x-4\leqslant 0\}$，在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

解 $x-y+2\geqslant 0$，即 $y\leqslant x+2$；

$2x+y-6\geqslant 0$，即 $y\geqslant \dfrac{6-2x}{3}$；

$x-4\leqslant 0$，即 $x\leqslant 4$.

所以，$A\cap B\cap C$ 如图 1－1 所示.

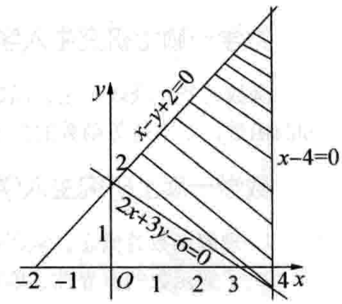


图 1－1

1.1.2 求函数定义域

解题思路：初等函数的定义域就是其函数有意义的自变量的取值范围，复杂函数的定义域就是由简单函数的定义域所构成的不等式组解的集合.

例 1 求函数 $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1,\\ x^2-x-6>0,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ x<-2 \text{ 或 } x>3.\end{cases}$ 所以，定义域为 $-3\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 4$.

例 2 求函数 $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域.

分析：求函数的定义域，就是求使函数有意义的 x 的取值范围.

解 $\begin{cases}16-x^2>0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4,\\ x>1,\\ x\neq 2,\end{cases}$ 所以有 $1<x<2$ 及 $2<x<4$，即 $(1,\ 2)\cup(2,\ 4)$.

例 3 求下列函数的定义域：$f(x)=\arcsin\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\ln(3x+1)}$.

解 因为 $\begin{cases}\left|\dfrac{1-x}{2}\right|\leqslant 1,\\ 4x-x^2\geqslant 0,\\ 3x+1>0,\\ 3x+1\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ x>-\dfrac{1}{3},\\ x\neq 0,\end{cases}$ 所以 $0\leqslant x\leqslant 3$.

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+7(0\leqslant x\leqslant 1),\\ \sin x(1<x\leqslant 2),\end{cases}$ 求 $f(x-2)$，并求其定义域.

解 $\because f(x-2)=\begin{cases}(x-2)^2+(x-2)+7(0\leqslant x-2\leqslant 1),\\ \sin(x-2)(1<x-2\leqslant 2),\end{cases}$

$\therefore f(x-2)=\begin{cases}x^2-3x+9(2\leqslant x\leqslant 3),\\ \sin(x-2)(3<x\leqslant 4),\end{cases}$ 定义域为 $[2,\ 4]$.

例 5 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,\ 1]$，求 $f(1-\ln x)$ 的定义域.

解 $0\leqslant 1-\ln x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant\ln x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，定义域为 $[1,\ \mathrm{e}]$.

1.1.3　求函数值及函数表达式

1. 求函数值

例 1　设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|\left(|x|<\dfrac{\pi}{3}\right),\\ 0\left(|x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\right),\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的函数图形.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$ 的图形为

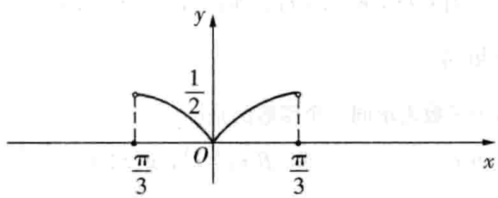


图 1－2

2. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 的表达式，求 $f[g(x)]$ 的表达式

解题思路：用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x，可得 $f[g(x)]$ 的表达式.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}x(x\leqslant 0),\\ x+x^2(x>0),\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

分析：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，求出复合函数的表达式的这种方法称为分析法．适用于分段函数参与的复合函数求表达式.

解　$f[f(x)]=\begin{cases}f(x)(f(x)\leqslant 0),\\ f(x)+f^2(x)(x>0),\end{cases}$ 而 $f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 0$，$f(x)>0\Leftrightarrow x>0$，所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}f(x)(x\leqslant 0),\\ f(x)+f^2(x)(x>0)\end{cases}=\begin{cases}x(x\leqslant 0),\\ x+2x^2+2x^3+x^4(x>0).\end{cases}$$

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}e^x(x<1),\\ x(x\geqslant 1),\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2(x<0),\\ x^2-1(x\geqslant 0),\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

分析：这是两个分段函数的复合，常采用分析法，即抓住外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析.

解　$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}[\varphi(x)<1],\\ \varphi(x)[\varphi(x)\geqslant 1].\end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时，或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0,\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0,\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1<x<0$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}.$

$$\text{所以，} f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}(x<-1),\\ x+2(-1\leqslant x<0),\\ e^{x^2-1}(0\leqslant x<\sqrt{2}),\\ x^2-1(x\geqslant\sqrt{2}).\end{cases}$$

3. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式

解题思路：先作变量代换，即令 $g(x)=t$，解出 $x=g^{-1}(t)$，求出 $f(t)$ 的表达式，然后将 t 换成 x，即可得 $f(x)$ 的表达式.

例 4 已知 $f(\ln x)=x^2(1+\ln x)$，求 $f(x)$.

解 令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，从而 $f(t)=e^{2t}(1+t)$，所以 $f(x)=e^{2x}(1+x)$.

1.1.4 判断函数是否相同

例 以下各组函数中，两个函数表示同一个函数的是(　　).

A. $f(x)=\sqrt{\ln^2 x}$，$g(x)=\ln x$　　　B. $f(x)=x^3$，$g(x)=(x^{\frac{3}{2}})^2$

C. $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$　　　D. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$，$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

分析：当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一个函数，否则表示不同的函数.

解 A 组中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对应关系不同，B 组和 D 组中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，只有 C 组中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域和对应关系均相同．故选 C.

1.1.5 讨论函数的奇偶性与周期性

解题思路：判断函数的奇偶性，主要根据奇偶性的定义以及奇偶函数的运算性质．奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇、偶函数.

例 1 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　　(2) $y=\dfrac{(5x^4+\cos 2x)\tan x}{6x(3x^3+\sin 7x)}$.

解 (1)(根据奇偶性的定义)令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 则

$$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

所以，$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2)(根据奇偶函数的运算性质)因为 $5x^4$ 和 $\cos 2x$ 都是偶函数，所以 $5x^4+\cos 2x$ 是偶函数，而 $\tan x$ 是奇函数，故分子 $(5x^4+\cos 2x)\tan x$ 是奇函数．类似可得，分母 $6x(3x^3+\sin 7x)$ 是偶函数．因此，y 是奇函数.

例 2 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

分析：利用函数的周期性概念.

解 $f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)=f(ax)$，所以 $\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

1.1.6　求反函数

解题思路：把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出，然后将 x 与 y 对换，即得所求的反函数.

例　求函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$的反函数，并指出其定义域.

解　$y=\dfrac{x}{x+2}\Rightarrow y(x+2)=x\Rightarrow x(1-y)=2y\Rightarrow x=\dfrac{2y}{1-y}$，所以反函数为 $y=\dfrac{2x}{1-x}$，其定义域为$(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

1.1.7　应用举例

例 1　在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定此函数的定义域.

解　设 V 为圆柱体积，h 为圆柱的高，r 为球半径，r'为圆柱底面半径，则

则
$$r'=\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}},\ V=\pi(r')^2h=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right).$$

因为 $r^2-\dfrac{1}{4}h^2>0$，所以 $0<h<2r$ 为 $V=\pi h\left(r^2-\dfrac{h^2}{4}\right)$的定义域.

例 2　设生产与销售某产品的总收益 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知，当产量 $x=0$，2，4 时，总收益 $R=0$，6，8，试确定总收益与产量 x 的函数关系.

解　因为 R 是 x 的二次函数，所以设 $R=ax^2+bx+c$，则$\begin{cases}0=a\times0+b\times0+c,\\6=a\times2^2+b\times2+c,\\8=a\times4^2+b\times4+c,\end{cases}$得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=4,\\c=0,\end{cases}$所以 $R=-\dfrac{1}{2}x^2+4x$.

例 3　设某厂每天生产 x 件产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x$.

(1)假若每天至少能卖出 200 件产品，为了不亏本，该产品的单位售价至少应定为多少元?

(2)假若该厂计划总利润为总成本的 20%，问每天卖出 x 件产品的单位售价应为多少元?

解　(1)为了不亏本，必须每天售出 200 件产品的总收入与总成本相等，设此时的单位售价为 p，则有 $200p=400+3\times200=1\,000$，由此解得 $p=5$(元). 因此，为了不亏本，单位售价至少应定为 5 元.

(2)设单位售价为 p，则总利润函数为 $L(x)=px-C(x)$.

根据假设，总利润为 $0.2C(x)$，于是得 $0.2C(x)=px-C(x)$.

由此得
$$px=1.2C(x)=1.2(400+3x).$$

解得
$$p=3.6+\frac{480}{x}(\text{元}).$$

例如，每天售出 200 件时，单位售价为 6 元.

例 4　设某超市以 a 元/kg 的价格购入某种商品(如鸡蛋、苹果等)，以 b 元/kg 售出$(a<b)$. 如次售出 10 kg 以上，则超出部分以 $0.9b$ 元/kg 的优惠价出售. 试将一次成交的销售收入 R 与利润 L 表示成销售量 x 的函数.

解　由题设可知，一次售出 10 kg 以内的收入为
$$R=bx(0\leqslant x\leqslant10).$$

而一次售出 10 kg 以上的收入为
$$\begin{aligned}R&=10b+0.9b(x-10),\\&=b+0.9bx(x>10).\end{aligned}$$

因此，一次成交的销售收入 R 是 x 的分段函数

$$R(x)=\begin{cases} bx(0\leqslant x\leqslant 10),\\ b+0.9bx(x>10).\end{cases}$$

由题设可知，其成本函数为 $C(x)=ax$. 于是，一次成交的利润函数为

$$\begin{aligned} L(x)&=R(x)-C(x)\\ &=\begin{cases}(b-a)x(0\leqslant x\leqslant 10),\\ b+(0.9b-a)x(x>10).\end{cases}\end{aligned}$$

例 5 (1)已知鸡蛋的收购价为 5 元/kg 时，每月能收购 5 000 kg；若收购价每千克提高 0.1 元，则每月收购量可增加 500 kg. 求鸡蛋的线性供给函数.

(2)已知鸡蛋的销售价为 8 元/kg 时，每月能销售 5 000 kg；若销售价每千克降低 0.5 元，则每月销售量可增加 800 kg. 求鸡蛋的线性需求函数.

(3)求鸡蛋的均衡价格 p_e 和均衡数量 Q_e.

解 (1)设鸡蛋的线性供给函数为 $Q_s=-c+dp$，其中 Q_s 为收购量(即供给量)，p 为收购价格. 由题设有

$$\begin{cases}5000=-c+5d,\\ (5000+500)=-c+(5+0.1)d.\end{cases}$$

由此解得 $d=5000$，$c=20000$. 于是，所求鸡蛋的线性供给函数为

$$Q_s=-20000+5000p.$$

(2)设鸡蛋的线性需求函数为 $Q_d=a-bp$，其中 Q_d 为需求量，p 为销售价格，由题设有

$$\begin{cases}5000=a-8b,\\ (5000+800)=a-(8-0.5)b.\end{cases}$$

由此解得 $b=1000$，$a=13000$. 于是，所求鸡蛋的线性需求函数为 $Q_d=13000-1000p$.

(3)由供需均衡条件 $Q_d=Q_s$，有 $13000-1000p=-20000+5000p$.

由此解得均衡价格为 $p_e=\dfrac{33}{6}=5.5$(元/kg).

相应的均衡数量为 $Q_e=7500$(kg).

§1.2 教材习题同步解析

习题 1.1

A 组

1. 写出集合 $A=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集.

解 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0, 1\}$ $\{0, 2\}$，$\{1, 2\}$，$\{0, 1, 2\}$，$\varnothing$.

2. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解 $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$，$A\cap B=\{1, 3\}$.

3. 用集合的描述法表示不小于 5 而小于 10 的所有实数组成的集合.

解 $\{x\mid 5\leqslant x<10, x\in\mathbf{R}\}$.

4. 用区间表示下列不等式的解集合.

(1)$x^2\geqslant 9$； (2)$|x+2|<1$； (3)$|x-x_0|<\varepsilon$(x_0 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4)$|x+1|>2$； (5)$|x+1|\leqslant 5$.