普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

程贤锋　金本清　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　程贤锋　金本清
副主编　易　敏　冯喜全
　　　　陈　嫄　邱　振

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据高等学校工科类专业本科生的数学基础课程教学基本要求，以高等教育应用型本科人才培养计划为标准，结合全国教育科学规划课题《大学数学与高中新课程标准相衔接的教学模式研究与实践》(DIA090199)的研究成果，在充分吸收编者们多年的教学实践经验的基础上编写而成.

全书分上、下两册. 下册共5章，主要内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容，此外还介绍了MATLAB软件在高等数学中的应用. 各章节后配有习题，每章后配有复习题(包括A基本题和B拓展题).

本书可作高等院校尤其是应用型本科院校理工科本科专业的教材，也可以作其他各类院校大学数学课程的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 程贤锋，金本清主编. —北京：科学出版社，2015
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-043208-7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①程…　②金…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第021157号

责任编辑：滕亚帆　胡云志 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍　兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015年1月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2015年1月第一次印刷　印张：15 3/4
字数：420 000
定价：35.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

教育教学改革无止境.

南昌工程学院大学数学课程教学内容、方法、手段的研究和改革实践不断推进，注重学生数学思维的培养和数学应用能力的提升已成共识. 2011年高中数学新课程标准开始在各省(市、自治区)全面实施，作为学生进入大学后就开设的大学数学课程受此影响是直接的. 结合全国教育科学规划课题《大学数学与高中新课程标准相衔接的教学模式研究与实践》(DIA090199)的研究成果，在南昌工程学院本科教学工程专项经费资助下，根据高等学校理工科本科专业高等数学课程的教学基本要求和应用型人才培养的特点，借鉴多年的教学实践，我们编写了这套《高等数学》教材.

本书在编写中，始终把“纵向对接，横向服务，突出应用”的指导思想贯穿在其中. 所谓纵向对接，就是既要对接高中新课标又要对接研究生教育，横向服务就是要为工科各专业后续课程的学习奠定基础，而突出应用则是在整个高等数学教学模式改革过程中要突出应用型本科人才的培养. 具体表现在以下几个特点：

1. 经典内容与时代气息相结合. 在保留高等数学经典知识、例题和习题等内容的同时，我们注重引入一些与时代相关的知识和内容，同时还引入对部分数学家的介绍和文献资料的延伸阅读以增加学生的课外知识，提高学生的数学素养.

2. 基本要求与适当拓展相结合. 在教学实践中我们发现，学生的学习需求是不同的. 因此，我们在讲解基本知识、基本运算和基本方法的同时，适当引入一些比较简单而又灵活的考研题，以拓宽学生的知识面，增加知识点的深度，对学生的探究性学习有一定的益处.

3. 理论知识和实际应用相结合. 适度减少对部分定理、公式的纯理论证明，增加了与生活和工程技术应用相关的知识和内容，以提高学生用数学知识解决实际问题的意识和能力.

4. 传统内容与现代数学软件相结合. 高中数学新课标已提到了使用电子表格等软件来解决数学问题，提高对数学概念的理解，那么大学数学引入专业数学软件辅助教学也就成为教学改革的题中之意. 本教材将数学软件 MATLAB 融入数学基础课程的教学，介绍了 MATLAB 软件在高等数学中的应用，旨在通过上机实验，让学生尝试通过数学软件掌握绘制各种图形和求解各种运算的方法，扩充解决实际问题的手段，这对提高学生学习兴趣和培养学生自主学习的能力，无疑是有重大意义的.

5. 每章均配小结，便于学生掌握本章的知识结构，明确学习要求，知道重点和难点，以达到较好的学习效果.

全书分上、下两册，由南昌工程学院教务处长陆伟锋博士、教授策划并指导，下册由程贤锋、金本清主编，易敏、冯喜全、陈嫄、邸振为副主编.

在全书的编写过程中，得到了南昌工程学院理学院高等数学教研室同仁的大力支持，我们在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限，难免存在错误疏漏之处，欢迎同行及读者批评指正.

编　者

2014年12月

目　　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题. 要把代数运算引入到几何中来，首先就要把几何结构代数化、数量化. 在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序实数对应起来，把平面上的图形与方程对应起来，从而实现了用代数的方法来研究平面几何的目的. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的. 空间解析几何对学习多元函数微积分和力学等课程有很大帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题也是很有用的.

本章先引入向量的概念，根据线性运算建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并通过代数的方法研究空间中的一些常见的曲线和曲面.

6.1　向量及其线性运算

6.1.1　向量概念

现实生活中，只有大小的量称为**数量**；像位移、速度、加速度、力、力矩等这类既有大小，又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

我们通常用有向线段来表示向量，其长度代表向量的大小，其方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的向量，记作$\overrightarrow{AB}$(图 6.1)，有时也用一个黑体字母表示，例如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$，还可用$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$表示. 向量的大小称为**向量的模**，向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$.

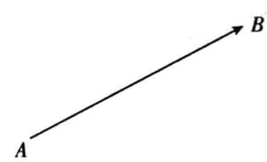

图 6.1

模等于 1 的向量称为**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记作 $\boldsymbol{e}_a$ 或$\vec{e}_a$.

模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量是起点与终点重合的向量，它的方向可以看作是任意的.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$. 显然，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

我们把向量看作是有向线段，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线相互平行，就称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 类似地，我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等.

若两个向量的模相等且方向相同，就称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

两个向量是否相等与它们的起点无关，只由它们的模和方向决定.

在数学上，我们研究的正是这种与起点无关，而只由模和方向决定的向量，这种向量称为**自由向量**. 自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍代表原来的向量. 在自由向量的意义下，相等的向量都可以看作是同一个自由向量. 由于自由向量起点可任取，在讨论中我们可以按照需要选取某一点作为所研究的这些向量的公共起点，这种做法称为把**一些向量归结到了共同的起点**.

如果把彼此平行的一组向量归结到共同的起点，这组向量一定在同一直线上，因此，把平行于同一直线的一组向量称为**共线向量**. 零向量与任何共线的向量组共线.

如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的起点，这组向量一定在同一个平面上，因此，把平行于同一平面的一组向量称为**共面向量**. 零向量与任何共面的向量组共面.

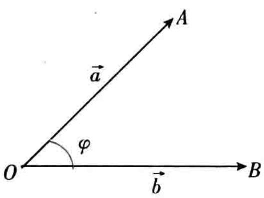

图 6.2

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，记$\angle AOB=\varphi$，规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，我们把 φ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**(图 6.2)，记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$或$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$，也可以记作$\langle\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}\rangle$或$\langle\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a}\rangle$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值.

显然，若两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π. 而若$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，就称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于规定了零向量与任一向量间的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值，因此，可以认为零向量与任意向量都平行且零向量与任意向量都垂直.

6.1.2 向量的线性运算

向量的加法、减法以及数乘统称为**向量的线性运算**.

1. 向量的加减法

定义 6.1.1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O 为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为**两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

求两已知向量的和的运算称为**向量加法**.

根据向量加法的定义，有$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$，这种求两个向量和的方法，称为**三角形法则**(图 6.3).

如果把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 归结到共同的起点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，并以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$为邻边作$\square OACB$，那么对角线向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，这种求两个向量和的方法称为**平行四边形法则**(图 6.4). 实际上，平行四边形法则可归结为三角形法则，只需进行向量的平移即可.

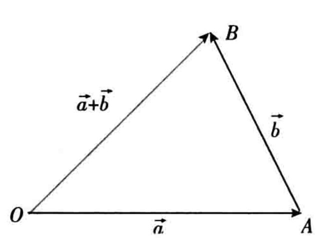

图 6.3

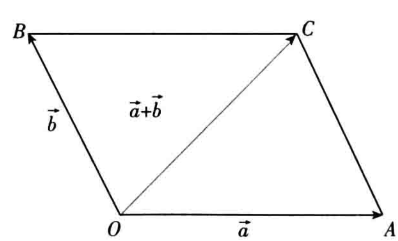

图 6.4

特别地，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量的加法满足下面的运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

上述运算规律通过三角形法则容易证明，留给读者自行证明.

由于向量的加法满足交换律和结合律，因此任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以

记作 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

向量加法的三角形法则可以推广得到任意有限个向量相加的法则：任取空间一点 O 为起点，首尾相连，作$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，可得一条折线 $OA_1A_2\cdots A_n$，则向量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是这 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，即$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. 这种求和的方法称为**多边形法则**.

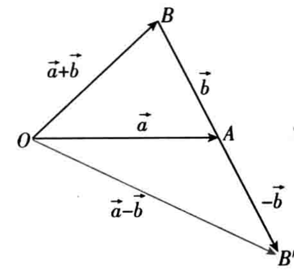

图 6.5

前面已经定义了负向量，向量的减法可以通过负向量来规定：两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（图 6.5）.

根据向量减法的规定，可以得到**向量等式的移项法则**：在向量等式中，把某个向量从等号的一边移到另一边，只要改变它的符号即可.

向量加法还满足下列不等式：

对于任何两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，根据向量加法的三角形法则及三角形两边之和大于第三边，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad (\text{当 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{b} \text{ 同向时等号成立});$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad (\text{当 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{b} \text{ 反向时等号成立}).$$

上述不等式还可以推广到任意有限个向量的情况（读者可根据数学归纳法自行证明）：

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

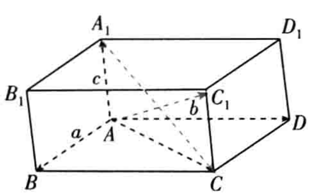

图 6.6

例 6.1.1　如图 6.6 所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 来表示向量$\overrightarrow{AC_1}$和$\overrightarrow{A_1C}$.

解　$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

2. 数与向量的乘法

在物理学中，我们非常熟悉的牛顿第二定律的数学形式 $\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a}$，这个表达式用到了数与向量之间的乘法关系，这种关系在物理学中经常会被用到，再比如 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$.

定义 6.1.2　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，其方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，其方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，这种运算称为**数与向量的乘法**，简称**数乘**.

根据上述定义，显然，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$，此时 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，它的方向可以是任意的；当 $\lambda=\pm1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$-1\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

若已知向量 $\boldsymbol{a}$ 及其单位向量 $\boldsymbol{e}_a$，根据数乘的定义，等式 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 显然成立，所以当 $|\boldsymbol{a}|\neq0$ 时，有

$$\boxed{e_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}$$

数乘运算满足下面的运算律：

(1)结合律： $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；
(2)分配律： $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

其中,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为向量,λ,μ 为任意实数.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 6.1.1 设有非零向量 $\boldsymbol{a}$,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 一方面,若存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则根据数与向量的乘法定义,当 $\lambda>0$ 时,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向,因此,$\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$.

另一方面,若 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 或者同向,或者反向. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$;当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同,且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,因此 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证 λ 的唯一性. 设有 $\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}=\lambda_2\boldsymbol{a}$,两式相减有 $\boldsymbol{0}=(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{a}$,即 $|\lambda_1-\lambda_2||\boldsymbol{a}|=0$,由于 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,所以 $\lambda_1-\lambda_2=0$,即 $\lambda_1=\lambda_2$. 证毕.

例 6.1.2 利用向量证明连结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

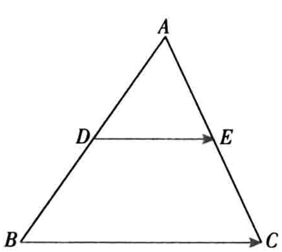

图 6.7

证明 如图 6.7 所示,设$\triangle ABC$ 的两条边 AB,AC 的中点分别为 D,E,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

因此,$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$. 证毕.

由此例可见,我们可以利用向量运算来证明一些几何命题.

6.1.3 空间直角坐标系

在空间中取定一点 O 和三个两两相互垂直的有序单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为**坐标轴**. 它们构成了一个**空间直角坐标系**,称为 $Oxyz$ 坐标系或$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系,点 O 称为**坐标原点**.

三个坐标轴的正向通常符合右手螺旋规则,如图 6.8,伸出右手,让四指与大拇指垂直,并使四指先指向 $\boldsymbol{i}$ 的方向(x 轴正方向),然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$,指向 $\boldsymbol{j}$ 的方向(y 轴正方向),此时大拇指指向 $\boldsymbol{k}$ 的方向(z 轴正方向).

每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**,按照坐标面所包含的坐标轴,分别称为 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 三张坐标面把空间分成八个区域,每个区域称为一个**卦限**,这八个区域

分别称为八个卦限，如图 6.9 所示.

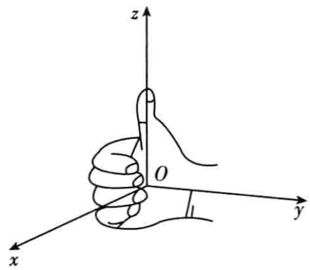

图 6.8

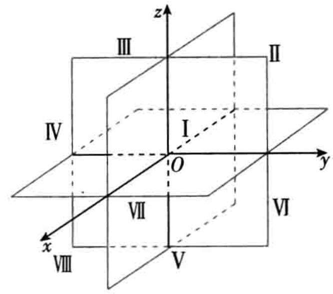

图 6.9

任意取定向量 $\boldsymbol{r}$，由于我们所讨论的向量均指自由向量，因此可以将 $\boldsymbol{r}$ 的起点取作原点 O，记 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，$M$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的终点. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体(图 6.10)，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，由于 $\overrightarrow{OA}\parallel\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}\parallel\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}\parallel\boldsymbol{k}$，可设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，则

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.}$$

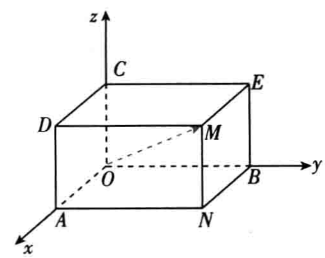

图 6.10

这个式子称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴，y 轴，z 轴方向的分向量**.

通过上述讨论可以看出，取定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及一个有序数组 (x,y,z)；反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，也可以确定一个向量 $\boldsymbol{r}$ 及一个点 M. 因此，向量 $\boldsymbol{r}$，点 M，有序数组 (x,y,z) 三者之间存在一一对应的关系.

> **定义 6.1.3** $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 中的有序数组 (x,y,z) 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 关于坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

> **定义 6.1.4** 对于**坐标系** $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中的任意一点 M，向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为**点 M 的向径**. 向径 $\overrightarrow{OM}$ 关于 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 的坐标 (x,y,z) 称为**点 M 关于 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 的坐标**，记作 $M(x,y,z)$.

坐标轴上、坐标面上及各个卦限当中的点的坐标各有特点，例如 x 轴上任一点的坐标形式为 $(x,0,0)$；xOy 面上任一点的坐标形式为 $(x,y,0)$；第Ⅰ卦限中任一点的三个坐标均为正等，这里不一一列举，请读者自己试着分析总结.

6.1.4 用坐标表示向量相关概念与运算

1. 向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标

事实上，设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 $A=(x_1,y_1,z_1)$、终点 $B=(x_2,y_2,z_2)$，根据定义 6.1.4，可知，点 A 和点 B 的向径分别为 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$. 又根据向量加法的三角形法则、向量加法的交换律、数与向量乘法的分配律有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

例 6.1.3 设已知空间中两点 $A=(1,1,3)$,$B=(2,-1,0)$,试写出向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

解 根据上述结论可知
$$\overrightarrow{AB}=(2-1,-1-1,0-3)=(1,-2,-3).$$

2. 用向量的坐标来表示向量的模

如图 6.10 所示,设向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,而$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,根据勾股定理,有
$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2}.$$
因为$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,所以,$|\overrightarrow{OA}|=|x|$,$|\overrightarrow{OB}|=|y|$,$|\overrightarrow{OC}|=|z|$. 于是有
$$\boxed{|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$$
若向量$\overrightarrow{AB}$的起点 $A=(x_1,y_1,z_1)$、终点 $B=(x_2,y_2,z_2)$,则
$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$
这也是空间中两点间的距离公式.

例 6.1.4 求证以 $A=(0,0,2)$,$B=(2,-1,0)$,$C=(1,2,4)$为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明 因为
$$|\overrightarrow{AB}|^2=(2-0)^2+(-1-0)^2+(0-2)^2=9;$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2=(1-0)^2+(2-0)^2+(4-2)^2=9;$$
$$|\overrightarrow{BC}|^2=(1-2)^2+(2+1)^2+(4-0)^2=26,$$
所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,因此,$\triangle ABC$ 是一个等腰三角形.

3. 方向角和方向余弦

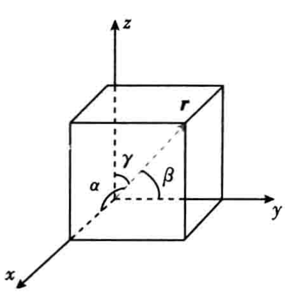

图 6.11

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴上单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角分别记作 α,β,γ,这三个角统称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**(图 6.11). 而称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,不难看出,
$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.}$$
从而,可以得到一个很好的结论,即
$$\boxed{(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r.}$$
并由此可得
$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.}$$

例 6.1.5 设已知空间中两点 $A=(0,0,2)$,$B=(2,-1,0)$,试求出向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦.

解 因为$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2)$,所以$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$,从而 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$,

$\cos\beta=-\frac{1}{3}, \cos\gamma=-\frac{2}{3}$.

4. 两向量和的坐标等于两向量对应的坐标之和

事实上，设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据向量加法的交换律、数乘的分配律有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

5. 数乘向量等于该数与向量的对应坐标之积

事实上，设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，λ 为任意实数，根据数与向量乘法的分配律有

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}+\lambda z\boldsymbol{k},$$

即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

例 6.1.6　设向量 $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

解　$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2\times0-3\times1,2\times1-3\times1,2\times2-3\times0)=(-3,-1,4)$.

6. 两非零向量平行(共线)的充分必要条件是它们的对应坐标成比例

事实上，设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，根据定理 6.1.1，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1),$$

因此有，$x_2=\lambda x_1$，$y_2=\lambda y_1$，$z_2=\lambda z_1$，即

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}(=\lambda).$$

6.1.5　向量在轴上的投影

设已知空间中一点 M 及一条轴 u，过点 M 作垂直于 u 轴的平面，该平面与 u 轴的交点 M' 称为**点 M 在 u 轴的投影**(图 6.12).

设已知空间中一向量 $\boldsymbol{r}$(起点和终点分别为 A 和 B，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}$)及一条轴 u，若 $\boldsymbol{r}$ 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为点 A' 和 B'，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影向量**. 如果在 u 轴上取与 u 轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$，则有 $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\boldsymbol{e}$，其中数 λ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$(图 6.13).

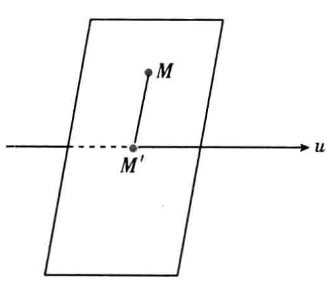

图 6.12

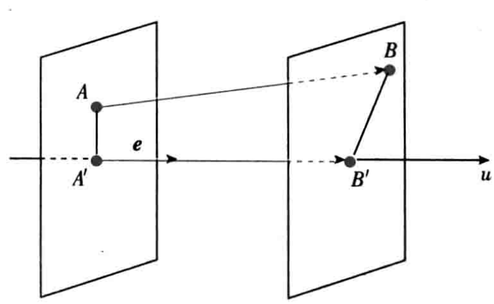

图 6.13

也可以采用另一种方法来定义，本质上是一样的：由于 $\boldsymbol{r}$ 为自由向量，可将 $\boldsymbol{r}$ 的起点移动到 u 轴上的点 O，此时 $\boldsymbol{r}$ 的终点为 M，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，若点 M 在 u 轴上的投影为点 M'，则称向量 $\overrightarrow{OM'}$ 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影向量**. 若 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则称数 λ 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影**.

显然,λ 可正可负.当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向时,λ 为正;当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向时,λ 为负.

根据向量在轴上投影的定义,不难看出向量 $\boldsymbol{r}$ 在空间直角坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中的三个坐标分别为 $\boldsymbol{r}$ 在三条坐标轴上的投影.

已知空间中向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,一条轴 u 及在 u 轴上与 u 轴同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$.向量在 u 轴上的投影具有下列性质:

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$;

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$;

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

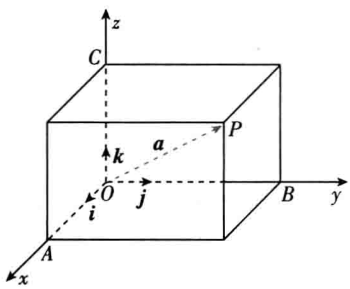

图 6.14

例 6.1.7 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,试证明:向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在三条坐标轴上的投影公式:

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=z.$$

证明 如图 6.14,设 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,点 P 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影分别为 A、B、C,则 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,因此,根据向量在轴上投影的定义有 $\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=x$,$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=y$,$\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=z$.

习　题　6.1

1. 试讨论下列情形中向量的终点分别构成什么图形:

(1)把平行于某一空间直线的一切单位向量归结到共同的起点;

(2)把平行于某一空间直线的一切向量归结到共同的起点;

(3)把平行于某一平面的一切单位向量归结到共同的起点;

(4)把空间中一切单位向量归结到共同的起点.

2. 在空间直角坐标系中,判断下列各点在哪个卦限:

(1)$(-1,-2,3)$;　(2)$(1,-2,-3)$;　(3)$(-1,-2,-3)$;　(4)$(-1,2,3)$.

3. 试讨论位于坐标面上和坐标轴上的点各有哪些特征,并指出下列各点的位置:

(1)$(0,-2,3)$;　(2)$(1,0,3)$;　(3)$(1,0,0)$;　(4)$(0,0,3)$.

4. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

5. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}$.

6. 设已知空间中两点 $A=(2,0,8)$,$B=(8,-1,7)$,试写出:

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标;　(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量的坐标;

(3)平行于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量的坐标;　(4)向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,0)$,$\boldsymbol{b}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{c}=(2,0,1)$,求向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 的坐标.

8. 求点 (a,b,c) 到各坐标轴的距离.

9. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 2,它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{6}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴的投影.

10. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的终点坐标为 $(-2,3,0)$,它在 x 轴、y 轴、z 轴的投影分别为 2,1,4,求向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点坐标.

11. 利用向量证明:对角线互相平分的四边形是平行四边形.